

	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS AÑO 2023 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se calculará sobre las respuestas dadas a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni simbólicas.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un agricultor tiene una finca con 58 árboles, distribuidos entre naranjos, limoneros y perales. Al plantarlos, la suma del número de limoneros y del doble de perales excedía en 6 unidades al número de naranjos. Sin embargo, tras una plaga en la que murieron 5 naranjos y 3 perales, el número de naranjos se ha equilibrado con el total de limoneros y perales. Calcular el número de perales que han sobrevivido a la plaga.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la siguiente función definida en su dominio

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ |x-1| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- (1 punto) Determinar el dominio de la función f , así como su continuidad y diferenciabilidad.
- (0.5 puntos) Determinar las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas de f .
- (1 punto) Determinar el área de la región comprendida entre el eje x , la función f y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 2$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un rayo láser transcurre a lo largo de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-2}$. Se quiere emitir un segundo

láser desde el punto $P(-1, 0, 0)$ para que ambos láseres converjan en el punto $Q(0, 1, 0)$.

- (0.75 puntos) Calcular el ángulo que se formará entre las trayectorias de los láseres.
- (1.25 punto) Calcular la distancia del punto de convergencia al plano $\pi: x + y - z = -2$.
- (0.5 puntos) Determinar el plano paralelo a π que pasa por el punto de convergencia.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen dos sucesos A y B que satisfacen $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.4$ y $P(A/B) = 0.25$. Se pide:

- (0.5 puntos) Calcular $P(B/A)$.
- (1 punto) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$
- (1 punto) Calcular $P(\bar{A} \cup B)$, donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario a A .

	UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS AÑO 2023 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
---	--	--

OPCIÓN B**B.1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Consideremos la matriz dependiendo de un parámetro real a dada por $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el rango de la matriz AA^t en función del valor del parámetro a , donde A^t denota la matriz transpuesta a A .
- b) (0.5 puntos) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz AA^t .
- c) (1 punto) Para $a = 1$, sea $B = A^t A$. Determinar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa láctea desea diseñar un nuevo envase con forma de paralelepípedo rectangular para empaquetar cuatro litros de leche. Para que se adapte perfectamente a los camiones de transporte, uno de los lados del envase debe medir exactamente un decímetro de longitud. Con estos datos, se pide definir la función que determina cantidad de material necesario para construir cada envase, así como las dimensiones óptimas que minimizan el gasto de material.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el plano $\pi: x + z = -1$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Se pide:

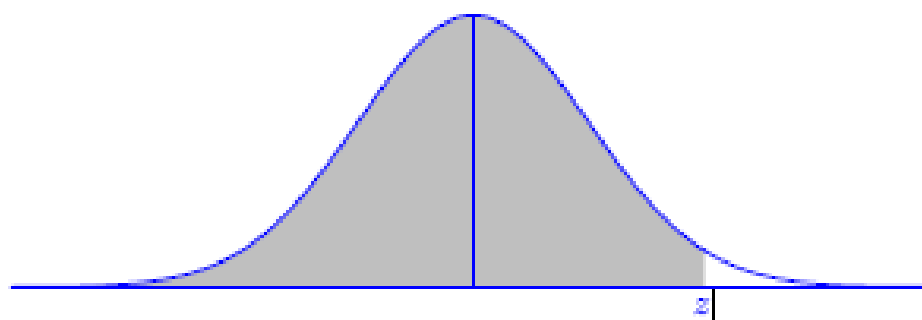
- a) (0.75 puntos) Determinar la posición relativa entre las rectas r y s , así como el ángulo que forman en caso de ser incidentes.
- b) (0.75 puntos) Calcular la intersección del plano generado por r y s con el plano π .
- c) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal de la recta s sobre el plano π .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de una cierta marca de bombillas sigue una distribución normal de media 10 años y desviación típica 2 años.

- a) (0.5 punto) Calcular la probabilidad de que una bombilla funcione correctamente durante al menos 12 años.
- b) (1 punto) ¿Cuántos años deben pasar para tener una certeza superior al 90% de que se funde una bombilla?
- c) (1 puntos) En un aula se instalan 10 de estas bombillas. Calcular la probabilidad de que al menos 2 bombillas se hayan fundido pasados 8 años.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un agricultor tiene una finca con 58 árboles, distribuidos entre naranjos, limoneros y perales. Al plantarlos, la suma del número de limoneros y del doble de perales excedía en 6 unidades al número de naranjos. Sin embargo, tras una plaga en la que murieron 5 naranjos y 3 perales, el número de naranjos se ha equilibrado con el total de limoneros y perales. Calcular el número de perales que han sobrevivido a la plaga.

Llamamos “x” al número de naranjos, “y” al número de limoneros y “z” al número de perales.

“Un agricultor tiene una finca con 58 árboles, distribuidos entre naranjos, limoneros y perales”
 $\rightarrow x + y + z = 58$.

“Al plantarlos, la suma del número de limoneros y del doble de perales excedía en 6 unidades al número de naranjos” $\rightarrow y + 2z = x + 6$.

“Tras una plaga en la que murieron 5 naranjos y 3 perales, el número de naranjos se ha equilibrado con el total de limoneros y perales” $\rightarrow x - 5 = y + z - 3$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 58 \\ y + 2z = x + 6 \\ x - 5 = y + z - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 58 \\ y + 2z = x + 6 \\ x = y + z + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z + 2 + y + z = 58 \\ y + 2z = y + z + 2 + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 56 \\ z = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 16 = 56 \Rightarrow 2y = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{2} = 20 \Rightarrow x = 20 + 8 + 2 = 30$$

Se plantaron 30 naranjos, 20 limoneros y 8 perales. Como tras la plaga murieron 3 perales, solo han sobrevivido a la plaga 5 perales.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la siguiente función definida en su dominio

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ |x-1| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determinar el dominio de la función f , así como su continuidad y diferenciabilidad.
 b) (0.5 puntos) Determinar las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas de f .
 c) (1 puntos) Determinar el área de la región comprendida entre el eje x , la función f y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 2$.

- a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Estudiamos la continuidad de la función en cada intervalo de definición.

La función en el intervalo $(-\infty, 0)$ es $f(x) = e^x$ que es una función exponencial y por tanto continua.

La función en el intervalo $(0, +\infty)$ es $f(x) = |x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ que es una

función a trozos, pero continua $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

- Existe $f(0) = e^0 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x-1| = |0-1| = 1$
- Los tres valores son iguales: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

La función es continua en $x = 0$.

La función es continua en su dominio = $\mathbb{R}$.

Estudiamos la derivabilidad.

La función en el intervalo $(-\infty, 0)$ es $f(x) = e^x$, al ser una función exponencial es derivable: $f'(x) = e^x$.

La función en el intervalo $(0, +\infty)$ es $f(x) = |x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Es derivable en

$(0,1) \cup (1, +\infty)$ y su derivada es $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Estudiamos si es derivable

en $x = 1$ comprobando si sus derivadas laterales son iguales:

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 = -1 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = -1 \neq 1 = f'(1^+).$$

La función no es derivable en $x = 1$. La función es derivable en $(0,1) \cup (1, +\infty)$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = 1 \neq -1 = f'(0^+)$$

Al tener valores distintos las derivadas laterales en $x=0$ la función no es derivable en $x=0$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

b) Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$ la función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota horizontal.

Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiene como asíntota horizontal $y=0$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiene asíntota horizontal y no tiene oblicua.

Cuando x tiende a $+\infty$ estudiamos si tiene asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

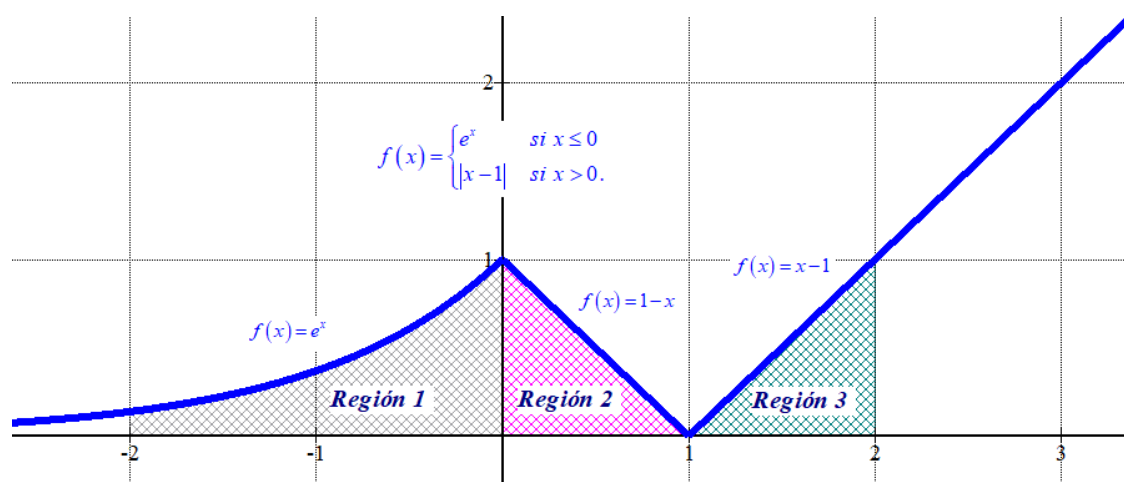
$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1-x) = -1$$

La función tiene una asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$: $y=x-1$. Esta recta es la propia función.

c) Averiguamos si la función corta el eje x .

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{¡Imposible!} \\ |x-1| = 0 \rightarrow x=1 \in (-2,2) \end{cases}$$

Para el cálculo del área de la región comprendida entre el eje x , la función f y las rectas verticales $x=-2$ y $x=2$ consideramos tres regiones: una entre -2 y 0 , otra entre 0 y 1 , una tercera entre 1 y 2 .



$$\text{Área región 1} = \int_{-2}^0 e^x dx = [e^x]_{-2}^0 = e^0 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0.86 \text{ u}^2$$

$$\text{Área región 2} = \int_0^1 1 - x dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[1 - \frac{1^2}{2} \right] - \left[0 - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\text{Área región 3} = \int_1^2 x - 1 dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = \left[\frac{2^2}{2} - 2 \right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1 \right] = \frac{1}{2} = 0.5$$

El área de la región es la suma de las tres áreas: $0.86 + 0.5 + 0.5 = 1.86$ unidades cuadradas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un rayo láser transcurre a lo largo de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-2}$. Se quiere emitir un segundo láser desde el punto $P(-1,0,0)$ para que ambos láseres converjan en el punto $Q(0,1,0)$.

- a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que se formará entre las trayectorias de los láseres.
 b) (1.25 punto) Calcular la distancia del punto de convergencia al plano $\pi: x + y - z = -2$.
 c) (0.5 puntos) Determinar el plano paralelo a π que pasa por el punto de convergencia.

a) Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} P(-1,0,0) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (0,1,0) - (-1,0,0) = (1,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

El ángulo que se formará entre las trayectorias de los láseres es el ángulo formado por el vector director de r y el de s .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \vec{u}_r = (1, -1, -2) \\ \vec{v}_s = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(r, s) = \cos(\vec{u}_r, \vec{v}_s) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{u}_r| |\vec{v}_s|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(r, s) = \frac{(1, -1, -2)(1, 1, 0)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1-1}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow (r, s) = 90^\circ$$

Las trayectorias forman un ángulo de 90° , son perpendiculares.

b) Calculamos la distancia del punto Q al plano $\pi: x + y - z = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y - z + 2 = 0 \\ Q(0,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, \pi) = \frac{|0+1-0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1.73 \text{ unidades}$$

c) Hallamos la ecuación del plano π' paralelo a π que pasa por el punto Q . Este plano tendrá ecuación $\pi': x + y - z + D = 0$. Hallamos el valor D para que el plano contenga el punto Q .

$$\left. \begin{array}{l} \pi': x + y - z + D = 0 \\ Q(0,1,0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 0+1-0+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - z - 1 = 0}$$

El plano buscado es $\pi': x + y - z - 1 = 0$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen dos sucesos A y B que satisfacen $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.4$ y $P(A/B) = 0.25$. Se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular $P(B/A)$.
- b) (1 punto) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$
- c) (1 punto) Calcular $P(\bar{A} \cup B)$, donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario a A.

a) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.1 \\ P(B) = 0.4 \\ P(A/B) = 0.25 \\ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array} \right\} \Rightarrow 0.25 = \frac{P(A \cap B)}{0.4} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.25 \cdot 0.4 = 0.1$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.1} = \boxed{1}$$

b) En el apartado anterior hemos obtenido $P(A \cap B) = 0.1$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.1 + 0.4 - 0.1 = \boxed{0.4}$$

c) Obtenemos el valor de $P(\bar{A} \cap B)$.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \Rightarrow 0.4 = 0.1 + P(\bar{A} \cap B) \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = 1 - 0.1 + 0.4 - 0.3 = \boxed{1}$$

OPCIÓN B

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos la matriz dependiendo de un parámetro real a dada por $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el rango de la matriz AA^t en función del valor del parámetro a , donde A^t denota la matriz transpuesta a A .
 b) (0.5 puntos) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz AA^t .
 c) (1 punto) Para $a = 1$, sea $B = A^t A$. Determinar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Obtenemos la expresión de AA^t .

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 4 + a^2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 + 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de AA^t .

$$|AA^t| = \begin{vmatrix} 2a^2 + 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 4 - 4 = 2a^2$$

$$|AA^t| = 0 \Rightarrow 2a^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Si $a \neq 0$ el determinante de AA^t es no nulo y el rango de AA^t es 2.

Si $a = 0$ el determinante de AA^t es nulo y su rango es menor de 2. Su rango es 1 pues la matriz queda $AA^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y tiene elementos no nulos.

- b) Para $a = 1$ la matriz queda $AA^t = \begin{pmatrix} 2+4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $|AA^t| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$, existe la inversa. La calculamos.

$$(AA^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}((AA^t)^t)}{|AA^t|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 & -(-2) \\ -(-2) & +6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(AA^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

c) Para $a = 1$ la matriz queda $B = A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4+1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Esta matriz no tiene inversa pues tiene dos filas iguales. Planteamos el sistema e intentamos resolverlo.

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} = \text{Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z \\ 2x + 5y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(1 - 2y - z) + 5y + 2z = 0 \Rightarrow$$

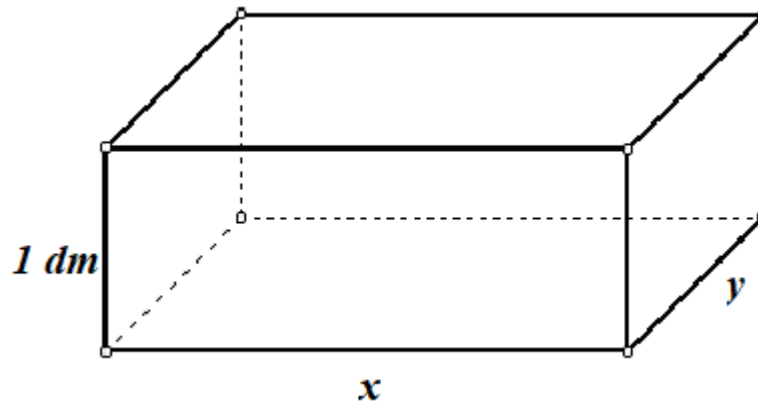
$$\Rightarrow 2 - 4y - 2z + 5y + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{y = -2} \Rightarrow \boxed{x = 1 - 2(-2) - z = 5 - z}$$

Las soluciones del sistema son $x = 5 - \lambda$, $y = -2$, $z = \lambda$; siendo $\lambda \in \mathbb{R}$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa láctea desea diseñar un nuevo envase con forma de paralelepípedo rectangular para empaquetar cuatro litros de leche. Para que se adapte perfectamente a los camiones de transporte, uno de los lados del envase debe medir exactamente un decímetro de longitud. Con estos datos, se pide definir la función que determina cantidad de material necesario para construir cada envase, así como las dimensiones óptimas que minimizan el gasto de material.

El envase tiene la forma del dibujo.



El volumen del paralelepípedo es *Área base · Altura*.

$$\text{Área base} = x \cdot y = xy \text{ dm}^2$$

$$\text{Volumen} = V(x, y) = xy \cdot 1 = xy \text{ dm}^3$$

El volumen de leche que debe contener son 4 litros, es decir, 4 dm^3 .

$$V(x, y) = xy = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$$

Hallamos la expresión de la superficie del envase en función de los valores de los aristas “x” e “y”.

$$\text{Superficie} = 2(x \cdot 1 + y \cdot 1 + x \cdot y) = 2x + 2y + 2xy$$

Sustituimos el valor $y = \frac{4}{x}$.

$$\text{Superficie} = 2x + 2y + 2xy = 2x + 2\frac{4}{x} + 2x\frac{4}{x}$$

$$\text{Superficie} = S(x) = 2x + \frac{8}{x} + 8$$

La función que determina la cantidad de material necesario para construir cada envase es

$$S(x) = 2x + \frac{8}{x} + 8, \text{ dependiendo del valor “x” situado entre 0 y 4.}$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada, en busca de sus puntos críticos.

$$S(x) = 2x + \frac{8}{x} + 8 \Rightarrow S'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{8}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^2} = 2 \Rightarrow 8 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = 2}$$

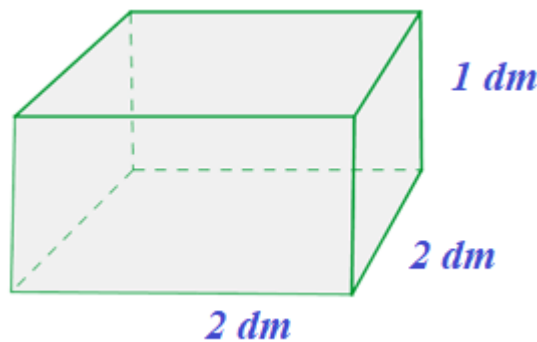
Hemos obtenido un punto crítico en $x = 2$. Valoramos la segunda derivada en $x = 2$ para determinar si es un máximo o un mínimo.

$$S'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = 2 - 8x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 16x^{-3} \Rightarrow S''(2) = 16 \cdot 2^{-3} = 2 > 0$$

Al ser la segunda derivada positiva la función superficie tiene un valor mínimo para $x = 2$.

Para $x = 2$ tenemos que $y = \frac{4}{2} = 2$.

El envase con menor cantidad de material tiene las dimensiones: $x = 2$ e $y = 2$.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el plano $\pi: x+z=-1$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Se pide:

- (0.75 puntos) Determinar la posición relativa entre las rectas r y s , así como el ángulo que forman en caso de ser incidentes.
- (0.75 puntos) Calcular la intersección del plano generado por r y s con el plano π .
- (1 punto) Calcular la proyección ortogonal de la recta s sobre el plano π .

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_r(2, -1, 3) \\ \vec{u}_r = (1, -2, 1) \end{matrix}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} Q_s(1, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (0, 1, 2) \end{matrix}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_s = (0, 1, 2) \\ \vec{u}_r = (1, -2, 1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{0}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (1, 0, 0) - (2, -1, 3) = (-1, 1, -3)$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{u}_r = (1, -2, 1) \\ \vec{v}_s = (0, 1, 2) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-1, 1, -3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 + 1 - 0 - 2 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas están en el mismo plano y se cortan.

Hallamos el ángulo que forman que es el determinado por sus respectivos vectores directores.

$$\left. \begin{matrix} \vec{u}_r = (1, -2, 1) \\ \vec{v}_s = (0, 1, 2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \cos(r, s) = \cos(\vec{u}_r, \vec{v}_s) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{u}_r| |\vec{v}_s|} = \frac{(1, -2, 1) \cdot (0, 1, 2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$\cos(r, s) = \frac{0 - 2 + 2}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow (r, s) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

Las rectas son secantes y forman un ángulo de 90° (son perpendiculares).

- b) Obtenemos la ecuación del plano π' determinado por las rectas r y s . Este plano tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (1, -2, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (0, 1, 2) \\ Q_s(1, 0, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-1) + 0 + z - 0 - 2y - (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 4 + z - 2y - x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': -5x - 2y + z + 5 = 0}$$

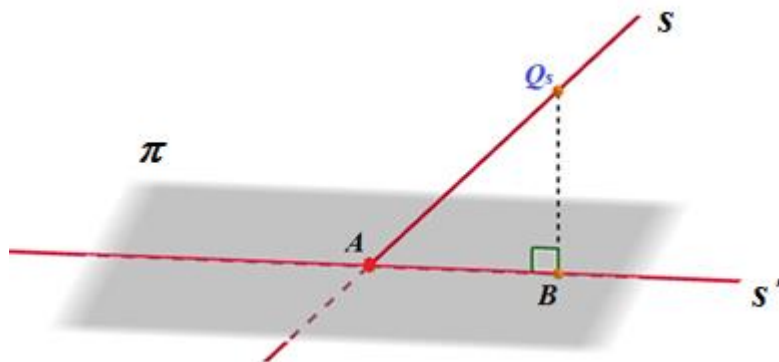
El plano determinado por las rectas r y s tiene ecuación $\pi': -5x - 2y + z + 5 = 0$.

- c) Averiguamos la posición relativa de la recta s y el plano π .

$$\pi: x + z = -1 \Rightarrow \vec{n} = (1, 0, 1) \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} Q_s(1, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (0, 1, 2) \end{matrix}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_s = (1, 0, 1) \cdot (0, 1, 2) = 2 \neq 0$$

Como el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = 2 \neq 0$ los vectores no son perpendiculares y recta y plano no son paralelos ni la recta está contenida en el plano. Recta y plano se cortan en un punto.



Hallamos el punto A de corte de la recta s y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + z = -1 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2\lambda = -1 \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow A(1, -1, -2)$$

Hallamos el punto B proyección ortogonal del punto Q_s de la recta s sobre el plano. Para ello hallamos la recta t perpendicular al plano que pasa por Q_s

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{n} = (1, 0, 1) \\ Q_s(1, 0, 0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto B de corte de la recta t con el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + z = -1 \\ t: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha + \alpha = -1 \Rightarrow 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow B(0, 0, -1)$$

La proyección ortogonal de la recta s sobre el plano π es la recta s' que pasa por los puntos A y B.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_{s'} = \overrightarrow{AB} = (0, 0, -1) - (1, -1, -2) = (-1, 1, 1) \\ B(0, 0, -1) \in s' \end{array} \right\} \Rightarrow s': \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de una cierta marca de bombillas sigue una distribución normal de media 10 años y desviación típica 2 años.

- a) (0.5 punto) Calcular la probabilidad de que una bombilla funcione correctamente durante al menos 12 años.
 b) (1 punto) ¿Cuántos años deben pasar para tener una certeza superior al 90% de que se funde una bombilla?
 c) (1 punto) En un aula se instalan 10 de estas bombillas. Calcular la probabilidad de que al menos 2 bombillas se hayan fundido pasados 8 años.

Llamamos X = El tiempo de vida (en años) de una cierta marca de bombillas.

$X = N(10, 2)$

- a) Nos piden calcular $P(X \geq 12)$.

$$P(X \geq 12) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{12 - 10}{2}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5039
0.1	0.5098	0.5146
0.2	0.5206	0.5254
0.3	0.5359	0.5406
0.4	0.5507	0.5554
0.5	0.5643	0.5689
0.6	0.5779	0.5824
0.7	0.5938	0.5985
0.8	0.6044	0.6091
0.9	0.6179	0.6226
1.0	0.6413	0.6461
1.1	0.6554	0.6601

- b) Nos piden hallar “a” tal que $P(X \geq a) = 0.90$.

$$P(X \geq a) = 0.90 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 10}{2}\right) = 0.90 \Rightarrow \{0.90 > 0.5\} \Rightarrow \dots$$



$$\dots \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-10}{2}\right) = P\left(Z \leq -\frac{a-10}{2}\right) = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a-10}{2} = \frac{1.28+1.29}{2} \Rightarrow a-10 = 1.285 \Rightarrow \boxed{a = 11.285}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

Deben pasar 11.285 años para tener una certeza superior al 90% de que se funde una bombilla.

- c) Consideramos la variable aleatoria Y = Número de bombillas fundidas al cabo de 8 años de un grupo de 10 bombillas.

Es una variable binomial con número de repeticiones = $n = 10$. La probabilidad de que una bombilla esté fundida antes de los 8 años es $p = P(X \leq 8)$. Calculamos el valor de p .

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{8-10}{2}\right) = P(Z \leq -1) = \\ &= P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

Tenemos que $Y = B(10, 0.1587)$.

Nos piden calcular $P(Y \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 1) + P(Y = 0)] = \\ &= 1 - \left[\binom{10}{1} 0.1587^1 \cdot 0.8413^9 + \binom{10}{0} 0.1587^0 \cdot 0.8413^{10} \right] = \\ &= 1 - [10 \cdot 0.1587 \cdot 0.8413^9 + 0.8413^{10}] = \boxed{0.4873} \end{aligned}$$