

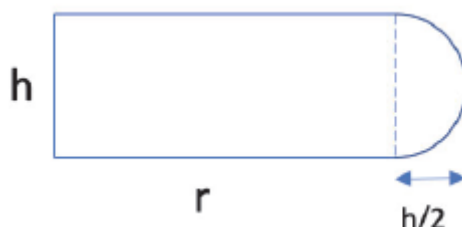
MODELO 1
Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2023/2024



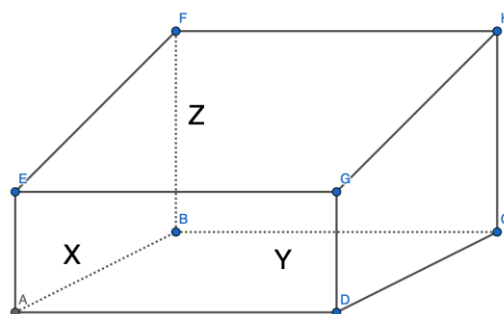
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Sólo se podrán utilizar calculadoras no programables y sin capacidad gráfica (tipos 1 y 2). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

- En una joyería hay 120 piezas de El Señor de los Anillos entre Anillos Únicos, Broches Hoja y Colgantes de Arwen. Sabemos que hay 20 Anillos menos que la suma de los Broches y los Colgantes. También sabemos que los Anillos y los Colgantes suman lo mismo que el número de Broches multiplicado por un número indeterminado ($t \in \mathbb{R}$).
 - [1,75 puntos]** Plantea el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema y estudia las soluciones dependiendo de los valores de t .
 - [0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $t = 4$, si es posible.
- Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados h , $r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



- [1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor h .
 - [1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer h y r para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?
- Para transportar a su mascota, Frank ha fabricado una caja, según se puede ver en la figura de la derecha. La parte de arriba de la caja viene definida por los puntos $E(3, 0, 2)$, $F(0, 0, 4)$, $G(3, a, b)$ y $H(0, 6, 4)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
 - [1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores a y b para que la parte de arriba de la caja forme un plano?
 - [1 punto]** Suponiendo que la parte de arriba de la caja es un plano, determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que los lados EG y GH formen un ángulo de 90° y E y G sean distintos.



4. a) [1 punto] Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ e^{x-a} & x \geq 1 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Estudia la continuidad de $f(x)$ e indica de qué tipo son sus discontinuidades (si las hubiera) para los distintos valores del parámetro a .

b) [1,5 puntos] Sean los planos $\pi_1 \equiv -x + y + 2z = 1$, $\pi_2 \equiv 2y + z = -1$. Determina la ecuación del plano perpendicular a los planos π_1 y π_2 y que pasa por el punto $A(0, 1, 1)$.

5. a) En el primer curso de un grado en ingeniería industrial los alumnos deben cursar una asignatura de estadística y otra de física. Se sabe que la probabilidad de que un alumno apruebe estadística es del 60 % mientras que la probabilidad de que apruebe física es del 50 %. Además, se sabe que la probabilidad de que aprueben las dos es del 40 %.

a.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe estadística o física?

a.2) [0,75 puntos] Si un alumno ha aprobado física, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado estadística?

b) En el huerto urbano "Turdus merula" producen compost para abonar los cultivos. Han observado que la cantidad de compost que se produce cada temporada sigue una distribución normal de media 40 kg y varianza 4 kg².

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que en una temporada se produzcan más de 43 kg de compost?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la cantidad exacta de compost que es menor que el 79.95 % más grande de las cantidades de compost producidas en otras temporadas?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

6. a) [1 punto] Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}}$$

b) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1} , razona por

qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

7. a) [1 punto] Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x} dx.$$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2) [0,75 puntos] ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

8. a) **[1,25 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz A

es invertible.

b) **[1,25 puntos]** Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2z = 1$, $\pi_2 \equiv b \cdot y + z = -1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Qué condición deben cumplir a, b para que los planos no sean perpendiculares?

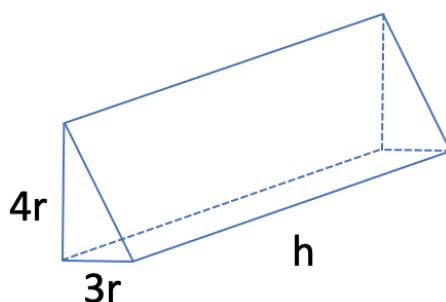
MODELO 2
Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2022/2023



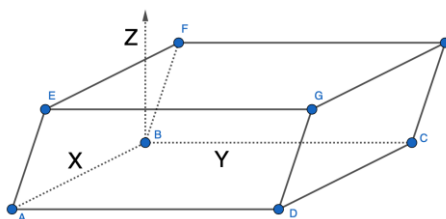
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda.
 - a) **[1,25 puntos]** Plantea el sistema de ecuaciones que permita determinar cuánto vale un lápiz, un cuaderno y una agenda.
 - b) **[1,25 puntos]** ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50? En caso de que se pueda, obtén los precios correspondientes. En caso de que no se puede, justifica por qué no.
2. Una carpintera debe diseñar una caja con forma de prisma de altura h y cuya base sea un triángulo rectángulo de base $3r$ y altura $4r$, tal y como se puede ver en la figura adjunta. Además, la carpintera debe asegurarse de que el área de la superficie sea de 36 cm^2 y su volumen lo mayor posible.



- a) **[1 punto]** Escribe el volumen de la caja en función del valor r .
 - b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer h y r para que el volumen de la caja sea lo mayor posible?
3. Un arquitecto desea diseñar un edificio con la forma de paralelepípedo que se ve en la figura de abajo.



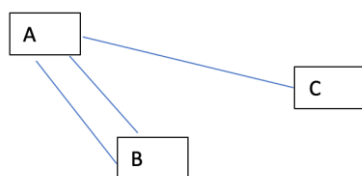
Sean los vectores $\overrightarrow{BA} = (a, b, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 80, 0)$ y $\overrightarrow{BF} = (0, 10, c)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Todos los valores están en metros.

- a) **[1 punto]** Según el diseño de la figura anterior, el vector $\overrightarrow{BA}$ ha de ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BF}$. ¿Qué deben cumplir los valores a, b, c para que esto ocurra?
- b) **[1,5 puntos]** Teniendo en cuenta las condiciones del apartado anterior, calcula los valores de a, b, c para que la longitud de A a B sea de 40 metros y el volumen del edificio sea de 3200 metros cúbicos.

4. a) Una fábrica posee dos robots (A y B) para soldar piezas en la línea de producción. El robot A procesa el 60 % de las piezas mientras que el robot B procesa el 40 % restante. El 10 % de las piezas procesadas por el robot A presenta algún defecto de soldadura mientras que el 5 % de las piezas procesadas por el robot B presenta algún defecto.
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza producida en esa línea de producción presente un defecto de soldadura?
- a.2) **[0,75 puntos]** Si una pieza se ha producido sin defectos, ¿cuál es la probabilidad de que la haya procesado el robot A?
- b) En un examen de oposición solamente el 30 % de los candidatos aprueba. Un tribunal evalúa a 6 opositores.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres opositores no aprueben?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un opositor apruebe?

n	k \ p	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
6	0	0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0001	0.0000
	1	0.3543	0.3932	0.3025	0.1866	0.0937	0.0369	0.0102	0.0015	0.0001
	2	0.0984	0.2458	0.3241	0.3110	0.2344	0.1382	0.0595	0.0154	0.0012
	3	0.0146	0.0819	0.1852	0.2765	0.3125	0.2765	0.1852	0.0819	0.0146
	4	0.0012	0.0154	0.0595	0.1382	0.2344	0.3110	0.3241	0.2458	0.0984
	5	0.0001	0.0015	0.0102	0.0369	0.0938	0.1866	0.3025	0.3932	0.3543
	6	0.0000	0.0001	0.0007	0.0041	0.0156	0.0467	0.1176	0.2621	0.5314

5. a) **[1 punto]** Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de la función $f(x) = 3x$ entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2$.
- b) **[1,5 puntos]** El grafo siguiente muestra las conexiones por carretera entre las poblaciones A, B y C. Halla la matriz G asociada al grafo y calcula $G + G^2$. ¿Cuántas formas posibles existen para ir de A a C haciendo como máximo una escala (es decir, recorriendo un camino de dos aristas o menos)?



6. a) **[1 punto]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = 6x - 4$ y $g(x) = x^2 + 4$.
- b) **[1,5 puntos]** Sean el punto $A(2, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Calcula la distancia del punto A a la recta r .
7. a) **[1 punto]** Las ganancias (en millones de euros) de una empresa durante el primer año vienen dadas por la función $f(t) = 4 - t(1-t)e^{t^2}$, donde $t \in [0, 1]$ representa el tiempo en años. Sin calcularlo directamente, justifica que existe un extremo relativo en el período de tiempo $[0, 1]$. ¿Se trata de un ganancia máxima o mínima? ¿Por qué?
- b) En un concesionario de coches se sabe que la probabilidad de que un coche sea diésel es de 0.20 mientras que la de que sea de color rojo es de 0.10. Ambos sucesos son independientes.
- b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea diésel y de un color distinto al rojo?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea diésel o rojo?

8. a) **[1,25 puntos]** Calcula las matrices A y B que cumplen que $A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

b) **[1,25 puntos]** Determina el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{u} = (a, 1, 0)$ y $\vec{v} = (a, 0, 0)$ formen un ángulo de 45° . Supón también que $a \neq 0$.

SOLUCIONES**MODELO 1**

1. En una joyería hay 120 piezas de El Señor de los Anillos entre Anillos Únicos, Broches Hoja y Colgantes de Arwen. Sabemos que hay 20 Anillos menos que la suma de los Broches y los Colgantes. También sabemos que los Anillos y los Colgantes suman lo mismo que el número de Broches multiplicado por un número indeterminado ($t \in \mathbb{R}$).

a) **[1,75 puntos]** Plantea el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema y estudia las soluciones dependiendo de los valores de t .

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $t = 4$, si es posible.

a) Llamamos “x” al número de Anillos Únicos, “y” al número de Broches Hoja y “z” al número de Colgantes de Arwen.

“Hay 120 piezas en total” $\rightarrow x + y + z = 120$.

“Hay 20 Anillos menos que la suma de los Broches y los Colgantes” $\rightarrow x = y + z - 20$.

“los Anillos y los Colgantes suman lo mismo que el número de Broches multiplicado por un número indeterminado” $\rightarrow x + z = ty$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 120 \\ x = y + z - 20 \\ x + z = ty \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 120 \\ x - y - z = -20 \\ x - ty + z = 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -t & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & -1 & -1 & -20 \\ 1 & -t & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -t & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - t + 1 - 1 - t = -2 - 2t$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2 - 2t = 0 \Rightarrow -2 = 2t \Rightarrow \boxed{t = \frac{-2}{2} = -1}$$

Estudiamos por separado dos situaciones diferentes.

CASO 1. $t \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo, su rango es 3 al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $t = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y A/B.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila primera y tercera son iguales. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila tercera y la columna tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$. Como su determinante es no nulo el rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & -1 & -1 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La columna segunda y tercera son iguales. Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la segunda columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 120 \\ 1 & -1 & -20 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 20 + 120 + 120 + 0 + 20 = 240 \neq 0$. Como su determinante es no nulo el rango de A/B es 3.

El rango de A (2) y el rango de A/B (3). Los rangos son distintos. El sistema no tiene solución.

Resumiendo: Si $t \neq -1$ el problema tiene una única solución y si $t = -1$ el problema no tiene solución.

b) Para $t = 4$ el sistema tiene una única solución. Lo resolvemos.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x + y + z = 120 \\ x - y - z = -20 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

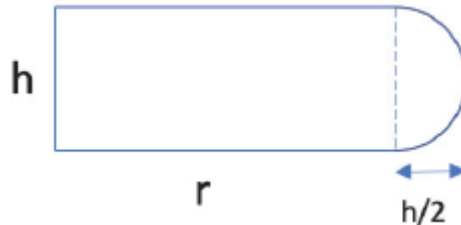
$$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ x - y - z = -20 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x & -4y & +z & = 0 \\ -x & -y & -z & = -120 \\ \hline & -5y & & = -120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x & -y & -z & = -20 \\ -x & -y & -z & = -120 \\ \hline & -2y & -2z & = -140 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ \Rightarrow -2y - 2z = -140 \\ -5y = -120 \rightarrow y = \frac{-120}{-5} = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 24 + z = 120 \\ -2 \cdot 24 - 2z = -140 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + z = 120 - 24 = 96 \\ \Rightarrow -2z = -140 + 48 \rightarrow z = \frac{-92}{-2} = 46 \end{cases} \Rightarrow x + 46 = 96 \Rightarrow x = 96 - 46 = 50$$

En la joyería hay 50 Anillos Únicos, 24 Broches Hoja y 46 Colgantes de Arwen.

2. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados h , $r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



- a) [1 punto] Escribe el área del aparcamiento en función del valor h .
 b) [1,5 puntos] ¿Cuánto deben valer h y r para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

- a) El perímetro de la figura es la suma de tres de los lados del rectángulo y la mitad del perímetro de la circunferencia de radio $h/2$. Este perímetro es la longitud de la valla (80 metros)

$$\text{Perímetro} = 2r + h + \frac{\cancel{2}\pi\frac{h}{\cancel{2}}}{\cancel{2}} = 2r + h + \frac{\pi h}{2} = 80 \Rightarrow 4r + 2h + \pi h = 160 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4r = 160 - (2 + \pi)h \Rightarrow r = \frac{160 - (2 + \pi)h}{4} = 40 - \frac{2 + \pi}{4}h$$

El área del aparcamiento es la suma del área del rectángulo y la mitad del área del círculo de radio $h/2$.

$$\text{Área} = hr + \frac{\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} = hr + \frac{\pi h^2}{8}$$

Reemplazamos en el área el valor de r por lo obtenido inicialmente y nos queda la función de la que deseamos hallar su máximo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área} = hr + \frac{\pi h^2}{8} \\ r = 40 - \frac{2 + \pi}{4}h \end{array} \right\} \Rightarrow A(h) = h\left(40 - \frac{2 + \pi}{4}h\right) + \frac{\pi h^2}{8} = 40h - \frac{2 + \pi}{4}h^2 + \frac{\pi}{8}h^2$$

$$A(h) = 40h + \frac{-4 - 2\pi}{8}h^2 + \frac{\pi}{8}h^2 = 40h + \frac{-4 - \pi}{8}h^2 = 40h - \frac{4 + \pi}{8}h^2$$

El área del aparcamiento en función del valor h tiene la expresión: $A(h) = 40h - \frac{4 + \pi}{8}h^2$

- b) Buscamos los puntos críticos de esta función usando la derivada.

$$\left. \begin{aligned} A'(h) &= 40 - \frac{4+\pi}{8} 2h = 40 - \frac{4+\pi}{4} h \\ A'(h) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 40 - \frac{4+\pi}{4} h = 0 \Rightarrow 40 = \frac{4+\pi}{4} h \Rightarrow 160 = (4+\pi) h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{160}{4+\pi} \simeq 22.4 \text{ metros}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para comprobar si es un máximo o un mínimo de la función $A(x)$.

$$A'(h) = 40 - \frac{4+\pi}{4} h \Rightarrow A''(h) = -\frac{4+\pi}{4} \Rightarrow A''(22.4) = -\frac{4+\pi}{4} < 0$$

Como la derivada segunda es negativa sabemos que la función tiene un máximo en

$$h = \frac{160}{4+\pi}.$$

El valor de r es:

$$r = 40 - \frac{2+\pi}{4} \left(\frac{160}{4+\pi} \right) = 40 - \frac{40(2+\pi)}{4+\pi} = \frac{160 + 40\pi - 80 - 40\pi}{4+\pi} = \frac{80}{4+\pi}$$

$r = \frac{80}{4+\pi} \simeq 11.2 \text{ metros}$

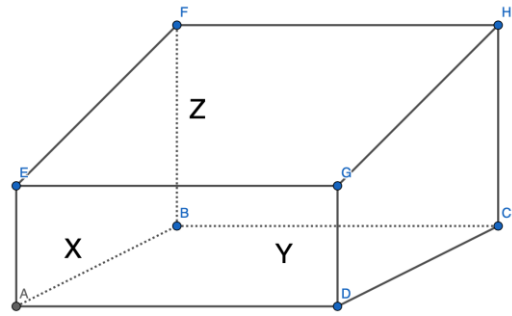
Resumiendo: El área del aparcamiento es máxima para $h = \frac{160}{4+\pi} \simeq 22.4 \text{ metros}$ y

$$r = \frac{80}{4+\pi} \simeq 11.2 \text{ metros}.$$

3. Para transportar a su mascota, Frank ha fabricado una caja, según se puede ver en la figura de la derecha. La parte de arriba de la caja viene definida por los puntos $E(3, 0, 2)$, $F(0, 0, 4)$, $G(3, a, b)$ y $H(0, 6, 4)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] ¿Qué deben cumplir los valores a y b para que la parte de arriba de la caja forme un plano?

b) [1 punto] Suponiendo que la parte de arriba de la caja es un plano, determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que los lados EG y GH formen un ángulo de 90° y E y G sean distintos.



a) Para que los puntos E, F, G y H formen un plano el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$ y $\overrightarrow{EH}$ debe ser nulo.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= (0, 0, 4) - (3, 0, 2) = (-3, 0, 2) \\ \overrightarrow{EG} &= (3, a, b) - (3, 0, 2) = (0, a, b-2) \\ \overrightarrow{EH} &= (0, 6, 4) - (3, 0, 2) = (-3, 6, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & a & b-2 \\ -3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$[\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EH}] = 0$$

$$\Rightarrow -6a + 0 + 0 + 6a + 0 + 18(b-2) = 0 \Rightarrow 18(b-2) = 0 \Rightarrow b-2 = 0 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

Para que la parte de arriba sea un plano debe ser $b = 2$. El valor de a puede ser cualquier valor real.

b) Suponemos que $b = 2$, por lo que los puntos son $E(3, 0, 2)$, $F(0, 0, 4)$, $G(3, a, 2)$ y $H(0, 6, 4)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Los vectores $\overrightarrow{EG}$ y $\overrightarrow{GH}$ deben formar un ángulo de 90° , es decir, deben ser perpendiculares, por lo que su producto escalar debe ser nulo $\rightarrow \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GH} = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{EG} &= (3, a, 2) - (3, 0, 2) = (0, a, 0) \\ \overrightarrow{GH} &= (0, 6, 4) - (3, a, 2) = (-3, 6-a, 2) \\ \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GH} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (0, a, 0) \cdot (-3, 6-a, 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + a(6-a) + 0 = 0 \Rightarrow a(6-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow G(3, 0, 2) = E \text{ ¡No válido!} \\ o \\ 6-a = 0 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \boxed{G = (3, 6, 2)} \end{cases}$$

Para $a = 6$ y $b = 2$ la parte de arriba es plana y los lados EG y GH forman un ángulo de 90° , siendo E y G distintos.

4. a) [1 punto] Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ e^{x-a} & x \geq 1 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Estudia la continuidad de $f(x)$ e indica de qué tipo son sus discontinuidades (si las hubiera) para los distintos valores del parámetro a .

b) [1,5 puntos] Sean los planos $\pi_1 \equiv -x + y + 2z = 1$, $\pi_2 \equiv 2y + z = -1$. Determina la ecuación del plano perpendicular a los planos π_1 y π_2 y que pasa por el punto $A(0, 1, 1)$.

a) En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es $f(x) = x^2 + 1$. Es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es $f(x) = e^{x-a}$. Es una función exponencial y por tanto continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

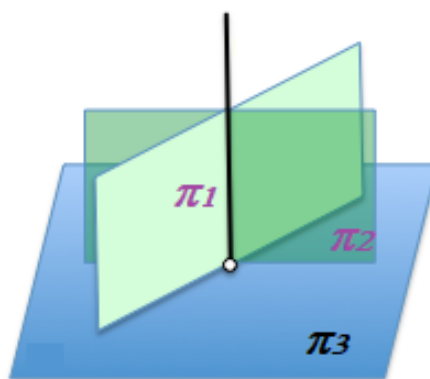
- Existe $f(1) = e^{1-a}$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{x-a} = e^{1-a}$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow e^{1-a} = 2 \Rightarrow \ln e^{1-a} = \ln 2 \Rightarrow 1-a = \ln 2 \Rightarrow \boxed{1 - \ln 2 = a}$

Conclusión: Si $a = 1 - \ln 2$ la función es continua en $x = 1$ y por tanto continua en todo su dominio $= \mathbb{R}$. Si $a \neq 1 - \ln 2$ la función no es continua en $x = 1$, presentando una discontinuidad inevitable de salto finito y la función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Los planos π_1 y π_2 son secantes pues sus vectores normales no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv -x + y + 2z = 1 \Rightarrow \vec{n}_1 = (-1, 1, 2) \\ \pi_2 \equiv 2y + z = -1 \Rightarrow \vec{n}_2 = (0, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{0} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$$

El plano π_3 perpendicular a los planos π_1 y π_2 tiene como vectores directores los vectores normales de dichos planos y pasa por $A(0, 1, 1)$. Hallamos su ecuación.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n}_1 = (-1, 1, 2) \\ \vec{v} = \vec{n}_2 = (0, 2, 1) \\ A(0, 1, 1) \in \pi_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_3 \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 0 - 2(z-1) + 0 + y - 1 - 4x = 0 \Rightarrow x - 2z + 2 + y - 1 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_3 \equiv -3x + y - 2z + 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi_3 \equiv -3x + y - 2z + 1 = 0$.

5. a) En el primer curso de un grado en ingeniería industrial los alumnos deben cursar una asignatura de estadística y otra de física. Se sabe que la probabilidad de que un alumno apruebe estadística es del 60 % mientras que la probabilidad de que apruebe física es del 50 %. Además, se sabe que la probabilidad de que aprueben las dos es del 40 %.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe estadística o física?

a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha aprobado física, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado estadística?

b) En el huerto urbano "Turdus merula" producen compost para abonar los cultivos. Han observado que la cantidad de compost que se produce cada temporada sigue una distribución normal de media 40 kg y varianza 4 kg².

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una temporada se produzcan más de 43 kg de compost?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la cantidad exacta de compost que es menor que el 79.95 % más grande de las cantidades de compost producidas en otras temporadas?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

a) Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Aprueba física	No aprueba física	
Aprueba estadística	40		50
No aprueba estadística			
	60		100

Completamos la tabla.

	Aprueba física	No aprueba física	
Aprueba estadística	40	10	50
No aprueba estadística	20	30	50
	60	40	100

Con estos datos y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas.

a.1) Hay un 40 % que aprueban las dos materias, 20 % que aprueban solo física y 10 % aprueban sólo estadística, por lo que la probabilidad de que un alumno apruebe estadística o física es la suma: $40 + 20 + 10 = 70$ %.

a.2) Hay un 60 % de alumnos que aprueban física y un 40 % que han aprobado física y estadística, aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que haya aprobado estadística sabiendo que ha aprobado física es el cociente de los dos valores $\rightarrow \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \approx 0.667$. La probabilidad es del 66.7 %.

b) Consideramos X = la cantidad de compost que se produce cada temporada expresado en kg. Como la varianza vale 4 kg² la desviación típica será $\sigma = \sqrt{4} = 2$ kg.

$$X = N(40, 2)$$

b.1) Nos piden calcular $P(X > 43)$.

$$P(X > 43) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{43 - 40}{2}\right) = P(Z > 1.5) =$$

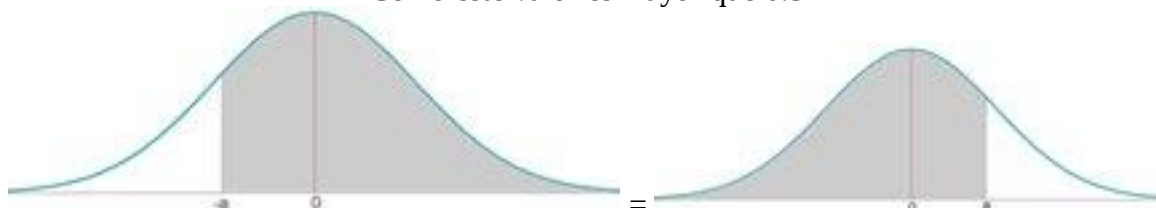
$$= 1 - P(Z \leq 1.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$

a	0.00	0.
0.70	0.7580	0.
0.80	0.7881	0.
0.90	0.8159	0.
1.00	0.8413	0.
1.10	0.8643	0.
1.20	0.8849	0.
1.30	0.9032	0.
1.40	0.9192	0.
1.50	0.9332	0.

b.2) Nos piden halla “a” tal que $P(X > a) = 0.7995$.

$$P(X > a) = 0.7995 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{a - 40}{2}\right) = 0.7995 \Rightarrow \dots$$

Como este valor es mayor que 0.5



$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{a - 40}{2}\right) = P\left(Z < -\frac{a - 40}{2}\right) = 0.7995 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a - 40}{2} = 0.84 \Rightarrow -a + 40 = 1.68 \Rightarrow 40 - 1.68 = a \Rightarrow \boxed{a = 38.32 \text{ kg}}$$

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289

Una fabricación de 38.32 kg de compost es menor que el 79.95 % más grande de las cantidades de compost producidas en otras temporadas.

6. a) [1 punto] Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}}$$

b) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1} , razona

por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

a) Calculamos la integral usando un cambio de variable.

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}} = \left\{ \begin{array}{l} 1-3x = t^6 \rightarrow 1-t^6 = 3x \\ -6t^5 dt = 3dx \rightarrow dx = -\frac{6t^5}{3} dt = -2t^5 dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{-2t^5 dt}{t^{6/2} - t^{12/3}} = -2 \int \frac{t^5}{t^3 - t^4} dt = -2 \int \frac{t^5}{t^3(1-t)} dt = -2 \int \frac{t^2}{1-t} dt = 2 \int \frac{t^2}{t-1} dt = \dots$$

$$\begin{array}{r} t^2 \\ -t^2 \quad +t \\ \hline t \end{array} \quad \begin{array}{r} |t-1| \\ t+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -t \quad +1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \rightarrow \frac{t^2}{t-1} = t+1 + \frac{1}{t-1}$$

$$\int \frac{t^2}{t-1} dt = \int t+1 + \frac{1}{t-1} dt = \int t+1 dt + \int \frac{1}{t-1} dt = \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|$$

$$\dots = 2 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) = t^2 + 2t + 2\ln|t-1| = \left\{ \begin{array}{l} 1-3x = t^6 \\ \sqrt[6]{1-3x} = t \end{array} \right\} =$$

$$= \left(\sqrt[6]{1-3x} \right)^2 + 2\sqrt[6]{1-3x} + 2\ln|\sqrt[6]{1-3x} - 1| =$$

$$= \boxed{\sqrt[3]{1-3x} + 2\sqrt[6]{1-3x} + 2\ln|\sqrt[6]{1-3x} - 1| + K}$$

b) Para que exista la inversa de A su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -2 \neq 0$$

Como el determinante es no nulo existe A^{-1} .

Para comprobar si $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa calculamos el valor de su determinante. Sabemos por las propiedades de los determinantes que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-2}$ y que $|A^{-1} \cdot B| = |A^{-1}| \cdot |B|$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow |A^{-1} \cdot B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \frac{1}{-2} \cdot 0 = 0$$

Al ser su determinante nulo sabemos que la matriz $A^{-1} \cdot B$ no tiene inversa.

7. a) [1 punto] Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x} dx.$$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2) [0,75 puntos] ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

a) Resolvemos la integral aplicando el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int (x+3)e^{-2x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+3 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-2x} dx \rightarrow v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right\} = (x+3)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2}(x+3)e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = \\ &= -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{6}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} = \boxed{-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{7}{4}e^{-2x} + K} \end{aligned}$$

b) La probabilidad de sacar 1 al lanzar un dado de seis caras es $1/6$.

Llamamos A_1 , A_2 , A_3 y A_4 a los sucesos “sacar 1 en 1ª, 2ª, 3ª o 4ª tirada”.

Tenemos que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{6}$.

La probabilidad de no obtener ningún 1 es la probabilidad de sacar en la primera tirada un número distinto de 1.

$$P(\text{No sacar ningún 1}) = P(\overline{A_1}) = \boxed{\frac{5}{6}}$$

La probabilidad de sacar una puntuación de 1 es la de sacar un 1 en la primera tirada y en la segunda tirada sacar un número distinto a 1.

$$P(\text{Puntuación 1}) = P(A_1)P(\overline{A_2}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{36}}$$

La probabilidad de sacar una puntuación de 3 es la de sacar un 1 en la primera, en la segunda y en la tercera tirada y en la cuarta tirada sacar un número distinto a 1.

$$P(\text{Puntuación 3}) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A_4}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{1296}}$$

8. a) **[1,25 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la

matriz A es invertible.

b) **[1,25 puntos]** Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2z = 1$, $\pi_2 \equiv b \cdot y + z = -1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Qué condición deben cumplir a, b para que los planos no sean perpendiculares?

a) La matriz A es invertible cuando su determinante es no nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 0 + 2 - 0 - 2 - 0 = a^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

El determinante de A es nulo para $a = 0$. La matriz A es invertible cuando $a \neq 0$.

b) Para que dos planos no sean perpendiculares sus vectores normales no deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar no debe ser nulo. Averiguamos cuando el producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2z = 1 \Rightarrow \vec{n}_1 = (a, 1, 2) \\ \pi_2 \equiv b \cdot y + z = -1 \Rightarrow \vec{n}_2 = (0, b, 1) \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, 1, 2)(0, b, 1) = 0 \Rightarrow b + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Los planos no son perpendiculares cuando $b \neq -2$ y siendo a cualquier valor real.

MODELO 2

1. Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda.

a) [1,25 puntos] Plantea el sistema de ecuaciones que permita determinar cuánto vale un lápiz, un cuaderno y una agenda.

b) [1,25 puntos] ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50? En caso de que se pueda, obtén los precios correspondientes. En caso de que no se puede, justifica por qué no.

a) Llamamos “x” al precio de un lápiz, “y” al precio de un cuaderno y “z” al precio de una agenda.

“Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros” $\rightarrow 3x + y + z = 5$

“Dos cuadernos y una agenda han costado 5 euros” $\rightarrow 2y + z = 5$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + z = 5 \\ 2y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y + z = 5 \\ z = 5 - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + y + 5 - 2y = 5 \Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 5 - 2(3x) = 5 - 6x \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} y = 3x \\ z = 5 - 6x \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones en función del precio de un lápiz (x).

b) Si ponemos el sistema en céntimos quedaría $\left. \begin{array}{l} 3x + y + z = 500 \\ 2y + z = 500 \end{array} \right\}$ la solución es $\begin{cases} y = 3x \\ z = 500 - 6x \end{cases}$

Si todos son múltiplos de 50 tenemos que $x = 50a$, $y = 50b$, $z = 50c$.

Las soluciones quedarían:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 50a \\ y = 50b = 3(50a) \Rightarrow b = 3a \\ z = 50c = 500 - 6(50a) \rightarrow 50c = 500 - 300a \Rightarrow c = 10 - 6a \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 50a \\ y = 50b; b = 3a \\ z = 50c; c = 10 - 6a \end{array} \right.$$

Como a , b y c son números naturales pues son el número de monedas de 50 céntimos del precio de cada artículo. Veamos que ocurre dando valores crecientes, empezando por 1 (no puede ser 0 pues nada es gratis).

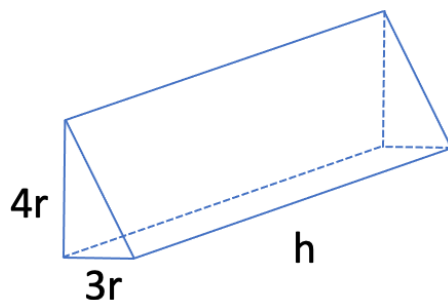
$$a = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 50 \\ b = 3 \rightarrow y = 150 \\ c = 10 - 6 = 4 \rightarrow z = 200 \end{array} \right.$$

Un lápiz cuesta 50 cts, un cuaderno 150 cts y una agenda 200 cts

$$a = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 100 \\ b = 6 \rightarrow y = 300 \\ c = 10 - 12 = -2 \rightarrow \text{¡Imposible! El número de monedas no puede ser negativo} \end{array} \right.$$

La única solución es: Un lápiz cuesta 50 cts, un cuaderno 150 cts y una agenda 200 cts.

2. Una carpintera debe diseñar una caja con forma de prisma de altura h y cuya base sea un triángulo rectángulo de base $3r$ y altura $4r$, tal y como se puede ver en la figura adjunta. Además, la carpintera debe asegurarse de que el área de la superficie sea de 36 cm^2 y su volumen lo mayor posible.



a) [1 punto] Escribe el volumen de la caja en función del valor r .

b) [1,5 puntos] ¿Cuánto deben valer h y r para que el volumen de la caja sea lo mayor posible?

a) El área del triángulo de la base es $\frac{\text{Base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3r \cdot 4r}{2} = 6r^2$.

El volumen de la caja es el producto del área de la base (triángulo) por la altura (h).

$$\text{Volumen} = 6r^2 \cdot h = 6hr^2$$

Determinamos la superficie de la caja como la suma de las dos bases y los tres laterales.

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{(4r)^2 + (3r)^2} = \sqrt{16r^2 + 9r^2} = \sqrt{25r^2} = 5r$$

$$\text{Superficie} = 2 \cdot 6r^2 + 3r \cdot h + 4r \cdot h + 5r \cdot h = 12r^2 + 12rh$$

Como la superficie debe ser 36 cm^2 tenemos la igualdad $12r^2 + 12rh = 36$. Despejamos h en esta igualdad.

$$12r^2 + 12rh = 36 \Rightarrow r^2 + rh = 3 \Rightarrow rh = 3 - r^2 \Rightarrow h = \frac{3 - r^2}{r}$$

Sustituimos h en la expresión del volumen.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Volumen} = 6hr^2 \\ h = \frac{3 - r^2}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow V(r) = 6 \frac{3 - r^2}{r} r^2 = (18 - 6r^2) \frac{r^2}{r} = 18r - 6r^3$$

La expresión del volumen en función del valor de r es $V(r) = 18r - 6r^3$.

b) Derivamos la función volumen y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$V(r) = 18r - 6r^3 \Rightarrow V'(r) = 18 - 18r^2$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow 18 - 18r^2 = 0 \Rightarrow 1 - r^2 = 0 \Rightarrow 1 = r^2 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{1} = 1}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo.

$$V'(r) = 18 - 18r^2 \Rightarrow V''(r) = -36r \Rightarrow V''(1) = -36 < 0$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda negativa la función volumen tiene un máximo relativo en $r = 1$.

Averiguamos el valor de h .

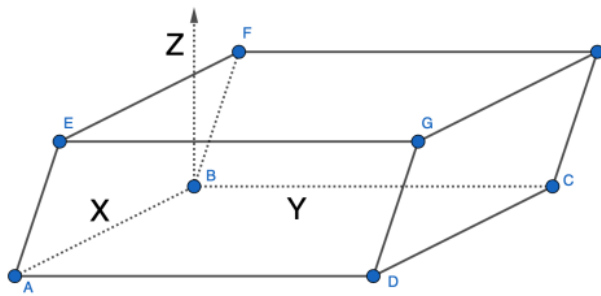
$$h = \frac{3-1^2}{1} = 2 \text{ cm}$$

Averiguamos el valor del volumen para $r = 1$.

$$V(1) = 18 \cdot 1 - 6 \cdot 1^3 = \boxed{12 \text{ cm}^3}$$

La caja con dimensiones $r = 1 \text{ cm}$ y $h = 2 \text{ cm}$ tiene un volumen máximo de 12 cm^3 .

3. Un arquitecto desea diseñar un edificio con la forma de paralelepípedo que se ve en la figura de abajo.



Sean los vectores $\overrightarrow{BA} = (a, b, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 80, 0)$ y $\overrightarrow{BF} = (0, 10, c)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Todos los valores están en metros.

a) [1 punto] Según el diseño de la figura anterior, el vector $\overrightarrow{BA}$ ha de ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BF}$. ¿Qué deben cumplir los valores a, b, c para que esto ocurra?

b) [1,5 puntos] Teniendo en cuenta las condiciones del apartado anterior, calcula los valores de a, b, c para que la longitud de A a B sea de 40 metros y el volumen del edificio sea de 3200 metros cúbicos.

a) Si el vector $\overrightarrow{BA}$ ha de ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BF}$ los productos escalares $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BA}$ deben ser nulos.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (a, b, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (0, 80, 0) \\ \overrightarrow{BF} = (0, 10, c) \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (0, 80, 0) \cdot (a, b, 0) = 0 \rightarrow 80b = 0 \rightarrow b = 0 \\ (0, 10, c) \cdot (a, b, 0) = 0 \rightarrow 10b = 0 \rightarrow \boxed{b = 0} \end{array} \right.$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $b = 0$, siendo a y c cualquier valor real.

b) Si $b = 0$ los vectores quedan $\overrightarrow{BA} = (a, 0, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 80, 0)$ y $\overrightarrow{BF} = (0, 10, c)$.

Si la longitud de A a B es 40 el módulo del vector $\overrightarrow{BA}$ es 40.

$$\left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{a^2 + 0^2 + 0^2} = |a| \\ |\overrightarrow{BA}| = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow |a| = 40$$

Si el volumen del edificio es 3200 metros cúbicos entonces el valor absoluto del producto mixto de los vectores debe ser 3200.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (a, 0, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (0, 80, 0) \\ \overrightarrow{BF} = (0, 10, c) \\ [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}] = 3200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 10 & c \end{array} \right| = 3200 \Rightarrow |80ac| = 3200 \Rightarrow |ac| = 40$$

Reunimos las dos igualdades obtenidas y resolvemos el problema.

$$\left. \begin{array}{l} |a| = 40 \\ |ac| = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |a| = 40 \\ |c| = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 40 \\ c = \pm 1 \end{cases}$$

Los valores necesarios son $a = \pm 40$, $b = 0$ y $c = \pm 1$.

4. a) Una fábrica posee dos robots (A y B) para soldar piezas en la línea de producción. El robot A procesa el 60 % de las piezas mientras que el robot B procesa el 40 % restante. El 10 % de las piezas procesadas por el robot A presenta algún defecto de soldadura mientras que el 5 % de las piezas procesadas por el robot B presenta algún defecto.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza producida en esa línea de producción presente un defecto de soldadura?

a.2) **[0,75 puntos]** Si una pieza se ha producido sin defectos, ¿cuál es la probabilidad de que la haya procesado el robot A?

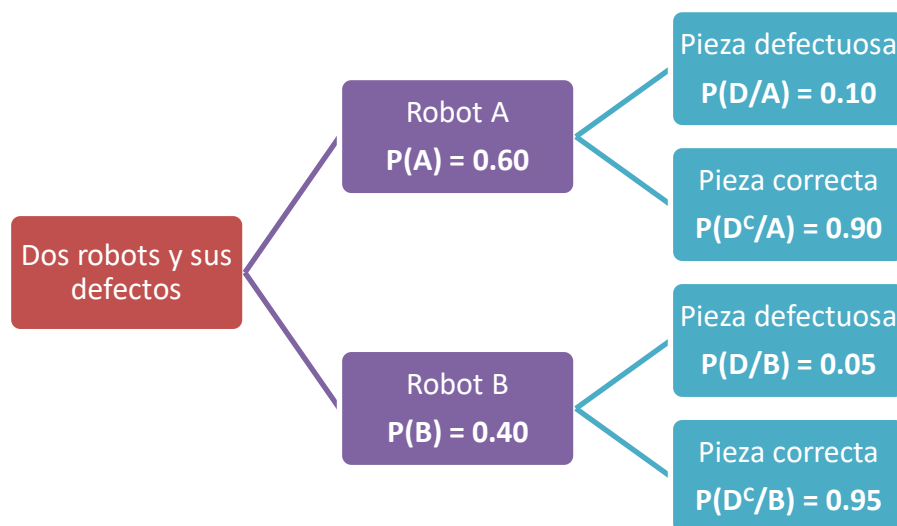
b) En un examen de oposición solamente el 30 % de los candidatos aprueba. Un tribunal evalúa a 6 opositores.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres opositores no aprueben?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un opositor apruebe?

n	k	p	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
6	0		0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0001	0.0000
	1		0.3543	0.3932	0.3025	0.1866	0.0937	0.0369	0.0102	0.0015	0.0001
	2		0.0984	0.2458	0.3241	0.3110	0.2344	0.1382	0.0595	0.0154	0.0012
	3		0.0146	0.0819	0.1852	0.2765	0.3125	0.2765	0.1852	0.0819	0.0146
	4		0.0012	0.0154	0.0595	0.1382	0.2344	0.3110	0.3241	0.2458	0.0984
	5		0.0001	0.0015	0.0102	0.0369	0.0938	0.1866	0.3025	0.3932	0.3543
	6		0.0000	0.0001	0.0007	0.0041	0.0156	0.0467	0.1176	0.2621	0.5314

a) Llamamos A al suceso “la pieza la procesa el robot A” y B al suceso “la pieza la procesa el robot B”, D al suceso “la pieza tiene un defecto”. Realizamos un diagrama de árbol.



Con estos datos respondemos a las preguntas del ejercicio.

a.1) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) = 0.6 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.05 = \boxed{0.08}$$

a.2) Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.1}{0.08} = \boxed{0.75}$$

b) Es un problema de distribución binomial.

X = Número de opositores que aprueban una oposición de un grupo de 6.

Número de repeticiones = $n = 6$. Probabilidad de éxito = $p = 0.30$.

$X = B(6, 0.3)$.

b.1) Si de 6 opositores 3 no aprueban deben haber 3 que aprueban.

Nos piden calcular $P(X = 3)$.

$$P(X = 3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla binomial} \end{array} \right\} = 0.1852$$

$n \backslash k$	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,444
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,444
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,111
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,296
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,444
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,222
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,037
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,197
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,395
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,296
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,098
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,012
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,329
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,329
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,164
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,041
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,004
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,087
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,263
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3341	0,329
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,219
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,082

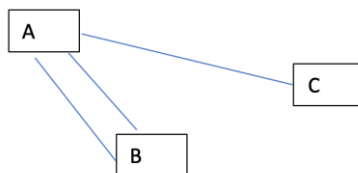
b.2) Nos piden calcular $P(X \geq 1)$. Utilizamos el suceso contrario.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla binomial} \end{array} \right\} = 1 - 0.1176 = 0.8824$$

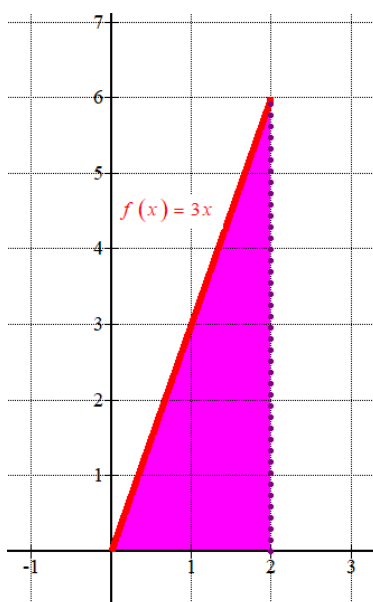
$n \backslash k$	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,444
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,444
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,111
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,296
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,444
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,222
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,037
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,197
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,395
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,296
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,098
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,012
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,329
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,329
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,164
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,041
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,004
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,087
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,263

5. a) **[1 punto]** Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de la función $f(x) = 3x$ entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2$.

b) **[1,5 puntos]** El grafo siguiente muestra las conexiones por carretera entre las poblaciones A, B y C. Halla la matriz G asociada al grafo y calcula $G + G^2$. ¿Cuántas formas posibles existen para ir de A a C haciendo como máximo una escala (es decir, recorriendo un camino de dos aristas o menos)?



a) Dibujamos la superficie que debe girar alrededor del eje OX.



El volumen de un cuerpo de revolución es el valor de la siguiente integral definida.

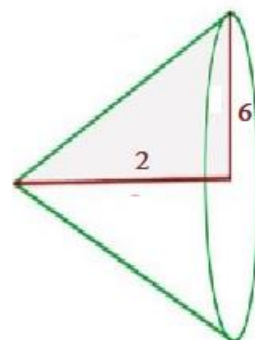
$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \int_0^2 \pi \cdot (3x)^2 dx = \int_0^2 \pi \cdot 9x^2 dx = 9\pi \int_0^2 x^2 dx = \left[9\pi \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= \left[9\pi \frac{2^3}{3} \right] - \left[9\pi \frac{0^3}{3} \right] = \boxed{24\pi \approx 75.4 \text{ u}^3} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Al girar el triángulo del dibujo se forma un cono de radio 6 y altura 2.

Aplicamos las fórmulas de geometría para obtener su volumen.

$$\text{Volumen} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 2}{3} = 24\pi \text{ u}^3$$



b) La matriz G es:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ B \rightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $G + G^2$.

$$\begin{aligned} G + G^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+4+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 4+0+0 & 2+0+0 \\ 0+0+0 & 2+0+0 & 1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ G + G^2 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz $G + G^2$ significa el número de rutas que te llevan de una ciudad a otra directamente o con 1 escala.

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A \rightarrow & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ G + G^2 = B \rightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ C \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para ir de A a C haciendo como máximo una escala hay 1 forma de hacerlo.

6. a) **[1 punto]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = 6x - 4$ y $g(x) = x^2 + 4$.

b) **[1,5 puntos]** Sean el punto $A(2, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Calcula la distancia del punto A a la recta r .

a) Hallamos los posibles puntos de intersección de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 6x - 4 \\ g(x) = x^2 + 4 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 4 = 6x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$

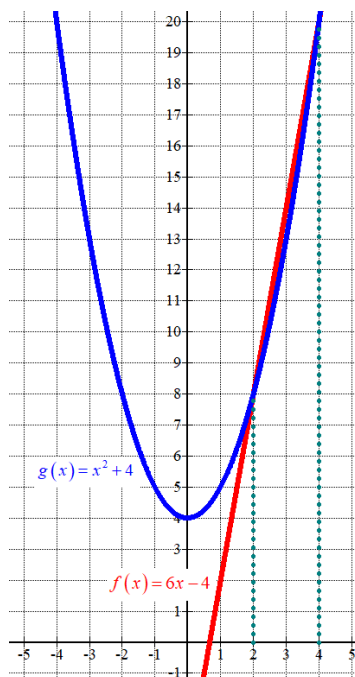
$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 \\ \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

La región delimitada por las funciones $f(x) = 6x - 4$ y $g(x) = x^2 + 4$ está comprendida entre $x = 2$ y $x = 4$. Como $f(3) = 6 \cdot 3 - 4 = 14$ es mayor que $g(3) = 3^2 + 4 = 13$ su área es el valor de la integral definida entre 2 y 4 de $f(x) - g(x)$.

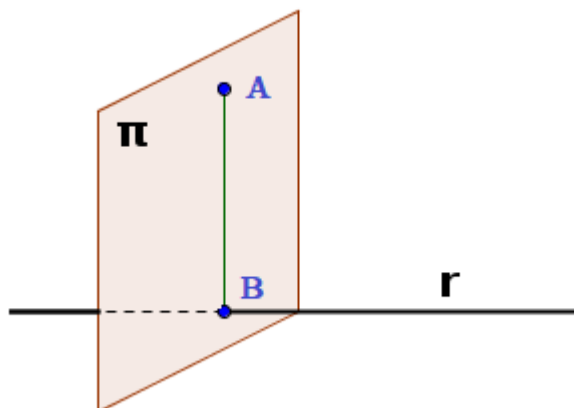
$$\text{Área} = \int_2^4 f(x) - g(x) dx = \int_2^4 6x - 4 - (x^2 + 4) dx = \int_2^4 6x - 4 - x^2 - 4 dx =$$

$$= \int_2^4 -x^2 + 6x - 8 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right]_2^4 = \left[-\frac{4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 \right] - \left[-\frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 \right] =$$

$$= -\frac{64}{3} + 48 - 32 + \frac{8}{3} - 12 + 16 = 20 - \frac{56}{3} = \boxed{\frac{4}{3} \approx 1.33 \text{ u}^2}$$



- b) Hallamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto A. Después, hallamos el punto B de corte de recta y plano. La distancia de A a la recta es el valor de la distancia de A a B, es decir, el módulo del vector que une ambos puntos.



Hallamos la ecuación del plano π . Como es perpendicular a la recta su vector normal es el vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{2} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 2)$$

$$\pi: \begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ A(2, 1, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi: x - y + 2z + D = 0 \\ A(2, 1, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 2 - 1 + 2 + D = 0 \Rightarrow 3 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -3 \Rightarrow \pi: x - y + 2z - 3 = 0$$

Hallamos el punto B de corte de recta y plano.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(1, 0, -3) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\pi: x - y + 2z - 3 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda - (-\lambda) + 2(-3 + 2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda + \lambda - 6 + 4\lambda - 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = -3 + 2\frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Hallamos la distancia del punto A a la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} B\left(\frac{7}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}\right) \\ A(2,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{7}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}\right) - (2,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

$$d(A, r) = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{66}{9}} = \frac{\sqrt{66}}{3} \approx 2.7 \text{ unidades}$$

7. a) **[1 punto]** Las ganancias (en millones de euros) de una empresa durante el primer año vienen dadas por la función $f(t) = 4 - t(1-t)e^{t^2}$, donde $t \in [0, 1]$ representa el tiempo en años. Sin calcularlo directamente, justifica que existe un extremo relativo en el período de tiempo $[0, 1]$. ¿Se trata de un ganancia máxima o mínima? ¿Por qué?

b) En un concesionario de coches se sabe que la probabilidad de que un coche sea diésel es de 0.20 mientras que la de que sea de color rojo es de 0.10. Ambos sucesos son independientes.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea diésel y de un color distinto al rojo?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea diésel o rojo?

a) La función es $f(t) = 4 - (t - t^2)e^{t^2}$ y su derivada es:

$$f'(t) = -[(1-2t)e^{t^2} + (t-t^2)2te^{t^2}] = -e^{t^2}[(1-2t) + (t-t^2)2t]$$

$$f'(t) = -e^{t^2}[1 - 2t + 2t^2 - 2t^3]$$

La derivada en $t = 0$ vale $f'(0) = -e^{0^2}[1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3] = -1 < 0$.

La derivada en $t = 1$ vale $f'(1) = -e^{1^2}[1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3] = -e[1 - 2 + 2 - 2] = e > 0$.

Al cambiar de signo la derivada en el intervalo $[0, 1]$ debe de existir un valor $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. En este valor $x = c$ la función tiene un extremo.

Como la derivada es negativa antes del valor $x = c$ la función decrece y después del valor $x = c$ la derivada es positiva y la función crece. En $x = c$ hay un mínimo.

b) Llamamos D al suceso “el coche es diésel” y R al suceso “el coche es rojo”. Nos dicen que $P(D) = 0.20$ y $P(R) = 0.10$. Como los sucesos D y R son independientes se cumple que $P(D \cap R) = P(D)P(R) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$.

b.1) Nos piden calcular $P(D \cap \bar{R})$.

$$P(D) = P(D \cap R) + P(D \cap \bar{R}) \Rightarrow 0.2 = 0.02 + P(D \cap \bar{R}) \Rightarrow P(D \cap \bar{R}) = 0.2 - 0.02 = 0.18$$

La probabilidad de que un coche sea diésel y de un color distinto al rojo es de 0.18.

b.2) Nos piden calcular $P(D \cup R)$.

$$P(D \cup R) = P(D) + P(R) - P(D \cap R) = 0.2 + 0.1 - 0.02 = \boxed{0.28}$$

La probabilidad de que un coche sea diésel o rojo es 0.28.

8. a) [1,25 puntos] Calcula las matrices A y B que cumplen que $A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

b) [1,25 puntos] Determina el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{u} = (a, 1, 0)$ y $\vec{v} = (a, 0, 0)$ formen un ángulo de 45° . Supón también que $a \neq 0$.

a) Resolvemos el sistema matricial

$$\left. \begin{aligned} A + 2B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ 2A - B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}.$$

$$\left. \begin{aligned} A + 2B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ 2A - B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - 2B \\ 2A - B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - 4B - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow -5B = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 15 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 15 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 3-2 \\ -4+6 & 1-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}$$

b) Aplicamos la fórmula del producto escalar.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{(a, 1, 0) \cdot (a, 0, 0)}{\sqrt{a^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{a^2}} = \frac{a^2}{a \sqrt{1 + a^2}} = \{a \neq 0\} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \left. \begin{aligned} & \\ (\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ \rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\sqrt{2} = \sqrt{1 + a^2} \Rightarrow (a\sqrt{2})^2 = (\sqrt{1 + a^2})^2 \Rightarrow 2a^2 = 1 + a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $a = -1$.