



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2017–2018**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(3)

Convocatoria:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1.- Tenemos que hacer dos cuadrados de tela donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm? (2.5 puntos)

2.- Determinar una matriz X que verifique la ecuación

$$AB - CX = I$$

siendo las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

3.- Estudiar la posición relativa de los planos

$$\alpha : 2x + 3y - 5z + 7 = 0$$

$$\beta : 3x + 2y + 3z - 1 = 0 \quad (2.5 \text{ puntos})$$

$$\gamma : 7x + 8y - 7z + 13 = 0$$

4.- Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y el 10% de los que se fabrican en la C.

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso? (1,25 puntos)

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C? (1,25 puntos)



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2017–2018**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(3)

Convocatoria:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN B

1.- Determinar los valores de a y b para que la función $f(x) = a\sqrt{3x+3} + b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto $(2,8)$ (2,5 puntos)

2.- Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + ky + z = 2 \\ x + y + kz = k - 1 \end{array} \right\}$$

- a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k (1,5 puntos)
b) Resolver el sistema para $k = 1$ (1 punto)

3.- Dadas las rectas $r_1 \equiv x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x + 5}{4} = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z + 4}{3}$, se pide

- a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias. (1,25 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano que determinan. (1,25 puntos)

4.- El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso de televisión:

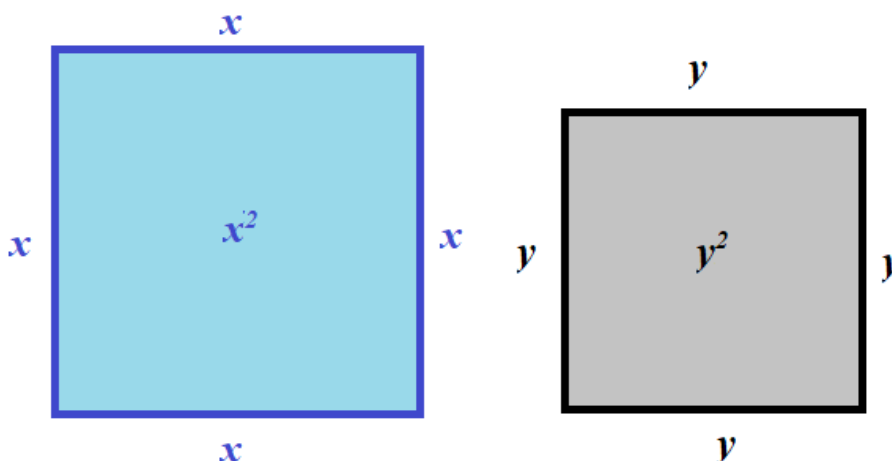
- a) Tres o menos personas. (1,5 puntos)
b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado. (1 punto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- Tenemos que hacer dos cuadrados de tela donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm? (2.5 puntos)

Tenemos que hacer dos cuadrados de lados “x” e “y”.



La suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm $\rightarrow 4x + 4y = 100$.

Despejamos “y” en la ecuación anterior $\rightarrow x + y = 25 \rightarrow y = 25 - x$.

Debemos de hacer mínimo el coste total de los dos cuadrados de tela.

La suma de los precios de los cuadrados de tela es $C(x, y) = 2x^2 + 3y^2$.

Utilizamos la igualdad anterior y obtenemos el coste en función de la variable “x”.

$$\left. \begin{array}{l} C(x, y) = 2x^2 + 3y^2 \\ y = 25 - x \end{array} \right\} \Rightarrow C(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2 = 2x^2 + 3(625 + x^2 - 50x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = 2x^2 + 1875 + 3x^2 - 150x \Rightarrow \boxed{C(x) = 5x^2 - 150x + 1875}$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} C'(x) = 10x - 150 \\ C'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 10x - 150 = 0 \Rightarrow x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15$$

Hemos obtenido el valor $x = 15$ como punto crítico de la función. Sustituimos este valor en la segunda derivada para ver si es un mínimo.

$$C''(x) = 10 \Rightarrow C''(15) = 10 > 0 \Rightarrow x = 15 \text{ es mínimo!}$$

Al ser la segunda derivada negativa para $x = 15$ la función coste tiene un mínimo en dicho valor.

Para $x = 15$ el lado del otro cuadrado es $y = 25 - 15 = 10$.

Para que el coste de la tela sea mínimo los cuadrados deben elegirse de lados 15 y 10 cm.

2.- Determinar una matriz X que verifique la ecuación

$$AB - CX = I$$

siendo las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Despejamos X en la ecuación matricial (suponemos que la matriz C es invertible).

$$AB - CX = I \Rightarrow -CX = I - AB \Rightarrow CX = AB - I \Rightarrow X = C^{-1}(AB - I)$$

Hallamos la matriz inversa de C y sustituimos el valor de las matrices en la ecuación matricial para obtener la expresión de X .

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^t)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1}(AB - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2+0-2 & 4+10+1 \\ 4+0+2 & 8-20-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 6 & -13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 6 & -14 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+0 & 15+0 \\ -1+12 & 15-28 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 15/2 \\ 11/2 & -13/2 \end{pmatrix}$$

3.- Estudiar la posición relativa de los planos

$$\alpha : 2x + 3y - 5z + 7 = 0$$

$$\beta : 3x + 2y + 3z - 1 = 0$$

$$\gamma : 7x + 8y - 7z + 13 = 0$$

(2.5 puntos)

Analizamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 5z = -7 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 7x + 8y - 7z = -13 \end{array} \right\}$$

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos el valor del determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix} = -28 + 63 - 120 + 70 + 63 - 48 = 0$$

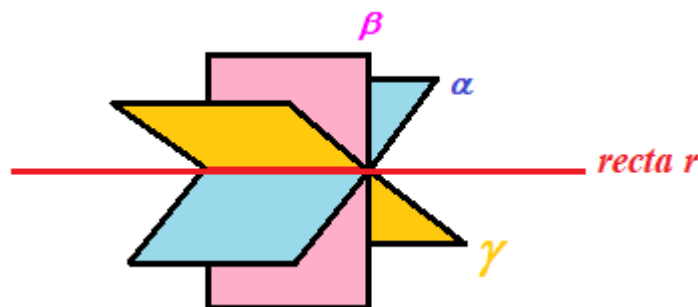
Al ser el determinante nulo el rango de la matriz A no es 3. Comprobamos que es 2 tomando el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5 \neq 0$.

El rango de la matriz A es 2.

Averiguamos el rango de A/B. Como el determinante de A es nulo consideramos el menor de

orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & -7 & -13 \end{vmatrix} = -117 - 40 + 98 + 168 - 130 + 21 = 0$

Al ser este determinante nulo el rango de la matriz ampliada A/B es menor de 3 y será 2 igual que el rango de la matriz de coeficientes A. Rango A = Rango A/B = 2 < 3 = N° incógnitas. Este sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones son los puntos de una recta donde coinciden los tres planos.

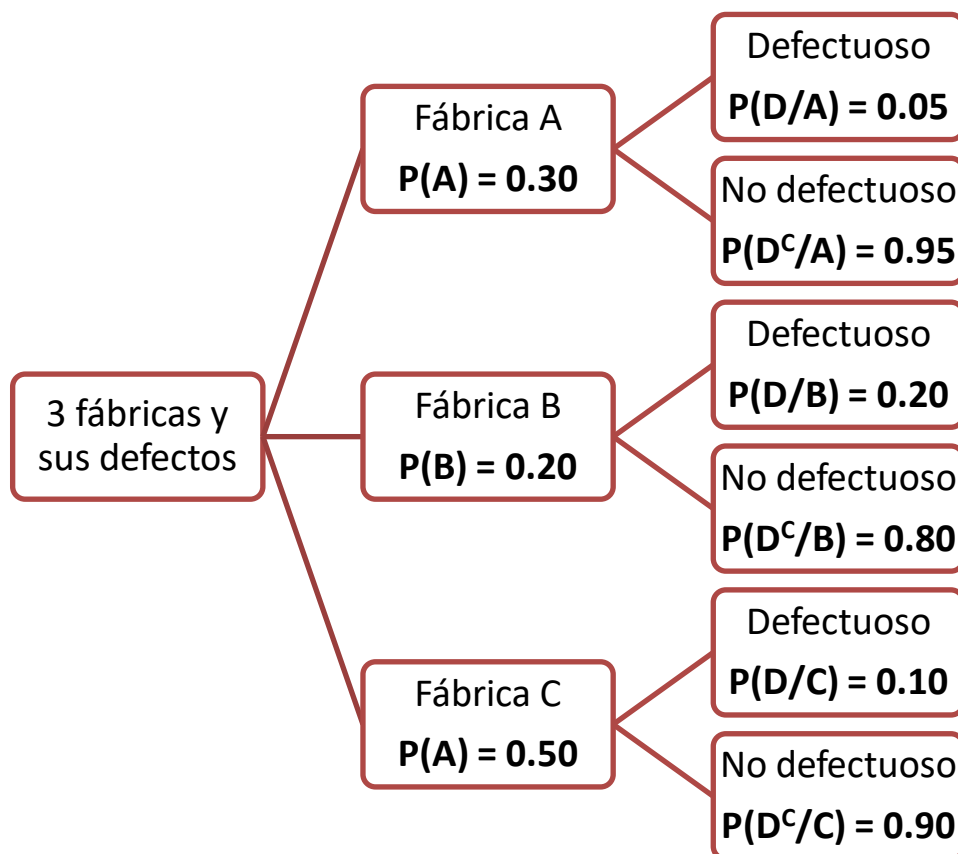


4.- Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y el 10% de los que se fabrican en la C.

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso? (1,25 puntos)

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C? (1,25 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol. Llamamos A, B y C al suceso elegir un motor de la fábrica A, B y C, respectivamente. Llamamos D al suceso “el motor es defectuoso”.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.20 + 0.5 \cdot 0.10 = \boxed{0.105}
 \end{aligned}$$

b) Nos piden calcular $P(C^c/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes para calcular el suceso contrario $P(C/D)$.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.105} = \frac{10}{21}$$

$$\text{Calculamos lo pedido} \rightarrow P(C^c/D) = 1 - P(C/D) = 1 - \frac{10}{21} = \boxed{\frac{11}{21} \approx 0.5238}$$

OPCIÓN B

1.- Determinar los valores de a y b para que la función $f(x) = a\sqrt{3x+3} + b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto $(2,8)$ (2,5 puntos)

Si la función tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 8)$ se debe cumplir que $f(2) = 8$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= a\sqrt{3x+3} + b\sqrt{x-1} \\ f(2) &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 = a\sqrt{3 \cdot 2 + 3} + b\sqrt{2-1} \Rightarrow \boxed{8 = 3a + b}$$

Si la función tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 8)$ se debe cumplir que se anule la segunda derivada para $x = 2$.

$$f'(x) = a \frac{3}{2\sqrt{3x+3}} + b \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3a}{2} (3x+3)^{-1/2} + \frac{b}{2} (x-1)^{-1/2} \Rightarrow \left\{ -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{3a}{2} \frac{-1}{2} \frac{(3x+3)^{-3/2} \cdot 3}{-3/2} + \frac{b}{2} \frac{-1}{2} \frac{(x-1)^{-3/2}}{-3/2} = \frac{-3a}{4} \frac{(3x+3)^{-3/2} \cdot 6}{-3} - \frac{2b}{4} \frac{(x-1)^{-3/2}}{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-18a(3x+3)^{-3/2}}{-12} - \frac{2b(x-1)^{-3/2}}{-12} = \frac{3a}{2(3x+3)^{3/2}} + \frac{b}{6(x-1)^{3/2}}$$

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= \frac{3a}{2(3x+3)^{3/2}} + \frac{b}{6(x-1)^{3/2}} \\ f''(2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3a}{2(3 \cdot 2 + 3)^{3/2}} + \frac{b}{6(2-1)^{3/2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{2\sqrt{(3 \cdot 2 + 3)^3}} + \frac{b}{6\sqrt{(2-1)^3}} = 0 \Rightarrow \frac{3a}{54} + \frac{b}{6} = 0 \Rightarrow 3a + 9b = 0 \Rightarrow \boxed{a + 3b = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} 3a + b &= 8 \\ a + 3b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3a + b &= 8 \\ a &= -3b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3(-3b) + b = 8 \Rightarrow -9b + b = 8 \Rightarrow -8b = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{8}{-8} = -1} \Rightarrow \boxed{a = -3(-1) = 3}$$

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + ky + z = 2 \\ x + y + kz = k - 1 \end{array} \right\}$$

a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k

(1,5 puntos)

b) Resolver el sistema para $k = 1$

(1 punto)

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & k & k-1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 + 1 + 2 - k - 2k - 1 = k^2 - 3k + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = k \\ \frac{3-1}{2} = 1 = k \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $k \neq 1$ y $k \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y el de A/B con el método de Gauss.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right\}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y el de A/B con el método de Gauss.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right\}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $k = 2$ el sistema es incompatible.

- b) Para $k = 1$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la expresión de sus soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ -y-z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ \boxed{-2-z=y} \end{array} \right\} \Rightarrow x-2-z+z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=2 \\ y=-2-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

3.- Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$, se pide

- a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias. (1,25 puntos)
 b) Hallar la ecuación del plano que determinan. (1,25 puntos)

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = (1, -1, 2) \\ P_1(1, 1, -2) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 = (4, -2, 3) \\ Q_2(-5, 3, -4) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes: $\begin{cases} \vec{u}_1 = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_2 = (4, -2, 3) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{3}$

Las rectas se cortan o cruzan. Comprobamos si el producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$ es nulo o no.

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_2 = (4, -2, 3) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (-5, 3, -4) - (1, 1, -2) = (-6, 2, -2) \end{cases} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = 4 + 18 + 16 - 24 - 8 - 6 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan, lo que significa que coinciden en un punto y pertenecen al mismo plano.

- b) El plano π que determinan ambas rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene, por ejemplo, al punto $P_1(1, 1, -2)$ de la recta r_1 .

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_1 = (1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{v}_2 = (4, -2, 3) \\ P_1(1, 1, -2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(x-1) + 8(y-1) - 2(z+2) + 4(z+2) - 3(y-1) + 4(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + 3 + 8y - 8 - 2z - 4 + 4z + 8 - 3y + 3 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: x + 5y + 2z - 2 = 0}$$

El plano que contiene las dos rectas tiene ecuación $\pi: x + 5y + 2z - 2 = 0$.

- 4.- El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso de televisión:
- a) Tres o menos personas. (1,5 puntos)
- b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado. (1 punto)

Es un problema de distribución binomial.

X = Número de personas que estuvieron viendo el concurso de televisión de un grupo de 10.

La probabilidad de que una persona haya estado viendo el concurso es $p = 0.30$. El número de repeticiones es $n = 10$. $X = B(10, 0.3)$

a) Nos piden calcular $P(X \leq 3)$.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \\
 &= \binom{10}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^{10} + \binom{10}{1} 0.3^1 \cdot 0.7^9 + \binom{10}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^8 + \binom{10}{3} 0.3^3 \cdot 0.7^7 = \\
 &= 0.7^{10} + 10 \cdot 0.3 \cdot 0.7^9 + 45 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^8 + 120 \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^7 = \boxed{0.6496}
 \end{aligned}$$

b) Nos piden calcular $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0.7^{10} = \boxed{0.0282}$$