



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2016–2017**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(1)

Convocatoria:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
 . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1. Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1, -2)$ la recta de ecuación $y = 5x - 7$ (2,5 puntos)

2. Resolver las siguientes integrales

a) $\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx$ (1,25 puntos)

b) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx$ (1,25 puntos)

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular el valor x para que se cumpla: $A + B + C^2 = 3 \cdot I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2 (1 punto)

b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $A \cdot X + C^2 = 3 \cdot I_2$ (1,5 puntos)

4. Dado el plano $\pi: 5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$, se pide

a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)

b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r (1,25 puntos)



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2016-2017**

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(1)
Convocatoria:	

Instrucciones:

- . Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN B

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ se pide

- a) Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento (1,5 puntos)
- b) Calcular los máximos y mínimos relativos (1 punto)

2. Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:

$$y = 3x ; \quad y = x ; \quad y = -x + 8 ; \quad x = 3 \quad (2,5 \text{ puntos})$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + kz = 1 \\ kx + 2y - z = -2 \\ y - 3z = -3 \end{array} \right\}$$

- a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k (1,5 puntos)
- b) Resolverlo para $k = 2$ (1 punto)

4. Dados los planos: $\pi_1 : x - y + 3 = 0$; $\pi_2 : 2x + y - z = 0$, determinar

- a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2,2,1)$. (1 punto)
- b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1,1,-1)$ (1,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1, -2)$ la recta de ecuación $y = 5x - 7$ (2,5 puntos)

La función y la recta tangente coinciden en el punto $P(1, -2)$ por lo que $f(1) = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d \\ f(1) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + c \cdot 1 + d \Rightarrow -2 = 2 - 1 + c + d \Rightarrow \boxed{c + d = -3}$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene ecuación $y = 5x - 7$, por lo que la pendiente de la recta tangente es 5 y por tanto $f'(1) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 6x^2 - 2x + c \\ f'(1) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c \Rightarrow 5 = 6 - 2 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación para obtener el valor de d .

$$\left. \begin{array}{l} c + d = -3 \\ c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + d = -3 \Rightarrow \boxed{d = -4}$$

Los valores buscados son $c = 1$ y $d = -4$.

2. Resolver las siguientes integrales

a) $\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx$ (1,25 puntos)

b) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx$ (1,25 puntos)

a) Aplicamos un cambio de variable para resolver la integral indefinida.

$$\int \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln 2x = t \Rightarrow \frac{2}{x} dx = dt \\ dx = \frac{x}{2} dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{3} \frac{1}{2} dt = \int \frac{t^2}{6} dt =$$

$$= \frac{1}{6} \int t^2 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{18} = \{\ln 2x = t\} = \frac{(\ln 2x)^3}{18} + C$$

Aplico este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \left[\frac{(\ln 2x)^3}{18} \right]_{1/2}^{e/2} = \frac{\left(\ln 2 \frac{e}{2} \right)^3}{18} - \frac{\left(\ln 2 \frac{1}{2} \right)^3}{18} = \frac{(\ln e)^3 - (\ln 1)^3}{18} = \frac{1 - 0}{18} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

b) Descomponemos la integral en suma de integrales inmediatas.

$$\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{3x^4}{x^2} dx + \int \frac{5x^2}{x^2} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int 3x^2 dx + \int 5 dx + \int \frac{x^{1/2}}{x^2} dx =$$

$$= x^3 + 5x + \int x^{1/2-2} dx = x^3 + 5x + \int x^{-3/2} dx = x^3 + 5x + \frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1} =$$

$$= x^3 + 5x + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} = \boxed{x^3 + 5x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C}$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular el valor x para que se cumpla: $A + B + C^2 = 3 \cdot I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2 (1 punto)

b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $A \cdot X + C^2 = 3 \cdot I_2$ (1,5 puntos)

a) Sustituimos los valores de las matrices.

$$A + B + C^2 = 3 \cdot I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+1 & 0-2 \\ 0-2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3=3 \\ x-2=0 \\ x-2=0 \\ 3=3 \end{cases} \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

El valor buscado es $x = 2$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial, suponiendo que la matriz A tiene inversa.

$$A \cdot X + C^2 = 3 \cdot I_2 \Rightarrow A \cdot X = 3 \cdot I_2 - C^2 \Rightarrow X = A^{-1} (3 \cdot I_2 - C^2)$$

Comprobamos que la matriz X tiene inversa y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sustituimos y obtenemos X .

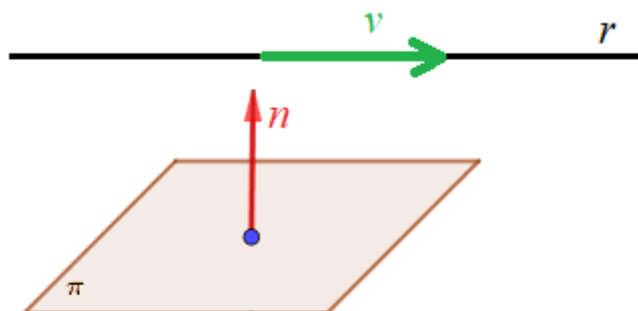
$$X = A^{-1} (3 \cdot I_2 - C^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left[3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2+0 & 2-0 \\ 2-2 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

4. Dado el plano $\pi : 5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta $r : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$, se pide

- a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
 b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r (1,25 puntos)

a) Para que la recta r sea paralela al plano debe cumplirse que el vector director de la recta y el normal del plano sean perpendiculares, es decir, que su producto escalar sea nulo. Y además, que ningún punto de la recta esté en el plano.



Hallamos el vector normal del plano y el director de la recta.

$$\pi : 5x + ay + 4z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (5, a, 4)$$

$$r : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 2, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 6, -4) \end{cases}$$

Hacemos cumplir la condición de que su producto escalar es nulo: $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (5, a, 4) \\ \vec{v}_r = (2, 6, -4) \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (5, a, 4)(2, 6, -4) = 0 \Rightarrow 10 + 6a - 16 = 0 \Rightarrow 6a = 6 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

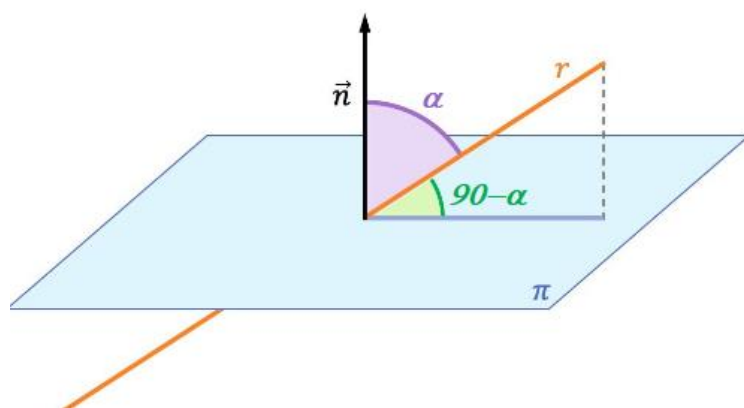
Comprobamos que el punto $P_r(0, 2, 2)$ no pertenece al plano $\pi : 5x + y + 4z - 5 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(0, 2, 2) \in \pi? \\ \pi : 5x + y + 4z - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 + 2 + 8 - 5 = 0?$$

La igualdad no es cierta. Recta y plano son paralelos para $a = 1$.

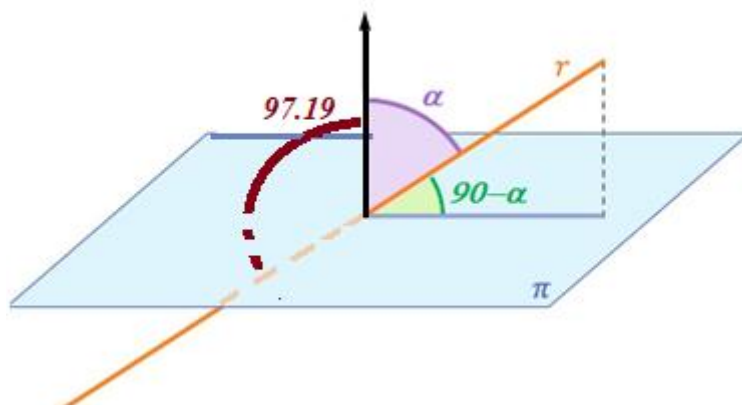
b) Para $a = 0$ recta y plano no son paralelos y deben ser secantes. Hallamos el ángulo que forman recta y plano hallando previamente el ángulo que forman vector normal del plano y vector director de la recta.

Para $a = 0$ tenemos que $\pi : 5x + 4z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (5, 0, 4)$.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (5, 0, 4) \\ \vec{v}_r = (2, 6, -4) \\ \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{(5, 0, 4)(2, 6, -4)}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 4^2} \sqrt{2^2 + 6^2 + (-4)^2}} = \frac{10 - 16}{\sqrt{41} \sqrt{56}} = \frac{-6}{\sqrt{41} \sqrt{56}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{41} \sqrt{56}}\right) \approx 97.1933^\circ$$



Como el ángulo obtenido es mayor de 90° el ángulo que aparece en el dibujo superior formado entre recta y vector normal del plano será $180^\circ - 97.1933^\circ = 82.8067^\circ$.

El ángulo entre recta y plano será $90^\circ - 82.8067^\circ = 7.1933^\circ$.

OPCIÓN B

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ se pide

- a) Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento (1,5 puntos)
 b) Calcular los máximos y mínimos relativos (1 punto)

a) Utilizamos la derivada para buscar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2} - x^2 \cdot 2xe^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{(1-x^2)2xe^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{2x(1-x^2)}{e^{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(1-x^2)}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow 2x(1-x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1} \\ \boxed{x = 0} \end{cases}$$

Existen tres puntos críticos: $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-4(1-(-2)^2)}{e^{(-2)^2}} = \frac{12}{e^4} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{-1(1-(-0.5)^2)}{e^{(-0.5)^2}} = \frac{-0.75}{e^{0.5^2}} < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

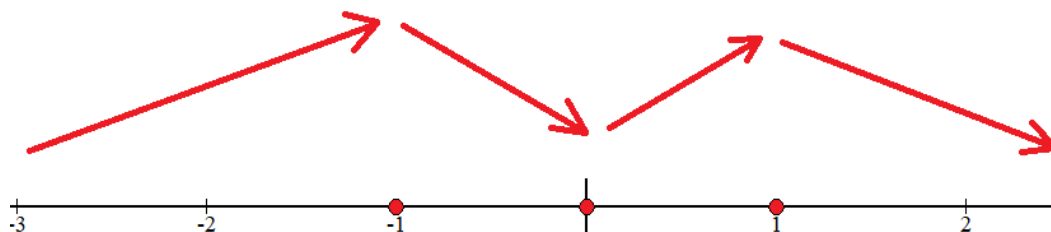
$$f'(0.5) = \frac{1(1-0.5^2)}{e^{0.5^2}} = \frac{0.75}{e^{0.5^2}} > 0. \text{ La función crece en } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{4(1-2^2)}{e^{2^2}} = \frac{-12}{e^4} < 0.$

La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y decrece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

b) Por el estudio anterior sabemos que la función sigue el esquema del dibujo.



La función tiene un máximo relativo en $x = -1$ y otro en $x = 1$. Como $f(-1) = \frac{(-1)^2}{e^{(-1)^2}} = \frac{1}{e}$ y

$f(1) = \frac{1^2}{e^{1^2}} = \frac{1}{e}$ los máximos relativos tienen coordenadas $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ y $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$. Como $f(0) = \frac{0^2}{e^{0^2}} = \frac{0}{1} = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$.

2. Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:

$$y = 3x ; \quad y = x ; \quad y = -x + 8 ; \quad x = 3 \quad (2,5 \text{ puntos})$$

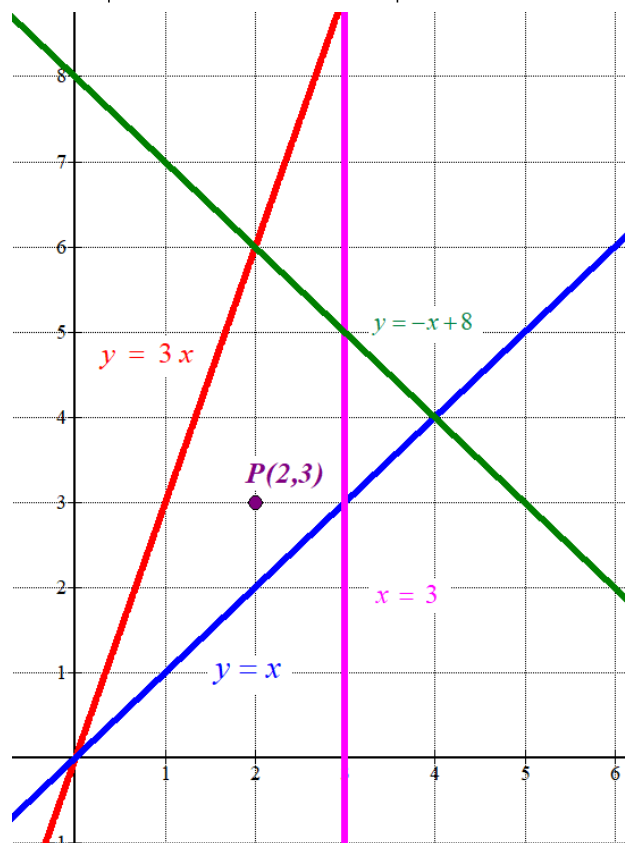
Dibujamos las rectas que delimitan la región.

x	$y = 3x$
0	0
2	6

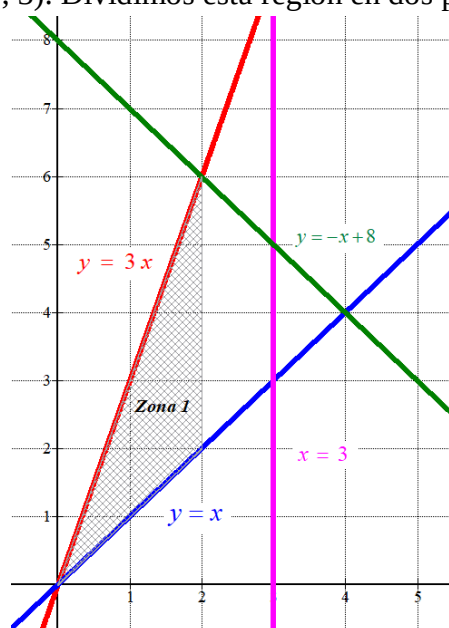
x	$y = x$
0	0
3	3

x	$y = -x + 8$
0	8
2	6

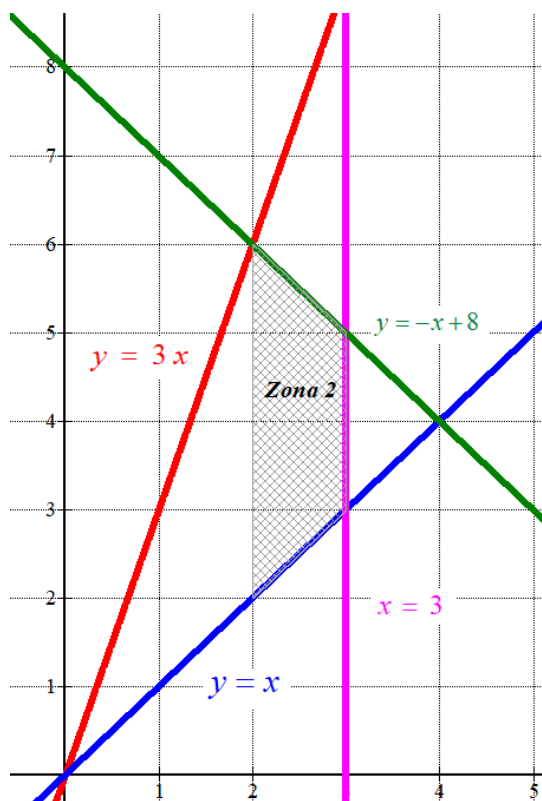
$x = 3$	y
3	0
3	3



La región del plano limitada por las rectas del ejercicio es la región donde se encuentra el punto $P(2, 3)$. Dividimos esta región en dos partes y calculamos el área de cada una de ellas.

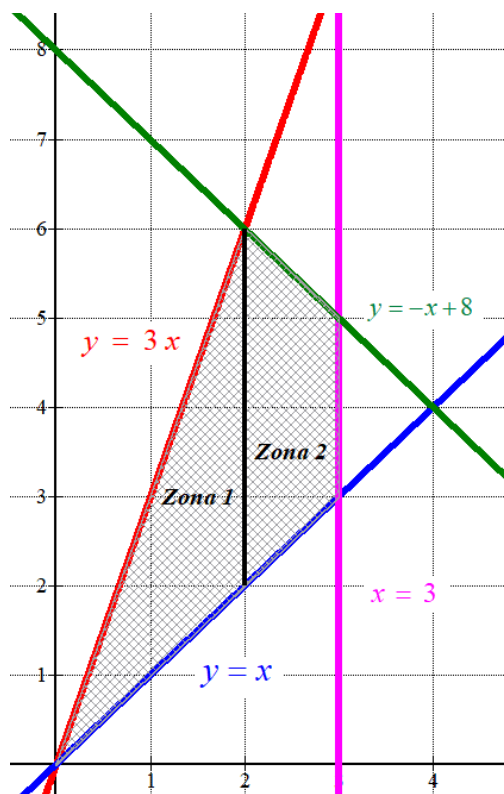


$$\text{Área 1} = \int_0^2 3x - x dx = \int_0^2 2x dx = \left[x^2 \right]_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4 \text{ u}^2$$



$$\text{Área 2} = \int_2^3 -x + 8 - x dx = \int_2^3 -2x + 8 dx = \left[-x^2 + 8x \right]_2^3 = (-3^2 + 8 \cdot 3) - (-2^2 + 8 \cdot 2) = 3 \text{ u}^2$$

El área de la región limitada por las rectas es la suma de las dos áreas obtenidas.



$$\text{Área} = \text{Área 1} + \text{Área 2} = 4 + 3 = 7 \text{ unidades cuadradas.}$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 1 \\ kx + 2y - z = -2 \\ y - 3z = -3 \end{cases}$$

a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k

(1,5 puntos)

b) Resolverlo para $k = 2$

(1 punto)

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ k & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 0 + k^2 - 0 + 3k + 2 = k^2 + 3k - 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 10 = 0 \Rightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-3+7}{2} = \boxed{2=k} \\ \frac{-3-7}{2} = \boxed{-5=k} \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $k \neq 2$ y $k \neq -5$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y el de A/B con el método de Gauss.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ 2 \quad 2 \quad -1 \quad -2 \\ -2 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad 1 \quad 2 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k = -5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y el de A/B con el método de Gauss.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -10 \quad 4 \quad -2 \quad -4 \\ 10 \quad 5 \quad -25 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 9 \quad -27 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 9 & -27 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 9 \quad -27 \quad -27 \\ 0 \quad -9 \quad 27 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -28 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad 1 \quad -5 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 9 \quad -27 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad -28 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Como tienen rangos distintos el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq 2$ y $k \neq -5$ el sistema es compatible determinado, si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado y si $k = -5$ el sistema es incompatible.

- b) Para $k = 2$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la expresión de sus soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ y - 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + 2z = 1 \\ y - 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + 2z = 1 \\ y = -3 + 3z \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 3 + 3z + 2z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 5z = 4 \Rightarrow 2x = 4 - 5z \Rightarrow \boxed{x = 2 - \frac{5}{2}z} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{2}\lambda \\ y = -3 + 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 2 - \frac{5}{2}\lambda \\ y = -3 + 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

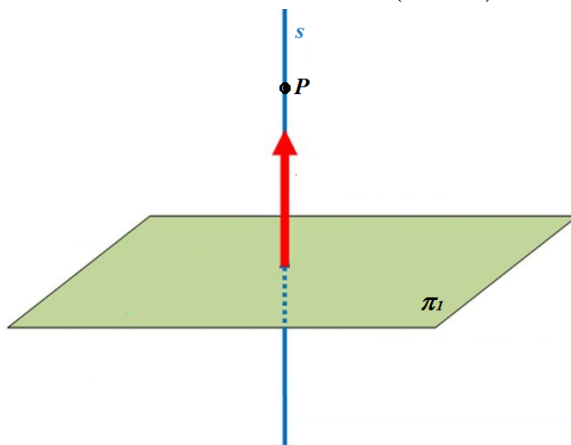
4. Dados los planos: $\pi_1 : x - y + 3 = 0$; $\pi_2 : 2x + y - z = 0$, determinar

a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2,2,1)$. (1 punto)

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1,1,-1)$ (1,5 puntos)

a) La recta perpendicular a π_1 tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi_1 : x - y + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 0)$$

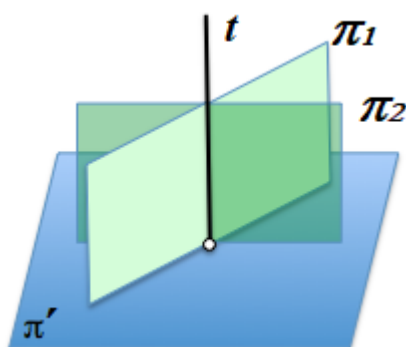


Hallamos la ecuación de la recta s que tiene como vector director $\vec{v}_s = \vec{n}_1 = (1, -1, 0)$ y pasa por el punto $P(2,2,1)$.

$$s : \begin{cases} \vec{v}_s = \vec{n}_1 = (1, -1, 0) \\ P(2, 2, 1) \in s \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) El plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 tiene como vector normal el vector director de dicha recta.

Hallamos la ecuación de la recta t determinada por la intersección de los dos planos.



$$\begin{cases} \pi_1 : x - y + 3 = 0 \\ \pi_2 : 2x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = y \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + x + 3 - z = 0 \Rightarrow 3x + 3 = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_t = (1, 1, 3)$$

Determinamos la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,-1)$ y tiene vector normal $\vec{u}_t = (1, 1, 3)$.

$$\begin{cases} A(1, 1, -1) \in \pi' \\ \vec{n} = \vec{u}_t = (1, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi' : x + y + 3z + D = 0 \\ A(1, 1, -1) \in \pi' \end{cases} \Rightarrow 1 + 1 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi' : x + y + 3z + 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi' : x + y + 3z + 1 = 0$.