



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2023-2024

Materia: MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas cuyo valor máximo es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar. Este documento es un modelo de examen que tiene carácter orientativo y puede servir como referencia para el estudiante que realice las pruebas. No obstante, además de los problemas contenidos en este modelo de examen, podrán plantearse otros tipos de ejercicios que se encuadren en lo establecido en los saberes básicos que aparecen en el currículo de la materia publicados en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, así como en los acuerdos recogidos en el acta de la reunión de la Comisión celebrada el 9 de noviembre de 2023.

PREGUNTAS

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es un número real.

Encuentra los valores de m para los que $A \cdot B$ tiene inversa. (2 puntos)

2. Determina para qué valores del parámetro m el sistema es compatible determinado y resuélvelo para esos valores. (2 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ mx + y + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{array} \right\}$$

3. Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

- a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 punto)
b) Demostrar que es un paralelogramo y calcular su área. (1.25 puntos)

4. Considere el plano $\pi: 2x + y - z = 1$ y el punto $A(1, 0, -1)$

- a) Calcule la recta perpendicular a π que pasa por el punto A . (1 punto)
b) Calcule el punto del plano π que está más cerca de A . (1 punto)

5. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

- a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$. (1,5 puntos)
b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

6. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \cdot \cos x} & x < 0 \\ b(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$

Calcule el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$. (2 puntos)

7. Calcula la siguiente integral (2 puntos)

$$\int \frac{x-4}{x^2+2x} dx$$

8. Calcule el área del recinto plano limitado por $h(x) = x^3 - x$ y el eje OX (2 puntos)

9. Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Si se selecciona al azar una resistencia:

- a) Calcular la probabilidad de que sea defectuosa. (1 punto)
- b) Si es defectuosa, calcular la probabilidad de que proceda del operario A. (1 punto)

10. Un equipo de cirujanos infantiles ha comprobado que en cierta intervención quirúrgica hay un 15% de posibilidades de que se produzcan complicaciones si el niño tiene menos de 2 años. Un total de 10 niños menores de dos años fueron sometidos a dicha intervención quirúrgica.

Determinar justificando las respuestas:

- a) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en tres niños. (0,75 puntos)
- b) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en algún niño. (0,75 puntos)
- c) El número medio de complicaciones en los 10 niños y la desviación típica. (0,5 puntos)

SOLUCIONES

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es un número real.

Encuentra los valores de m para los que $A \cdot B$ tiene inversa. (2 puntos)

Determinamos la expresión de la matriz $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Una matriz tiene inversa si su determinante es no nulo.

Averiguamos cuando se anula el determinante de $A \cdot B$.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = -(1-m)(2+2m)$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow (1-m)(2+2m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-m=0 \rightarrow m=1 \\ o \\ 2+2m=0 \rightarrow 1+m=0 \rightarrow m=-1 \end{cases}$$

El determinante de $A \cdot B$ se anula para $m = 1$ y para $m = -1$.

La matriz $A \cdot B$ tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1 y de -1 .

2. Determina para qué valores del parámetro m el sistema es compatible determinado y resuélvelo para esos valores. (2 puntos)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ mx + y + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema sea compatible determinado los rangos de las matrices A y A/B deben ser iguales al número de incógnitas (3).

Para que el rango de A sea 3 su determinante debe ser no nulo.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m + 2 - m + 1 - 2m^2 - 1 = -2m^2 + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 + 2 = 0 \Rightarrow -2m^2 = -2 \Rightarrow m^2 = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{1} = \pm 1}$$

El determinante de A se anula para $m = 1$ y para $m = -1$. En estos casos el rango de A es menor de 3.

El rango de A es 3 para cualquier valor de m distinto de 1 y de -1 .

Para cualquier valor de m distinto de 1 y de -1 el rango de A y el de A/B es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado para $m \neq \pm 1$.

Resolvemos el sistema cuando $m \neq \pm 1$. Utilizamos el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{0 + 2 - 1 + 1 - 2m - 0}{2 - 2m^2} = \frac{2 - 2m}{2 - 2m^2} = \frac{1 - m}{1 - m^2} = \frac{\cancel{1 - m}}{(1 - \cancel{m})(1 + m)} = \frac{1}{1 + m}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{m+0-m+1-0-1}{2-2m^2} = \frac{0}{2-2m^2} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{1+2+0-0-2m-1}{2-2m^2} = \frac{2-2m}{2-2m^2} = \frac{1-m}{1-m^2} = \frac{\cancel{1-m}}{(1-\cancel{m})(1+m)} = \frac{1}{1+m}$$

La solución del sistema cuando $m \neq \pm 1$ es $x = z = \frac{1}{1+m}$; $y = 0$.

3. Se consideran los puntos A(0, 5, 3), B(0, 6, 4), C(2, 4, 2) y D(2, 3, 1) y se pide:

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios.

(0.75 punto)

b) Demostrar que es un paralelogramo y calcular su área.

(1.25 puntos)

a) Hallamos el plano definido por los puntos A, B y C. Luego comprobamos que el punto D pertenece al plano hallado.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 6, 4) - (0, 5, 3) = (0, 1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, 4, 2) - (0, 5, 3) = (2, -1, -1) \\ A(0, 5, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y-5 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2y - 10 + 0 - 2(z - 3) - 0 + x = 0 \Rightarrow -x + 2y - 10 - 2z + 6 + x = 0 \Rightarrow$$

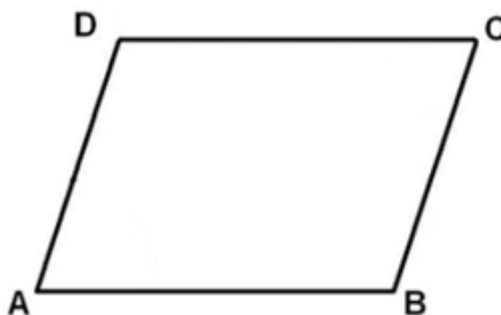
$$\Rightarrow 2y - 2z - 4 = 0 \Rightarrow \pi : y - z - 2 = 0$$

Comprobamos que el punto D pertenece al plano $\pi : y - z - 2 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : y - z - 2 = 0 \\ \text{¿} D(2, 3, 1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 3 - 1 - 2 = 0?$$

La igualdad es cierta, por lo que el punto D pertenece al plano definido por los puntos A, B y C. Por tanto, los puntos A, B, C y D son coplanarios (están en el mismo plano)

b) Para que formen un paralelogramo deben tener sus lados paralelos. Para ello los vectores que unen los vértices deben tener las mismas coordenadas.



Comprobamos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen las mismas coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 6, 4) - (0, 5, 3) = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{DC} = (2, 4, 2) - (2, 3, 1) = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

Al tener $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ las mismas coordenadas los otros dos lados CA y DC también son paralelos.

Calculamos el valor del área del paralelogramo como el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AD} = (2, 3, 1) - (0, 5, 3) = (2, -2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2i + 2j + 0 - 2k - 0 + 2i = 2j - 2k = (0, 2, -2)$$

$$\text{Área} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2} \approx 2.83 \text{ u}^2}$$

El área del paralelogramo ABCD tiene un valor de $2\sqrt{2} \approx 2.83$ unidades cuadradas.

4. Considere el plano $\pi : 2x + y - z = 1$ y el punto $A(1, 0, -1)$

a) Calcule la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)

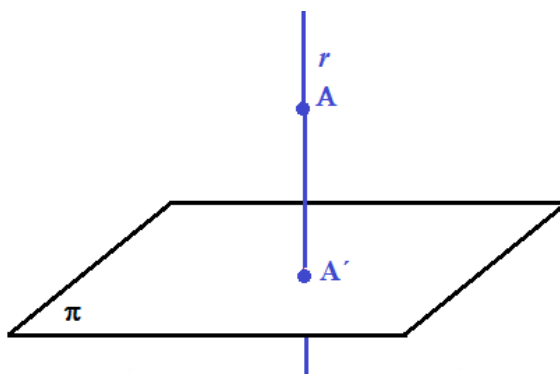
b) Calcule el punto del plano π que está más cerca de A. (1 punto)

a) La recta r perpendicular a π que pasa por el punto A tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : 2x + y - z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, -1)$$

$$r : \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 1, -1) \\ A(1, 0, -1) \in r \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) El punto del plano π que está más cerca de A es la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π .



Ya hemos calculado la ecuación de la recta r perpendicular a π que pasa por el punto A.

Hallamos las coordenadas del punto A' intersección del plano y la recta.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1 + 2\lambda) + \lambda - (-1 - \lambda) = 1 \\ \pi : 2x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A' \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

El punto A' del plano π que está más cerca de A tiene coordenadas $A' \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$.

5. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

- a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$. (1,5 puntos)
 b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

a) **Asíntotas verticales.** $x = a$

El Dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$.

¿ $x=1$ es asíntota vertical de la función?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1-x} = \frac{1^2}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} -1 = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1-x} + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-x} = -1$$

La asíntota oblicua es $y = -x - 1$.

Para el estudio de la monotonía utilizamos la derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) - (-1)x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2-x=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos obtenidos. Añadimos en la división de la recta real el valor $x = 1$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$, la derivada vale $f'(-1) = \frac{2(-1) - (-1)^2}{(1-(-1))^2} = \frac{-3}{4} < 0$

. La función decrece en $(-\infty, 0)$.

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$, la derivada vale $f'(0.5) = \frac{2(0.5) - 0.5^2}{(1-0.5)^2} = \frac{0.75}{0.25} > 0$

. La función crece en $(0, 1)$.

- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$, la derivada vale $f'(1.5) = \frac{2(1.5) - 1.5^2}{(1 - 1.5)^2} = \frac{0.75}{0.25} > 0$.

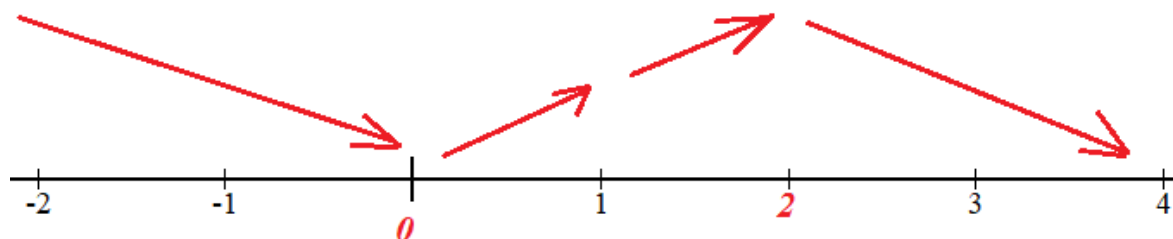
La función crece en $(1, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$, la derivada vale $f'(3) = \frac{2(3) - 3^2}{(1 - 3)^2} = \frac{-3}{4} < 0$. La

función decrece en $(2, +\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(0, 1) \cup (1, 2)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

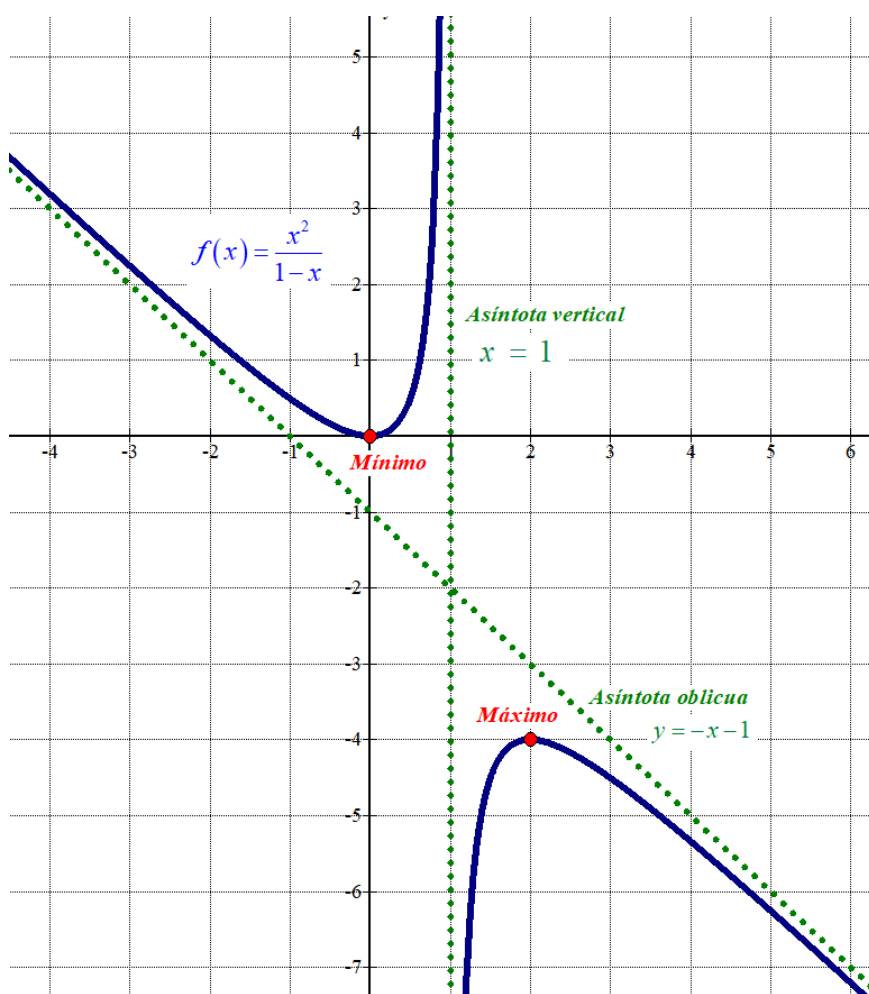
La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

b) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y = \frac{x^2}{1-x}$
-1	0.5
0	0 <i>Mínimo</i>
0.5	0.5
1.5	-4.5
2	-4 <i>Máximo</i>
3	-4.5



6. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \cdot \cos x} & x < 0 \\ b(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$

Calcule el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

(2 puntos)

Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse:

- Existe $f(0)$.

$$f(0) = b(0+1) = b$$

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \cdot \cos x} = \frac{e^0 + e^{-0} - 2}{0 \cdot \cos 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (regla de L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{\cos x - x \cdot \sin x} = \frac{e^0 - e^{-0}}{\cos 0 - 0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} b(x+1) = b$$

- Los tres valores son iguales $\rightarrow b = 0$.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ debe ser $b = 0$.

7. Calcula la siguiente integral

(2 puntos)

$$\int \frac{x-4}{x^2+2x} dx$$

Usamos el método de descomposición en fracciones simples para descomponer la fracción del integrando en suma de fracciones con denominador de grado 1.

$$\frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{A(x+2)}{x(x+2)} + \frac{Bx}{x(x+2)} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} \Rightarrow x-4 = A(x+2) + Bx$$

$$x=0 \rightarrow 0-4 = A(0+2) + 0 \rightarrow -4 = 2A \rightarrow A = -2$$

$$x=-2 \rightarrow -2-4 = A(-2+2) - 2B \rightarrow -6 = -2B \rightarrow B = 3$$

$$\frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{-2}{x} + \frac{3}{x+2}$$

Calculamos la integral.

$$\int \frac{x-4}{x^2+2x} dx = \int \frac{-2}{x} + \frac{3}{x+2} dx = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{3}{x+2} dx =$$

$$= -2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x+2} dx = \boxed{-2 \ln|x| + 3 \ln|x+2| + C}$$

8. Calcule el área del recinto plano limitado por $h(x) = x^3 - x$ y el eje OX (2 puntos)

Buscamos los puntos de corte de la función $h(x)$ con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = x^3 - x \\ \text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Existen tres puntos de corte, por lo que el recinto se divide en dos partes cuya área calculamos a través de dos integrales definidas, una entre -1 y 0 y la otra entre 0 y 1 .

$$\int_{-1}^0 h(x) dx = \int_{-1}^0 x^3 - x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right] = - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4}$$

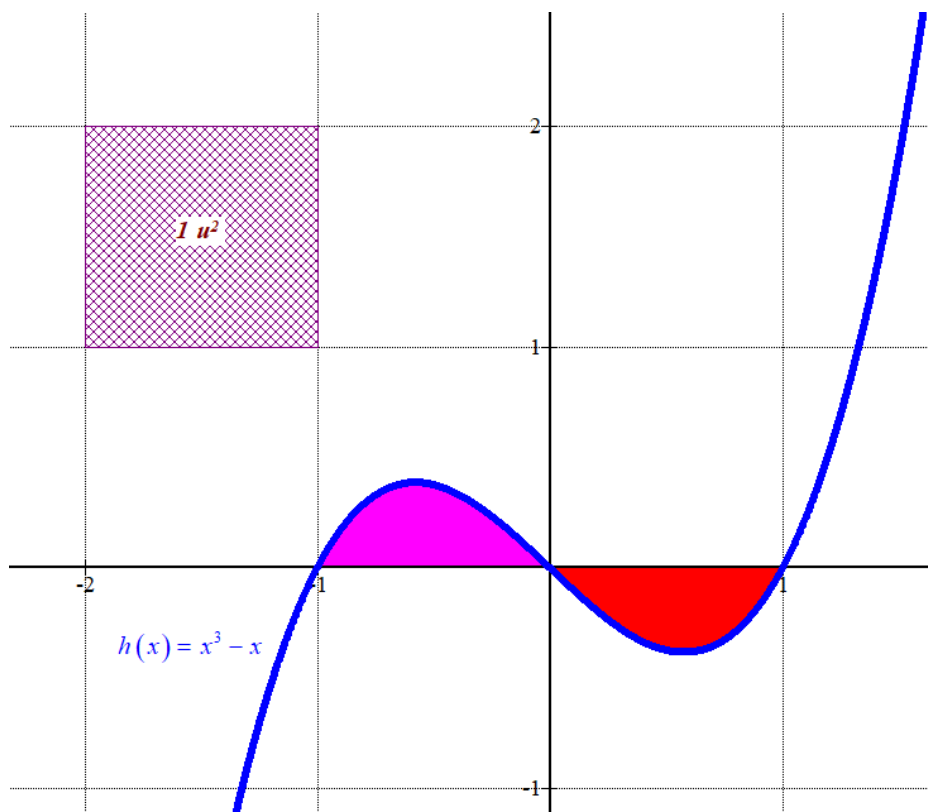
$$\int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 x^3 - x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right] = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{4}$$

El área del recinto plano limitado por $h(x) = x^3 - x$ y el eje OX es la suma de los valores absolutos de las integrales definidas calculadas.

$$\text{Área} = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \boxed{0.5 \text{ u}^2}$$

El área del recinto es de 0.5 unidades cuadradas.

Dibujamos el recinto para comprobar la bondad de la solución.



9. Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Si se selecciona al azar una resistencia:

- a) Calcular la probabilidad de que sea defectuosa. (1 punto)
 b) Si es defectuosa, calcular la probabilidad de que proceda del operario A. (1 punto)

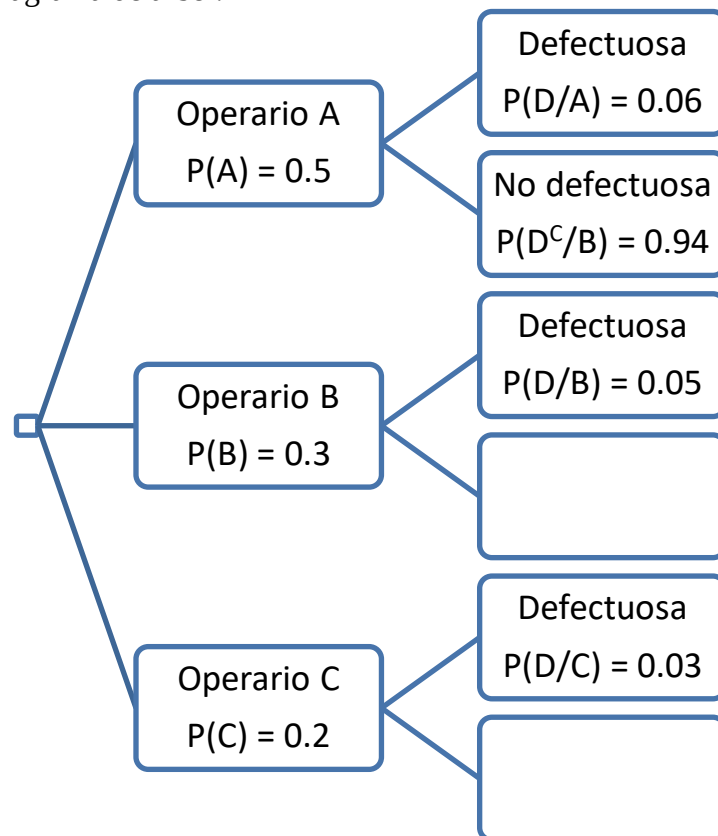
Llamamos A al suceso “la resistencia es producida por el operario A”.

Llamamos B al suceso “la resistencia es producida por el operario B”.

Llamamos C al suceso “la resistencia es producida por el operario C”.

Llamamos D al suceso “la resistencia es defectuosa”.

Construimos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.06 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.03 = \boxed{0.051}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori, Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.5 \cdot 0.06}{0.051} = \boxed{\frac{30}{51} = 0.588}$$

10. Un equipo de cirujanos infantiles ha comprobado que en cierta intervención quirúrgica hay un 15% de posibilidades de que se produzcan complicaciones si el niño tiene menos de 2 años. Un total de 10 niños menores de dos años fueron sometidos a dicha intervención quirúrgica.

Determinar justificando las respuestas:

- a) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en tres niños. (0,75 puntos)
- b) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en algún niño. (0,75 puntos)
- c) El número medio de complicaciones en los 10 niños y la desviación típica. (0,5 puntos)

Es un problema de distribución binomial.

X = Número de niños menores de dos años que sufren complicaciones en cierta intervención quirúrgica de un grupo de 10.

El número de repeticiones es $n = 10$. La probabilidad de sufrir complicaciones es $p = 0.15$.

$X = B(10, 0.15)$.

- a) Nos piden calcular $P(X = 3)$.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.15^3 \cdot 0.85^7 \approx \boxed{0.1298}$$

- b) Nos piden calcular $P(X \geq 1)$. Utilizamos el suceso contrario para calcular esta probabilidad.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.15^0 \cdot 0.85^{10} \approx \boxed{0.8031}$$

- c) La media de la binomial es el producto $n \cdot p = 10 \cdot 0.15 = 1.5$ niños. El número medio de complicaciones en los 10 niños es de 1.5 niños.

La desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.15 \cdot 0.85} \approx 1.13$ niños.