

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EXAMEN Nº páginas: 3 (tabla adicional)
---	---	---	---

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los ejercicios se puntuará sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0,8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen

$|MA|=2$ y $|M+B|=3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz. (2 puntos)

E3.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x+2 = y = z-2$ y el plano $\pi \equiv x-z+2=0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π . (0,8 puntos)

b) Calcular el punto simétrico del punto $P = (-2,0,2)$ de la recta r respecto de π y hallar la recta simétrica de r respecto del plano π . (1,2 puntos)

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x-1 = \frac{y+1}{2} = z-1$ y el plano $\pi \equiv x-y+z=0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π . (0,8 puntos)

b) Calcular la distancia del plano π al punto $(1, -1, 1)$ de la recta r y hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π . (1,2 puntos)

E5. (Análisis)

Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula. (Téngase en cuenta la monotonía de la función y los valores que toma en los extremos relativos previamente calculados). **(2 puntos)**

E6. (Análisis)

Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$, determínese su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = x \cos x$.

a) Demostrar que $f(x)$ es no negativa en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(0,8 puntos)**

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las x , cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(1,2 puntos)**

E8. (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30% de los casos legales y gana en los tribunales el 60% de los casos presentados, el bufete B recibe el 50% de los casos legales y gana el 80% de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20% de los casos legales y gana el 70% de los casos presentados.

a) Se consideran los sucesos A = “caso adjudicado al bufete A”, B = “caso adjudicado al bufete B”, C = “caso adjudicado al bufete C”, G = “caso ganado”. Deduzca del enunciado los valores de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(G/A)$, $P(G/B)$, $P(G/C)$. **(0,5 puntos)**

b) Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales. Determine la probabilidad de que la empresa gane el caso. **(0,5 puntos)**

c) Si se ha ganado el caso elegido, calcule la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A. **(1 punto)**

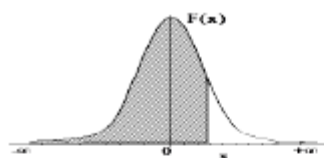
E10.- (Probabilidad y Estadística)

La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país.

(2 puntos)

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)****a)** Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right\}$$

(1,2 puntos)**b)** Resolverlo para $\lambda=1$.**(0,8 puntos)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Veamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 - 1 + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = \lambda \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = \lambda \end{cases}$$

Existen tres situaciones diferentes y que estudiamos por separado.

CASO 1. $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de A/B y el número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

CASO 2. $\lambda = 1$

El determinante de la matriz A es nulo, por lo que su rango no es 3.

Al sustituir el valor de λ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, si tomamos el menor que

resulta de quitar la 3ª fila y 3ª columna su determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Por lo que el rango de A es 2.

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sólo se ha añadido una 4ª columna igual que

la 3ª, por lo que el rango de A/B es igual al rango de A.

$$\text{Rango de A} = \text{Rango de A/B} = 2 < \text{Número de incógnitas} = 3.$$

El sistema tiene infinitas soluciones, es **compatible indeterminado**.

CASO 3. $\lambda = -2$

El determinante de la matriz A es nulo, por lo que su rango no es 3.

Al sustituir el valor de λ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, si tomamos el menor que

resulta de quitar la 3ª fila y 3ª columna su determinante es $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Por lo que el rango de A es 2.

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que

resulta de quitar la 1ª columna y comprobamos si su determinante es nulo o no,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 2 - 1 = 1 \neq 0, \text{ por lo que el rango de } A/B \text{ es igual a } 3.$$

Como el Rango de A es 2 y el de A/B es 3, son distintos y el sistema es **incompatible**.

OTRA FORMA DE DISCUTIR EL CASO 3 (GAUSS)

También se podría proceder resolviendo el sistema y sería:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} -2x + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + 2y - 4z = 2 \\ -2x + z = 1 \\ \hline 2y - 3z = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 1^a \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ -2x + z = 1 \\ \hline -2y + 3z = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + z = 1 \\ 2y - 3z = 3 \\ -2y + 3z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -2y + 3z = 3 \\ 2y - 3z = 3 \\ \hline 0 = 6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + z = 1 \\ 2y + 3z = 3 \\ 0 = 6 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

La tercera ecuación es imposible y el sistema es incompatible.

b) Para $\lambda=1$ el sistema queda

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x + y + z = 1 \\ -x - z = 0 \\ \hline y = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrcr} x & -y & +z & = 1 \\ -x & & -z & = -1 \\ \hline & -y & & = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y = 0 \\ -y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = 0 \\ z = z \end{array} \right\}}$$

La solución es $x = 1 - t$, $y = 0$, $z = t$

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA| = 2$ y $|M + B| = 3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz. **(2 puntos)**

Con la primera condición $|MA| = 2$ obtenemos:

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+5 \\ a+2b & 2a+5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ a+2b & 2a+5b \end{pmatrix}$$

$$|MA| = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ a+2b & 2a+5b \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow 6a + 15b - 7a - 14b = 2 \Rightarrow -a + b = 2$$

Con la segunda condición $|M + B| = 3$ obtenemos:

$$M + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a+1 & b+1 \end{pmatrix}$$

$$|M + B| = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a+1 & b+1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow 2b + 2 - a - 1 = 3 \Rightarrow -a + 2b = 2$$

Combinamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ -a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a = 2 - b \\ -a = 2 - 2b \end{cases} \Rightarrow 2 - b = 2 - 2b \Rightarrow \boxed{b = 0} \Rightarrow -a + 0 = 2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Los valores buscados son $\boxed{a = -2 \text{ y } b = 0}$.

E3.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x+2 = y = z-2$ y el plano $\pi \equiv x-z+2=0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π .

(0,8 puntos)

b) Calcular el punto simétrico del punto $P = (-2,0,2)$ de la recta r respecto de π y hallar la recta simétrica de r respecto del plano π .

(1,2 puntos)

a) La recta es $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{1}$ tiene como vector director $\vec{v} = (1,1,1)$ y uno de sus

puntos es $P_r(-2,0,2)$. Su ecuación en paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.

El vector normal del plano $\pi \equiv x-z+2=0$ es $\vec{n} = (1,0,-1)$.

La posición relativa de recta y plano se obtiene a partir del vector director de recta y el normal del plano. Si forman 90° son paralelos o la recta está contenida en el plano y en caso de no ser 90° se cortan en un punto.

Realizamos el producto escalar de vector director y normal.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1,1,1) \\ \vec{n} = (1,0,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = (1,1,1)(1,0,-1) = 1-1=0$$

Recta y plano son paralelos o la recta está contenida.

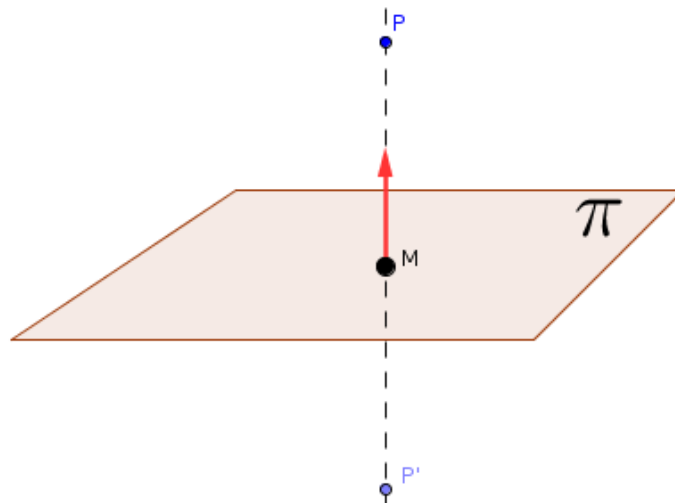
Veamos si un punto de la recta está en el plano. Probamos con $P_r(-2,0,2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(-2,0,2) \in \pi? \\ \pi \equiv x-z+2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -2-2+2=0? \text{ No es cierto, por lo que el punto de la recta no está}$$

en el plano y por tanto **la recta es paralela al plano**.

b) Para obtener el punto simétrico de uno dado respecto de un plano seguimos los pasos del dibujo.

Vamos a determinar la recta que pasa por el punto y es perpendicular al plano.



$$\left. \begin{array}{l} P(-2,0,2) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (1,0,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de la recta s y el plano (lo llamamos M) resolviendo el sistema formado por recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - z + 2 = 0 \\ x = -2 + \lambda \\ s \equiv y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + \lambda - 2 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2 + 1 = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda = 2 - 1 = 1 \end{array} \right\}$$

El punto M tiene coordenadas M(-1,0,1).

El punto simétrico P' está en la recta s y M es el punto medio del segmento PP'.

$$P' \in s \Rightarrow P'(-2 + \lambda, 0, 2 - \lambda)$$

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow (-1, 0, 1) = \frac{(-2, 0, 2) + (-2 + \lambda, 0, 2 - \lambda)}{2} \Rightarrow$$

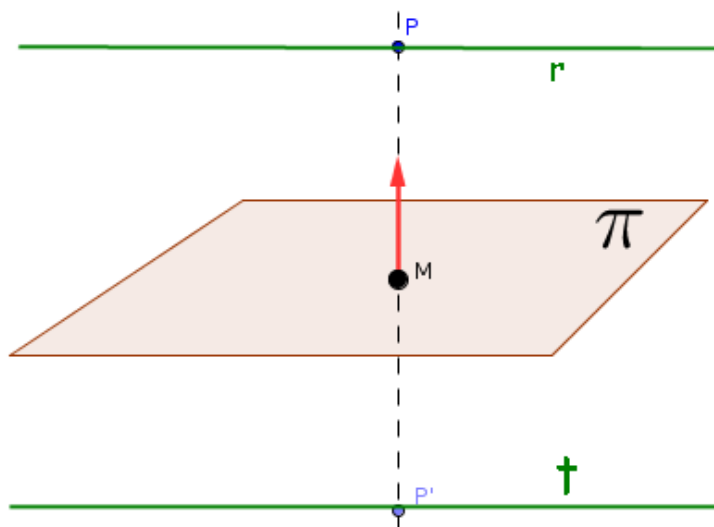
$$\Rightarrow (-2, 0, 2) = (-2, 0, 2) + (-2 + \lambda, 0, 2 - \lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2, 0, 2) - (-2, 0, 2) = (-2 + \lambda, 0, 2 - \lambda) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = -2 + \lambda \\ 0 = 0 \\ 0 = 2 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2 - \lambda \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\text{Por lo que tenemos } P'(-2 + \lambda, 0, 2 - \lambda) = \boxed{P'(0, 0, 0)}$$

El punto simétrico de P respecto del plano es $\boxed{P'(0, 0, 0)}$.

La recta simétrica t de r respecto del plano es una recta con el mismo vector director y que pasa por P'.



$$\left. \begin{array}{l} P'(0, 0, 0) \in t \\ \vec{v} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ t \equiv y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}}$$

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x-1 = \frac{y+1}{2} = z-1$ y el plano $\pi \equiv x-y+z=0$, se pide:

- a) Determinar la posición relativa de r y π . **(0,8 puntos)**
 b) Calcular la distancia del plano π al punto de la recta r , $(1, -1, 1)$ y hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π . **(1,2 puntos)**

a) La recta es $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ tiene como vector director $\vec{v} = (1, 2, 1)$ y uno de sus puntos

$$\text{es } P_r(1, -1, 1). \text{ Su ecuación en paramétricas es } \left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right\}.$$

El vector normal del plano $\pi \equiv x-y+z=0$ es $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

La posición relativa de recta y plano depende del vector director de recta y el normal del plano. Si forman 90° son paralelos o la recta está contenida en el plano y en caso de no ser 90° se cortan en un punto.

Realizamos el producto escalar de vector director y normal.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1, 2, 1) \\ \vec{n} = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = (1, 2, 1)(1, -1, 1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Veamos si un punto de la recta está en el plano. Probamos con $P_r(1, -1, 1)$.

$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(1, -1, 1) \in \pi? \\ \pi \equiv x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 + 1 + 1 = 0? \text{ No es cierto, por lo que el punto de la recta no está en el plano y por tanto la recta es paralela al plano.}$

b) La distancia de la recta al plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|1 + 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} u$$

Un plano π' paralelo a $\pi \equiv x - y + z = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv x - y + z + D = 0$.

Como $d(r, \pi') = d(r, \pi) = \sqrt{3}$ entonces.

$$d(r, \pi') = \sqrt{3} \Rightarrow d(P_r, \pi') = \frac{|1 + 1 + 1 + D|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \sqrt{3} \Rightarrow |1 + 1 + 1 + D| = \sqrt{3} \sqrt{3}$$

$$|3 + D| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 + D = 3 \Rightarrow D = 0, \text{ con este valor obtenemos el plano } \pi \\ \text{o} \\ -3 - D = 3 \Rightarrow -6 = D \end{cases}$$

El plano pedido es $\pi' \equiv x - y + z - 6 = 0$

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que (x) se anula. (Téngase en cuenta la monotonía de la función y los valores que toma en los extremos relativos previamente calculados).
(2 puntos)

La función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$ es un polinomio de grado 4.

Hallamos su derivada y la igualamos a cero.

$$f(x) = 3x^4 + x^3 - 1 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(4x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

La recta real se divide en 3 zonas: Antes de $x = -\frac{1}{4}$, entre $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 0$ y después de $x = 0$.

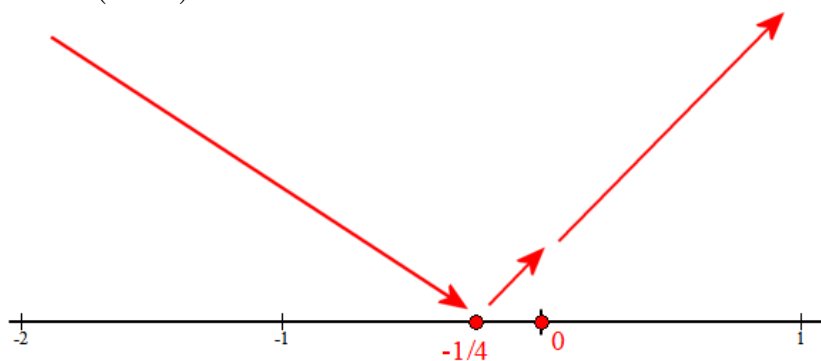
- En $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 12(-1)^3 + 3(-1)^2 = -12 + 3 = -9 < 0. \text{ Es negativa, luego la función decrece en } \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right).$$

- En $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ tomamos $x = -\frac{1}{8}$ y la derivada vale $f'\left(-\frac{1}{8}\right) = 12\left(-\frac{1}{8}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{8}\right)^2 = 0,02 > 0$.

Es positiva, luego la función crece en $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

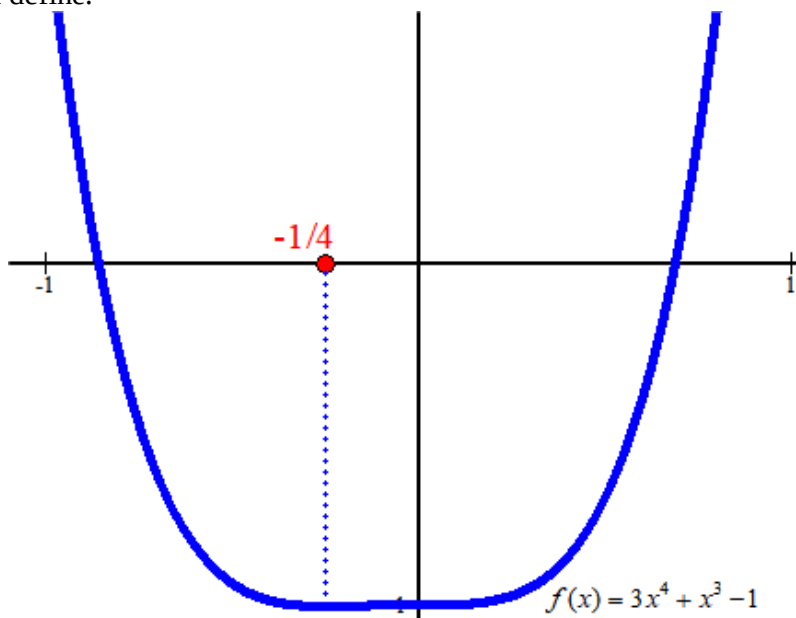
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 12 + 3 = 15 > 0$. Es positiva, luego la función crece en $(0, +\infty)$.



La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ y crece en $\left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup [0, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{4}$ y no presenta ningún máximo.

Para $x = -\frac{1}{4}$ la función vale $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^4 + \left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 1 = -1,003$. El punto mínimo tiene coordenadas $P\left(-\frac{1}{4}, -1.003\right)$.

Esta función es continua y su monotonía es como indica el gráfico superior. En el mínimo $x = -\frac{1}{4}$ alcanza un valor negativo y además para valores grandes es positiva $\rightarrow f(10) = 3 \cdot 10^4 + 10^3 - 1 > 0$, también para valores pequeños es positiva $\rightarrow f(-10) = 3(-10)^4 + (-10)^3 - 1 > 0$ por lo que la función tiene solo dos valores donde se anula, cuando puede tener hasta 4 por el grado del polinomio que la define.



E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = xe^{-x}$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

El **dominio de la función** $f(x) = xe^{-x}$ es todo $\mathbb{R}$, pues no presenta ningún problema al sustituir la "x" por ningún valor real. Dominio = $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical. No tiene, pues no tiene discontinuidades.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (Aplico L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \end{aligned}$$

Tiene una **asíntota horizontal** $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Veamos cuando $x \rightarrow -\infty$, pues en esa rama no tiene asíntota horizontal.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = e^{+\infty} = +\infty$$

No tiene asíntota oblicua.

Para crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.

$$f(x) = xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

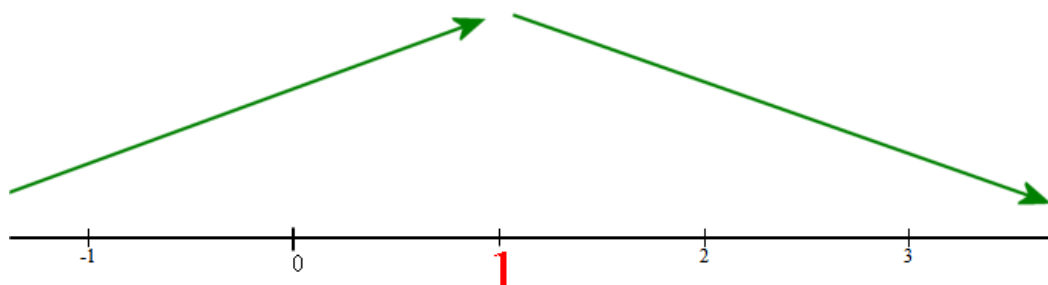
Igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 0 \\ e^{-x} = 0, \text{ Esto es imposible.} \end{cases}$$

La recta real se divide en dos partes, antes de 1 y después de 1.

En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = (1-0)e^{-0} = 1 > 0$. Es positiva, por lo que la función crece en $(-\infty, 1)$.

En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2} < 0$. Es negativa, por lo que la función decrece en $(1, +\infty)$.



La función **crece** en $(-\infty, 1)$ y **decrece** en $(1, +\infty)$. Tiene un **máximo** en $x = 1$.

Para la concavidad utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x) = (1-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (-2+x)e^{-x}.$$

Iguualamos a cero.

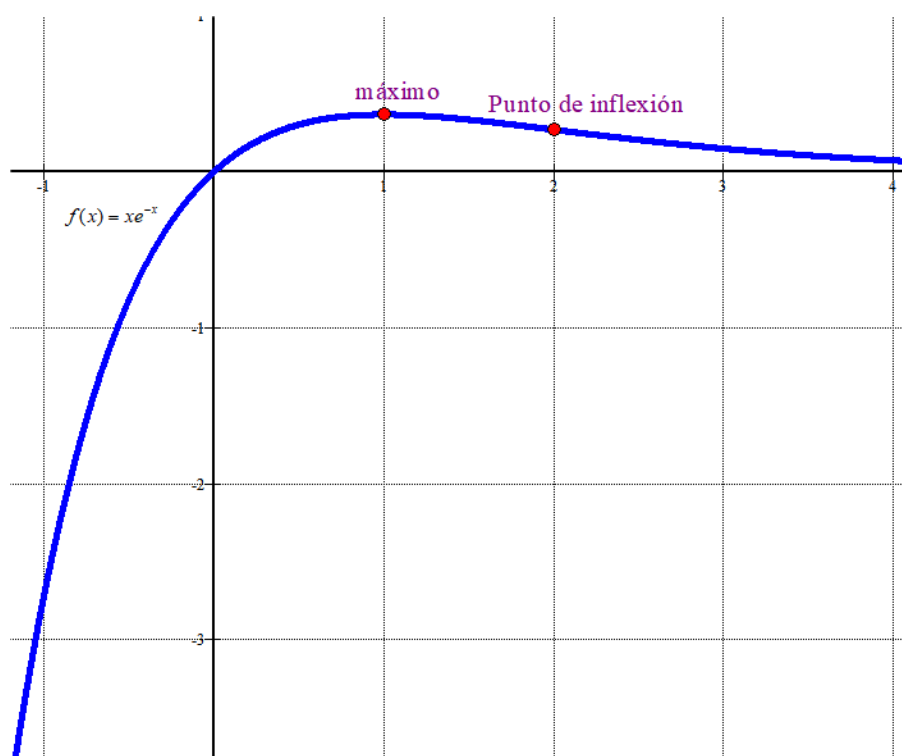
$$f''(x) = 0 \Rightarrow (-2+x)e^{-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2+x=0 \Rightarrow x=2 \\ e^{-x}=0, \text{ Esto es imposible} \end{cases}$$

$x=2$ es el posible punto de inflexión, veamos si cambia la curvatura de antes a después de $x=2$.

- En $(-\infty, 2)$ tomamos $x=0$ y la derivada segunda vale $f''(x) = (-2+0)e^{-0} = -2 < 0$. Es negativa, por lo que la función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f''(x) = (-2+3)e^{-3} = e^{-3} > 0$. Es positiva, por lo que la función es convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$.

Para esbozar la gráfica hallamos las coordenadas de algunos puntos de la función, antes de 1, en 1, en 2 y después de 2.

x	$y = xe^{-x}$
-1	$-e = -2,71$
0	0
1	$e^{-1} = 0,36$
2	$2e^{-2} = 0,27$
3	$3e^{-3} = 0,15$
4	$4e^{-4} = 0,073$



E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = x \cos x$.

a) Demuestre que $f(x)$ es no negativa en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(0,8 puntos)**

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las x , cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(1,2 puntos)**

a) Veamos el signo de la función en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En los extremos del intervalo: $f(0) = 0 \cos 0 = 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$. La función se anula en los extremos, pero en el interior del intervalo, ¿qué signo tiene?

Sabemos que la función $f(x) = x \cos x$ es positiva entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, pues el coseno es positivo en dicho intervalo y la “x” también, el producto de ambos también es positivo.

b) Hemos visto que la función corta al eje X en los extremos y que siempre es positiva, por lo que el área pedida es la integral definida entre los extremos del intervalo de la función.

$$\text{Área} = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

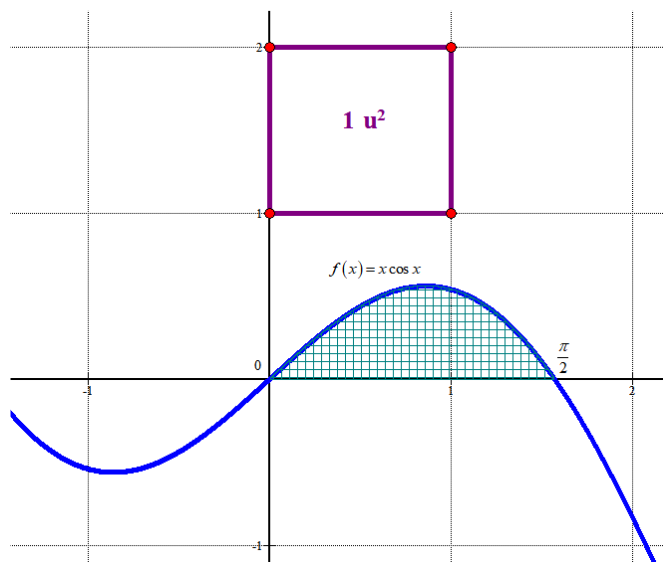
Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + K$$

El área valdrá:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \left[x \cdot \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \left[\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right] - [0 \cdot \sin 0 + \cos 0] = \frac{\pi}{2} - 1 = 0,57 u^2 \end{aligned}$$

Dibujamos la región para comprobar la validez del resultado.



E8.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)}$ (1 punto)

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ (1 punto)

a) Calculamos el valor del límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)} &= \frac{e^0 - \cos 0}{\ln(1+0)} = \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (Aplico L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{\frac{1}{1+x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)(e^x + \sin x) = (1+0)(e^0 + \sin 0) = \boxed{1} \end{aligned}$$

b) Calculamos la integral usando un cambio de variable.

$$\begin{aligned} \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \rightarrow dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{\cancel{x}} \cancel{x} dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos cambio} \\ \ln x = t \end{array} \right\} = \boxed{\frac{(\ln x)^3}{3} + K} \end{aligned}$$

E9- (Probabilidad y estadística)

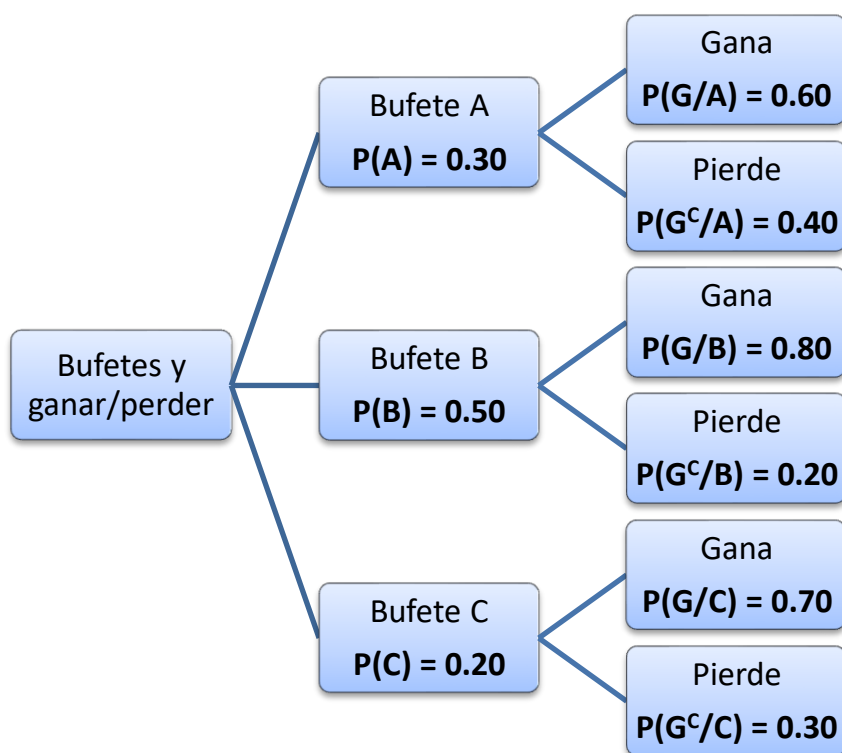
Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30% de los casos legales y gana en los tribunales el 60% de los casos presentados, el bufete B recibe el 50% de los casos legales y gana el 80% de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20% de los casos legales y gana el 70% de los casos presentados.

a) Se consideran los sucesos A = “caso adjudicado al bufete A”, B = “caso adjudicado al bufete B”, C = “caso adjudicado al bufete C”, G = “caso ganado”. Deduzca del enunciado los valores de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(G/A)$, $P(G/B)$, $P(G/C)$. **(0,5 puntos)**

b) Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales. Determine la probabilidad de que la empresa gane el caso. **(0,5 puntos)**

c) Si se ha ganado el caso elegido, calcule la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A. **(1 punto)**

a) Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(A)P(G/A) + P(B)P(G/B) + P(C)P(G/C) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.18 + 0.40 + 0.14 = \boxed{0.72}
 \end{aligned}$$

Tiene una probabilidad del 72 % de ganar el caso.

b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A)P(G/A)}{P(G)} = \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.72} = \frac{0.18}{0.72} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

E10.- (Probabilidad y estadística)

La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país. **(2 puntos)**

La variable aleatoria $X = \text{IMC}$ de una persona adulta de un determinado país sigue una distribución normal de media $\mu = 26$ y desviación típica $\sigma = 6$. $X = N(26, 6)$

Para calcular la probabilidad $P(X > 35)$, tipificamos la variable:

$$P(X > 35) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{35 - 26}{6}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$$

Consultando la tabla de la $N(0, 1)$

	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665
1,2	0,8849	0,8869
1,3	0,9032	0,9049
1,4	0,9192	0,9207
1,5	0,9332	0,9345
1,6	0,9452	0,9463
1,7	0,9554	0,9564

$$P(X > 35) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

La proporción de obesos en la población es de 6.68 %. Casi 7 personas obesas por cada 100 habitantes.