



UNIVERSIDAD
DE MURCIA

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PARA MAYORES DE 25 AÑOS Y DE 45 AÑOS
2024
185-MATEMÁTICAS II

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ ax + y + 3z = a \\ x + ay + az = 1 \end{cases}$$

- a) [0,75 p.] Determine para qué valores de a el sistema es compatible determinado.
 b) [1,25 p.] Determine para qué valores de a el sistema es compatible indeterminado. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema sea incompatible?
 c) [0,5 p.] Resuélvalo para $a = 0$.

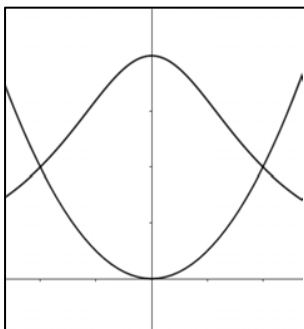
2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [1 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su matriz inversa.
 b) [1,5 p.] Resuelva la ecuación matricial $XA + B^2 = A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

3: Descomponga el número 24 como suma de dos números positivos de tal manera que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea el mayor valor posible. ¿Cuál es dicho valor máximo?

4: Considere las funciones $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ y $g(x) = x^2$, cuya representación gráfica está esbozada en la figura adjunta.



- a) [0,75 p.] Calcule los dos puntos de corte de ambas funciones.
 b) [1,75 p.] Calcule el área del recinto limitado por ambas curvas.

5: Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}.$$

- a) [1 p.] Justifique que ambas rectas se cruzan en el espacio.
 b) [0,5 p.] Compruebe que el punto del origen $O(0,0,0)$ no está en ninguna de las dos rectas
 c) [1 p.] Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto del origen y corta a ambas rectas.

6: Considere los puntos $A(-1, 2, 2)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(-4, 5, 2)$.

- a) **[0,75 p.]** Justifique que los tres puntos están alineados y calcule la ecuación de la recta que los contiene (en cualquiera de sus formas).
- b) **[0,75 p.]** Calcule la distancia del punto $P(1, 1, -1)$ a dicha recta.
- c) **[1 p.]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a dicha recta y pasa por el punto $P(1, 1, -1)$

7: En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal si es necesario.

El coeficiente intelectual (CI) de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica desconocida s . Se sabe que el 21,19% de ellos tiene un CI mayor que 110.

- a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un CI mayor que 90.
- b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución de probabilidad.
- c) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un CI menor que 80,625.

8: Se tienen 2 bolsas con el siguiente contenido: la bolsa A tiene 5 bolas blancas y 3 bolas negras; la bolsa B tiene 2 bolas blancas y 6 bolas negras. Se toma una baraja española de 40 cartas (10 oros, 10 copas, 10 bastos y 10 espadas) y se saca una carta al azar. Si sale oro se saca una bola de la bolsa A; si no sale oro, se saca una bola de la bolsa B.

- a) **[0,5 p.]** Calcule la probabilidad de que se saque una bola de la bolsa A y la probabilidad de que se saque una bola de la bolsa B.
- b) **[1 p.]** Calcule la probabilidad de sacar una bola negra.
- c) **[1 p.]** Sabiendo que se ha sacado una bola negra, calcule la probabilidad de que sea de la bolsa B.

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ ax + y + 3z = a \\ x + ay + az = 1 \end{cases}$$

- a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de a el sistema es compatible determinado.
 b) **[1,25 p.]** Determine para qué valores de a el sistema es compatible indeterminado. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema sea incompatible?
 c) **[0,5 p.]** Resuélvalo para $a = 0$.

Discutimos el sistema y después respondemos a lo planteado en cada apartado.

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 3 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 3 & a \\ 1 & a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 3 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = a - 3 + a^2 - 1 + a^2 - 3a = 2a^2 - 2a - 4$.

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 4 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = a \\ \frac{1-3}{2} = -1 = a \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
 Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 1 \quad 3 \quad -1 \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \frac{1}{2} \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad -1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B también es 2. Los rangos son iguales a 2, pero menores que el número de incógnitas (3).

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad -3 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad -1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B también es 2. Los rangos son iguales a 2, pero menores que el número de incógnitas (3).

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

- El sistema es compatible determinado para cualquier valor de a distinto de -1 y 2 .
- El sistema es compatible indeterminado para $a = -1$ y para $a = 2$. No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea incompatible.
- Lo resolvemos para $a = 0$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1).

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 - y + z = 1 \\ y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = y \\ y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0$$

La solución del sistema para $a = 0$ es $x = 1$; $y = z = 0$.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [1 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su matriz inversa.
 b) [1,5 p.] Resuelva la ecuación matricial $XA + B^2 = A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1 \neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo la matriz tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XA + B^2 = A^t \Rightarrow XA = A^t - B^2 \Rightarrow X = (A^t - B^2)A^{-1}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$A^t - B^2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3-3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^t - B^2)A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5 & 25-30 \\ 5+2 & 25+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & 37 \end{pmatrix}$$

3: Descomponga el número 24 como suma de dos números positivos de tal manera que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea el mayor valor posible. ¿Cuál es dicho valor máximo?

Llamamos “x” e “y” a cada una de las partes en que descompongo el número 24.

$$x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x$$

La función que deseamos maximizar es el producto de uno de ellos por el cubo del otro $\rightarrow f(x, y) = y \cdot x^3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = y \cdot x^3 \\ y = 24 - x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = (24 - x)x^3 = 24x^3 - x^4$$

Calculamos los extremos de la función $f(x) = 24x^3 - x^4$ usando su función derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 72x^2 - 4x^3 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 72x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow 18x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow$$

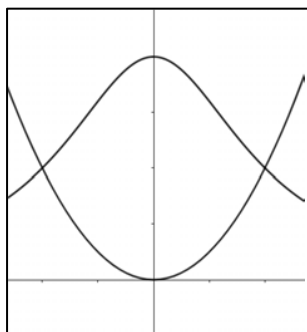
$$\Rightarrow x^2(18 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \\ 0 \\ 18 - x = 0 \rightarrow \boxed{x = 18} \end{cases}$$

Sustituimos estos dos valores en la segunda derivada y averiguamos cual de ellos es el máximo relativo de la función.

$$f''(x) = 144x - 12x^2 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 144 \cdot 0 - 12 \cdot 0^2 = 0 \rightarrow \text{Posible punto de inflexión} \\ f''(18) = 144 \cdot 18 - 12 \cdot 18^2 = -1296 < 0 \rightarrow \text{¡Máximo relativo!} \end{cases}$$

Para $x = 18$ la función tiene un máximo relativo. Para dicho valor tenemos que $y = 24 - 18 = 6$. La descomposición del número 24 que maximiza el valor del producto de uno de ellos por el cubo del otro es 18 y 6.

4: Considere las funciones $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ y $g(x) = x^2$, cuya representación gráfica está esbozada en la figura adjunta.



a) [0,75 p.] Calcule los dos puntos de corte de ambas funciones.

b) [1,75 p.] Calcule el área del recinto limitado por ambas curvas.

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{2}{1+x^2} \\ g(x) = x^2 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1+x^2} = x^2 \Rightarrow 2 = x^2(1+x^2) \Rightarrow 2 = x^2 + x^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \{x^2 = t \rightarrow x^4 = t^2\} \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = t \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1} \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = t \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow x = \sqrt{-2} \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

Para $x = -1$ tenemos que $g(-1) = (-1)^2 = 1$. El punto de corte es el punto $A(-1, 1)$.

Para $x = 1$ tenemos que $g(1) = 1^2 = 1$. El punto de corte es el punto $B(1, 1)$.

Los dos puntos de corte de las gráficas son $A(-1, 1)$ y $B(1, 1)$.

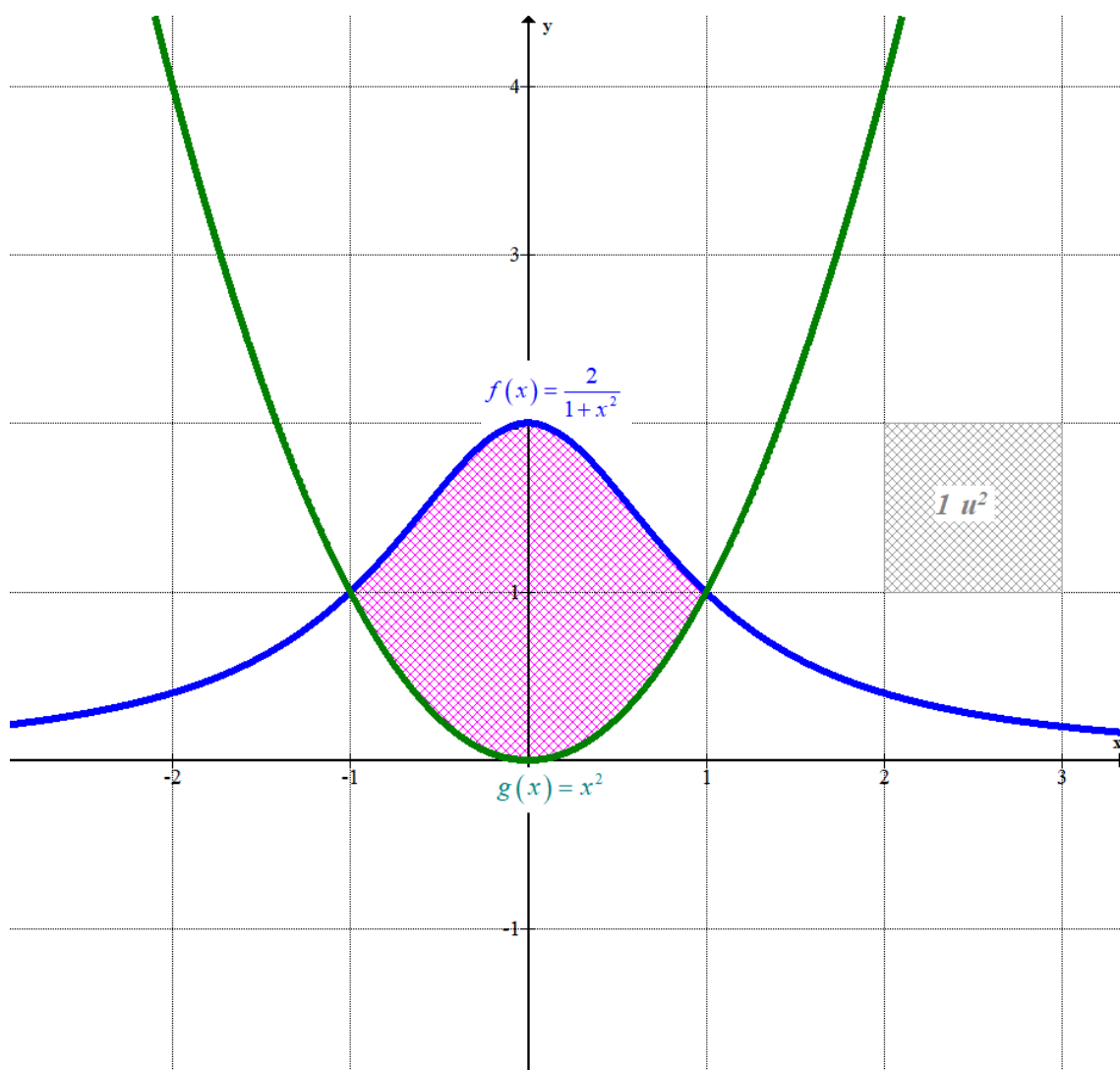
b) El área del recinto limitado por ambas curvas es el valor de la integral definida entre -1 y 1 de la diferencia entre las dos funciones. Como $f(0) = \frac{2}{1+0^2} = 2$ y $g(0) = 0^2 = 0$ la función $f(x)$ toma valores superiores a la función $g(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$. El integrando será $f(x) - g(x)$.

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2} - x^2 dx = 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_{-1}^1 x^2 dx =$$

$$= 2 \left[\arctg(x) \right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2(\arctg(1) - \arctg(-1)) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) =$$

$$= 2 \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] - \frac{2}{3} = \boxed{\pi - \frac{2}{3} \cong 2.47 \text{ u}^2}$$

Dibujamos las gráficas de las funciones, la región e indicamos cuanto es 1 unidad cuadrada en el dibujo para comprobar si la solución obtenida puede ser correcta.



5: Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1} \quad y \quad s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}.$$

- a) [1 p.] Justifique que ambas rectas se cruzan en el espacio.
 b) [0,5 p.] Compruebe que el punto del origen $O(0,0,0)$ no está en ninguna de las dos rectas
 c) [1 p.] Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto del origen y corta a ambas rectas.

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,0,-3) \\ \vec{u}_r = (2,1,-1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ z = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 2 - x \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} Q_s(0,0,2) \\ \vec{v}_s = (1,2,-1) \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales y por tanto las rectas no son ni coincidentes ni paralelas y deben cruzarse o cortarse.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2,1,-1) \\ \vec{v}_s = (1,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-1}$$

Para ver si se cortan o cruzan calculamos el producto mixto de $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2,1,-1) \\ \vec{v}_s = (1,2,-1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (0,0,2) - (1,0,-3) = (-1,0,5) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r; \vec{v}_s; \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 1 + 0 - 2 - 5 - 0 = 14 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan en el espacio (distinta dirección y en planos distintos).

b) Comprobamos si el punto del origen $O(0,0,0)$ pertenece a la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1} \\ \text{¿} O(0,0,0) \in r? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{0-1}{2} = \frac{0}{1} = \frac{0+3}{-1} ? \Rightarrow \frac{-1}{2} \neq 0 \neq -3$$

No se cumplen las igualdades y la recta r no pasa por el punto O .

Comprobamos si el punto del origen $O(0,0,0)$ pertenece a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases} \\ \text{¿} O(0,0,0) \in s? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \begin{cases} 2 \cdot 0 - 0 = 0 \\ 0 + 0 = 2 \end{cases} ? \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 \neq 2 \end{cases}$$

No se cumple una de las igualdades y la recta s no pasa por el punto O .

- c) Debemos de hallar un punto A de la recta r y otro punto B de la recta s tal que los puntos O , A y B estén alineados, es decir, los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ deben tener coordenadas proporcionales. Obtenemos las ecuaciones paramétricas de las rectas y la expresión genérica de un punto de cada recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 0, -3) \\ \vec{u}_r = (2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow A(1 + 2\lambda, \lambda, -3 - \lambda)$$

$$s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} Q_s(0, 0, 2) \\ \vec{v}_s = (1, 2, -1) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases} \Rightarrow B(\alpha, 2\alpha, 2 - \alpha)$$

Hallamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ y le aplicamos que deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= (\alpha, 2\alpha, 2 - \alpha) - (0, 0, 0) = (\alpha, 2\alpha, 2 - \alpha) \\ \overrightarrow{OA} &= (1 + 2\lambda, \lambda, -3 - \lambda) - (0, 0, 0) = (1 + 2\lambda, \lambda, -3 - \lambda) \\ \overrightarrow{OB} &\parallel \overrightarrow{OA} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{1 + 2\lambda} = \frac{2\alpha}{\lambda} = \frac{2 - \alpha}{-3 - \lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{1 + 2\lambda} = \frac{2\alpha}{\lambda} \rightarrow \alpha\lambda = 2\alpha(1 + 2\lambda) \rightarrow \{\alpha \neq 0\} \rightarrow \lambda = 2 + 4\lambda \rightarrow -2 = 3\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha}{\lambda} = \frac{2 - \alpha}{-3 - \lambda} \rightarrow \frac{2\alpha}{-2/3} = \frac{2 - \alpha}{-3 + 2/3} \rightarrow -3\alpha = \frac{2 - \alpha}{-7/3} \rightarrow 7\alpha = 2 - \alpha \rightarrow 8\alpha = 2 \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\text{¿Puede ser } \alpha = 0? \text{ Si } \alpha = 0 \Rightarrow \frac{0}{1 + 2\lambda} = \frac{0}{\lambda} = \frac{2}{-3 - \lambda} \Rightarrow 0 = \frac{2}{-3 - \lambda} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

$$\text{Si } \lambda = -\frac{2}{3} \Rightarrow A\left(1 - \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -3 + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow B\left(\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, 2 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

La recta pedida es la recta t que pasa por el punto del origen O y por el punto A de la recta r .

$$\left. \begin{aligned} A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right) &\in t \\ O(0, 0, 0) &\in t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{u}_t = \overrightarrow{OA} &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right) \rightarrow \vec{v}_t = (1, 2, 7) \\ O(0, 0, 0) &\in t \end{aligned} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 7\lambda \end{cases}$$

Comprobamos que esta recta t hallada pasa por el punto B de la recta s .

$$t: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 7\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} = \lambda \\ \frac{1}{2} = 2\lambda \rightarrow \frac{1}{4} = \lambda? \\ \frac{7}{4} = 7\lambda \rightarrow \frac{1}{4} = \lambda \end{cases}$$

$$\text{¿} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \in t?$$

Se cumplen las igualdades y la recta t es la recta que pasa por el origen y corta a ambas rectas r y s en los puntos A y B hallados anteriormente.

6: Considere los puntos $A(-1, 2, 2)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(-4, 5, 2)$.

- a) **[0,75 p.]** Justifique que los tres puntos están alineados y calcule la ecuación de la recta que los contiene (en cualquiera de sus formas).
 b) **[0,75 p.]** Calcule la distancia del punto $P(1, 1, -1)$ a dicha recta.
 c) **[1 p.]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a dicha recta y pasa por el punto $P(1, 1, -1)$

- a) Para que los tres puntos estén alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales.

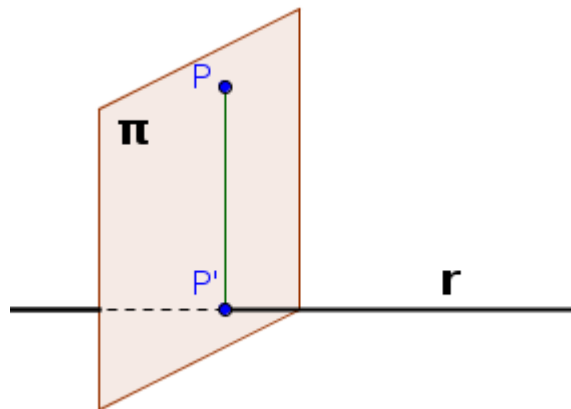
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (-1, 2, 2) = (2, -2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-4, 5, 2) - (-1, 2, 2) = (-3, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$$

Se cumple que los vectores tienen coordenadas proporcionales y los puntos A, B y C están alineados.

Calculamos la ecuación de la recta r que contiene los tres puntos.

$$\left. \begin{array}{l} B(1, 0, 2) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

- b) Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. Dicho plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$\left. \begin{array}{l} P(1, 1, -1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (2, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x - 2y + D = 0 \\ P(1, 1, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: 2x - 2y = 0 \Rightarrow \pi: x - y = 0$$

Hallamos el punto P' intersección del plano π y la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x - y = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2\lambda - (-2\lambda) = 0 \Rightarrow 1 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 4\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \frac{-1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = -2 \frac{-1}{4} = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow P' \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right)$$

La distancia del punto P a la recta r es la distancia del punto P al punto P' .

$$\overrightarrow{PP'} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right) - (1, 1, -1) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 3 \right)$$

$$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 3^2} = \boxed{\frac{\sqrt{38}}{2} \approx 3.08 \text{ unidades}}$$

- c) El plano π' que contiene a dicha recta y pasa por el punto $P(1, 1, -1)$ es el plano (por ejemplo) que contiene a los puntos P, A y B.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 1, -1) \in \pi' \\ A(-1, 2, 2) \in \pi' \\ B(1, 0, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (-1, 2, 2) = (2, -2, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AP} = (1, 1, -1) - (-1, 2, 2) = (2, -1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6(x-1) + 0 - 2(z+1) + 4(z+1) + 6(y-1) - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 6 - 2z - 2 + 4z + 4 + 6y - 6 = 0 \Rightarrow 6x + 6y + 2z - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 3x + 3y + z - 5 = 0}$$

- 7:** En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal si es necesario. El coeficiente intelectual (CI) de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica desconocida s . Se sabe que el 21,19% de ellos tiene un CI mayor que 110.
- a) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un CI mayor que 90.
- b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución de probabilidad.
- c) **[0,75 p.]** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un CI menor que 80,625.

Si llamamos X = “El coeficiente intelectual (CI) de los individuos de una población” se trata de una distribución normal.

$$X = N(100, s)$$

Averiguamos el valor de s a partir de los datos del ejercicio.

$$\text{“El 21,19% de ellos tiene un CI mayor que 110”} \rightarrow P(X \geq 110) = 0.2119.$$

$$P(X \geq 110) = 0.2119 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{s} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{110 - 100}{s}\right) = 0.2119 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{10}{s}\right) = 0.2119 \Rightarrow 1 - 0.2119 = P\left(Z < \frac{10}{s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{10}{s}\right) = 0.7881 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{10}{s} = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = 0.8s \Rightarrow s = \frac{10}{0.8} = 12.5$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5098	0.5138
0.2	0.5193	0.5232
0.3	0.5279	0.5317
0.4	0.5354	0.5391
0.5	0.5415	0.5450
0.6	0.5475	0.5509
0.7	0.5524	0.5558
0.8	0.5581	0.5615
0.9	0.5624	0.5658

La distribución X es una normal $N(100, 12.5)$

- a) Nos piden calcular $P(X > 90)$.

$$P(X > 90) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{s} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{90 - 100}{12.5}\right) = P(Z > -0.8) = P(Z < 0.8) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.7881}$$

b) El valor de la desviación típica ya lo hemos calculado y tiene un valor de 12.5.

c) Nos piden calcular $P(X < 80.625)$.

$$P(X < 80.625) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{s} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{80.625 - 100}{12.5}\right) = P(Z < -1.55) = P(Z \geq 1.55) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.55) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9394 = \boxed{0.0606}$$

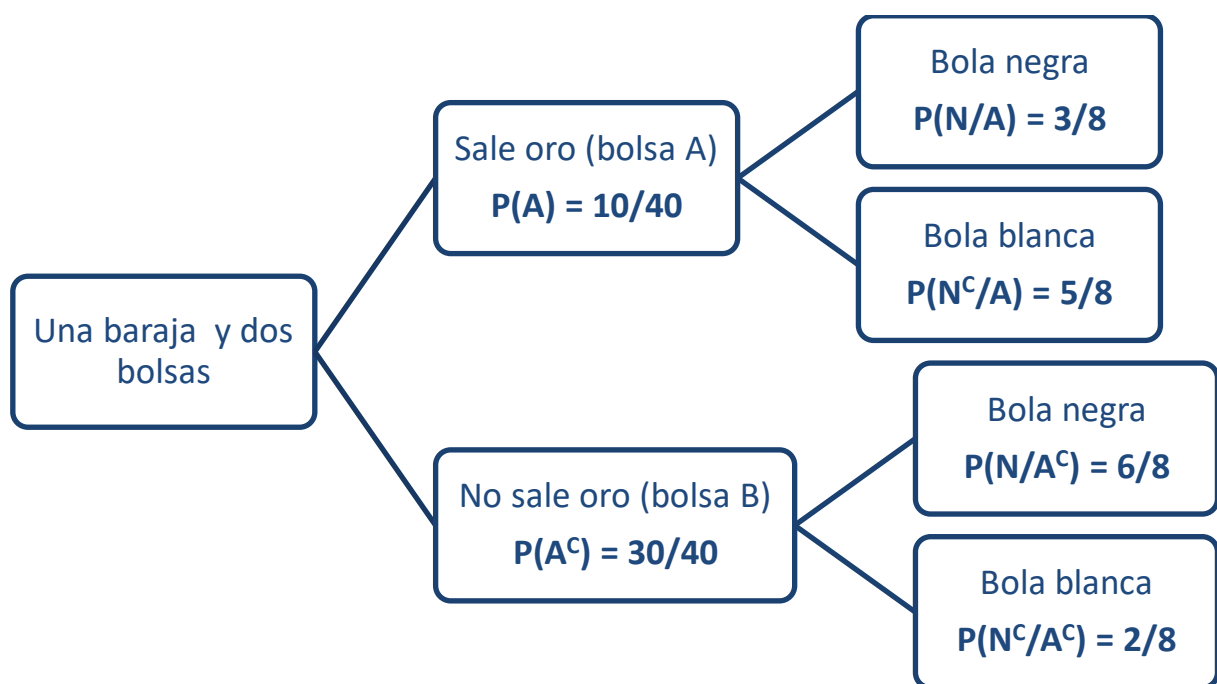
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515

8: Se tienen 2 bolsas con el siguiente contenido: la bolsa A tiene 5 bolas blancas y 3 bolas negras; la bolsa B tiene 2 bolas blancas y 6 bolas negras. Se toma una baraja española de 40 cartas (10 oros, 10 copas, 10 bastos y 10 espadas) y se saca una carta al azar. Si sale oro se saca una bola de la bolsa A; si no sale oro, se saca una bola de la bolsa B.

- a) **[0,5 p.]** Calcule la probabilidad de que se saque una bola de la bolsa A y la probabilidad de que se saque una bola de la bolsa B.
 b) **[1 p.]** Calcule la probabilidad de sacar una bola negra.
 c) **[1 p.]** Sabiendo que se ha sacado una bola negra, calcule la probabilidad de que sea de la bolsa B.

Llamamos A al suceso “Sacar oros al elegir una carta de la baraja española (urna A)” y A^C al suceso contrario “No sacar oros al elegir una carta de la baraja española (urna B)”. También llamamos N a sacar bola negra de la bolsa” y N^C al suceso contrario “sacar bola blanca de la bolsa”.

Realizamos un diagrama de árbol para entender mejor que pasa y con que probabilidad en el experimento aleatorio del ejercicio.



- a) Nos piden calcular $P(A)$. Ya lo hemos indicado en el diagrama de árbol. He aplicado la regla de Laplace. Para sacar bola de la bolsa A debemos sacar una carta de oros (hay 10) de una baraja de 40 cartas.

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ casos favorables}}{N^{\circ} \text{ casos posibles}} = \frac{10}{40} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

Para calcular la probabilidad de sacar una bola de la urna B usamos que es el suceso contrario o complementario de A.

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0.25 = \boxed{0.75}$$

- b) Nos piden calcular $P(N)$. Puede suceder de distintas maneras, aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(N) = P(A)P(N/A) + P(A^c)P(N/A^c) = \frac{10}{40} \cdot \frac{3}{8} + \frac{30}{40} \cdot \frac{6}{8} = \boxed{\frac{21}{32} = 0.6562}$$

c) Nos piden calcular $P(A^c/N)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A^c/N) = \frac{P(A^c \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A^c)P(N/A^c)}{P(N)} = \frac{\frac{30}{40} \cdot \frac{6}{8}}{\frac{21}{32}} = \boxed{\frac{6}{7} \approx 0.8571}$$