

Pruebas de Acceso para Mayores de 25 años	Convocatoria: 2023	 SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO  GENERALITAT VALENCIANA Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital
Asignatura: MATEMÀTICAS		

OBSERVACIONES: SE RESOLVERÁN SÓLO TRES PROBLEMAS. TODOS LOS PROBLEMAS DESARROLLADOS SE EVALUARÁN DE 0 A 10 PUNTOS, EN FUNCIÓN DEL PLANTEAMIENTO, INTERPRETACIÓN, RESOLUCIÓN, DISCUSIÓN, EXPOSICIÓN Y PRESENTACIÓN. LA CALIFICACIÓN FINAL SE OBTENDRÁ DIVIDIENDO ENTRE 3 LA SUMA DE LAS PUNTUACIONES OBTENIDAS.

SE PERMITE LA UTILIZACIÓN DE CUALQUIER TIPO DE CALCULADORA, PROHIBIENDO EL ALMACENAMIENTO EN LA MEMORIA DE INFORMACIÓN SOBRE LOS TEMAS.

PROBLEMA 1.

- a) (Se calificará de 0 a 7 puntos) Factorizar el polinomio $p(x) = 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.
- b) (Se calificará de 0 a 3 puntos) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$?

PROBLEMA 2.

Resolver razonadamente los dos apartados siguientes:

- a) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Obtener la ecuación general de la recta que pasa por el punto $Q = (3, -7)$ y es paralela a la recta $r: -2x + 3y + 7 = 0$.
- b) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Calcular la distancia del punto $P = (1, -2)$ a la recta r del apartado anterior.

PROBLEMA 3.

Resolver razonadamente los dos apartados siguientes:

- a) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Obtener $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 - x + 2}{x^2 - 4}$.
- b) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Calcular la derivada primera de la función $f(x) = e^{x^3 \sin x}$.

PROBLEMA 4.

(Se calificará de 0 a 10 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$, calcular y clasificar razonadamente sus extremos.

PROBLEMA 5. (Se calificará de 0 a 10 puntos)

La tabla siguiente muestra los datos sobre la altura (en metros) de un grupo de 50 estudiantes

Altura	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
Nº de estudiantes	4	9	10	7	4	5	6	3	2

Obtener razonadamente la altura media así como la desviación típica de la altura de esta muestra de estudiantes.

Soluciones

PROBLEMA 1.

a) (Se calificará de 0 a 7 puntos) Factorizar el polinomio $p(x) = 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.

b) (Se calificará de 0 a 3 puntos) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación

$$6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0?$$

a) Comenzamos a factorizar buscando sus raíces con el método de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 7 & -3 & -3 & 1 \\ -1 & & -6 & -1 & 4 & -1 \rightarrow x = -1 \text{ es raíz} \\ \hline & 6 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & & -6 & 5 & -1 & \\ \hline & 6 & -5 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow x = -1 \text{ es raíz}$$

$$p(x) = 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x+1)(6x^2 - 5x + 1) = (x+1)^2(6x^2 - 5x + 1)$$

$$6x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(6)(1)}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = x \text{ es raíz} \\ \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = x \text{ es raíz} \end{cases}$$

$$p(x) = (x+1)^2(6x^2 - 5x + 1) = 6(x+1)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

La factorización del polinomio es $p(x) = 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 6(x+1)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right)$

b) Las soluciones de la ecuación $6x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ son las raíces del polinomio $p(x)$ obtenidas en el apartado anterior.

Las soluciones son $x = -1$; $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$.

PROBLEMA 2.

Resolver razonadamente los dos apartados siguientes:

- a) **(Se calificará de 0 a 5 puntos)** Obtener la ecuación general de la recta que pasa por el punto $Q = (3, -7)$ y es paralela a la recta $r: -2x + 3y + 7 = 0$.
- b) **(Se calificará de 0 a 5 puntos)** Calcular la distancia del punto $P = (1, -2)$ a la recta r del apartado anterior.

- a) La recta s paralela a $r: -2x + 3y + 7 = 0$ tiene la misma pendiente. Obtenemos la pendiente de r que será la pendiente de la recta s pedida.

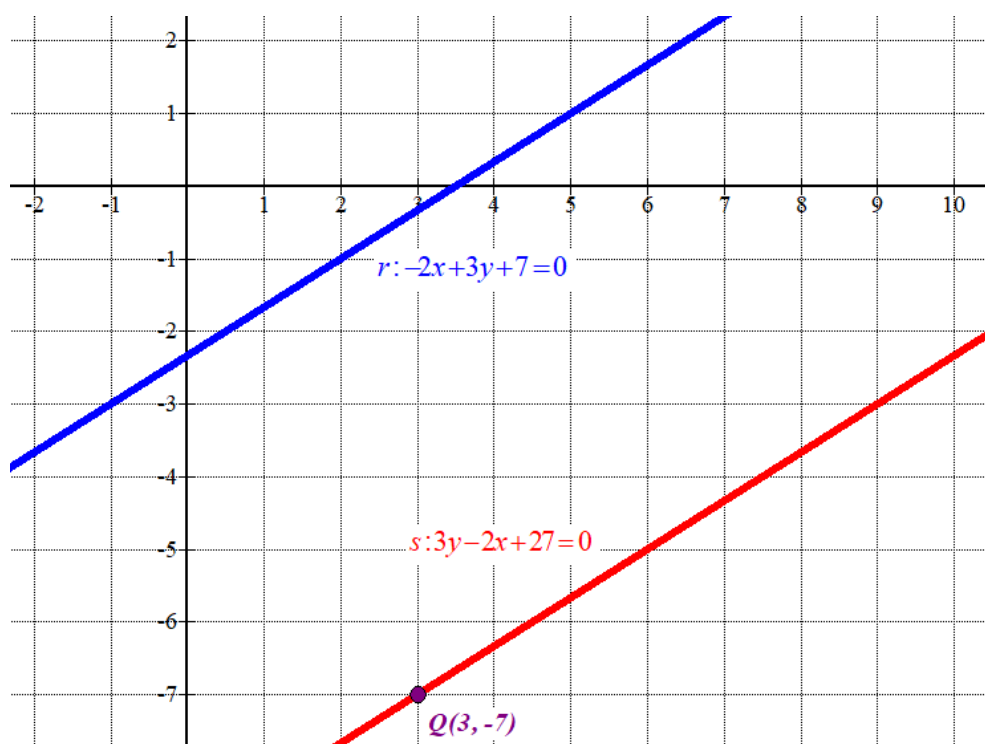
$$r: -2x + 3y + 7 = 0 \Rightarrow 3y = 2x - 7 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \Rightarrow m_r = \frac{2}{3}$$

Hallamos la recta s con pendiente $m_s = m_r = \frac{2}{3}$ y que pasa por el punto $Q = (3, -7)$.

$$\left. \begin{array}{l} m_s = \frac{2}{3} \\ Q(3, -7) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-7) = \frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y + 7 = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow$$

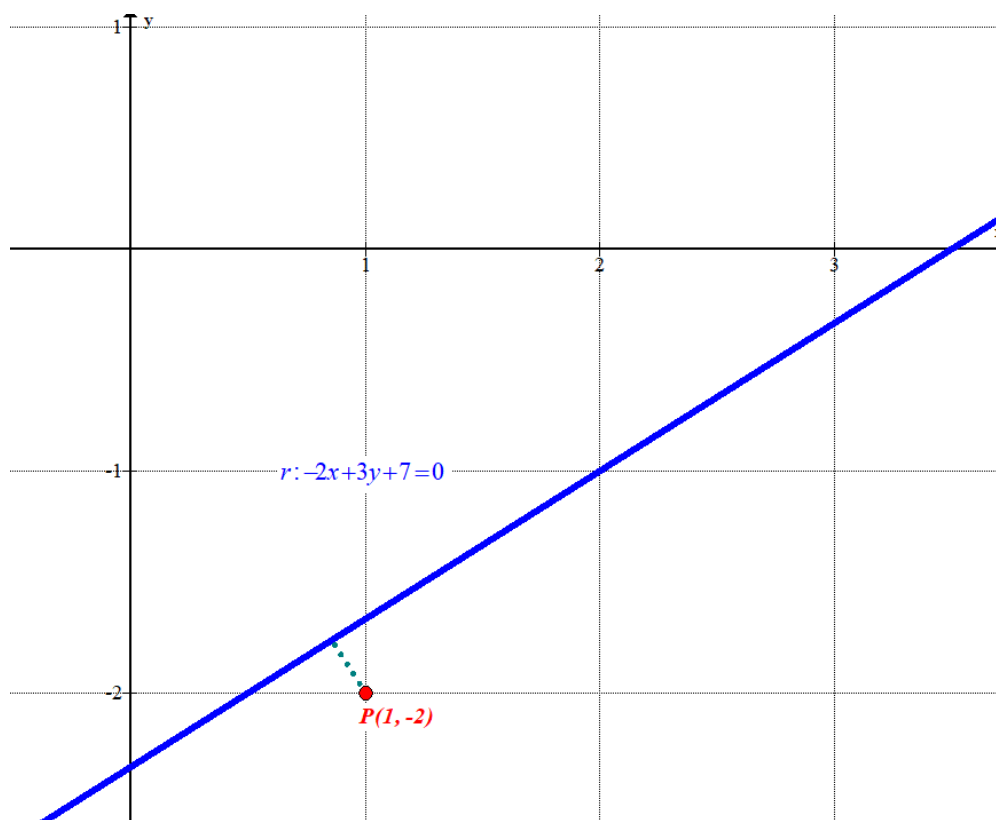
$$\Rightarrow 3y + 21 = 2x - 6 \Rightarrow \boxed{s: 3y - 2x + 27 = 0}$$

La recta que pasa por el punto $Q = (3, -7)$ y es paralela a la recta $r: -2x + 3y + 7 = 0$ tiene ecuación $s: 3y - 2x + 27 = 0$.



- b) Utilizamos la fórmula de la distancia de punto a recta en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2) \\ r: -2x + 3y + 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, r) = \frac{|-2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \approx 0.28 \text{ unidades}$$



PROBLEMA 3.

Resolver razonadamente los dos apartados siguientes:

a) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Obtener $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 - x + 2}{x^2 - 4}$.

b) (Se calificará de 0 a 5 puntos) Calcular la derivada primera de la función $f(x) = e^{x^3 \sin x}$.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 - x + 2}{x^2 - 4} = \frac{2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 2 + 2}{2^2 - 4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \dots$$

Factorizamos los polinomios del numerador y el denominador de la fracción.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & & 4 & 0 & -2 \\ \hline & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow 2x^3 - 4x^2 - x + 2 = (x - 2)(2x^2 - 1)$$

Lo aplicamos al cálculo del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 - x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(2x^2 - 1)}{\cancel{(x-2)}(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 1}{x + 2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 1}{2 + 2} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

b) Aplicamos la regla de la cadena para el cálculo de la derivada de la función.

$$f(x) = e^{x^3 \sin x} \Rightarrow f'(x) = e^{x^3 \sin x} \cdot (3x^2 \sin x + x^3 \cos x) = x^2 (3 \sin x + x \cos x) e^{x^3 \sin x}$$

PROBLEMA 4.

(Se calificará de 0 a 10 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$, calcular y clasificar razonadamente sus extremos.

Utilizamos la derivada de la función para buscar sus puntos críticos.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x=1$ y $x=3$.

Sustituimos estos valores en la segunda derivada para comprobar si son máximo o mínimo relativo.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \\ x=3 \rightarrow f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \end{cases}$$

Al ser $f''(1) = -6 < 0$ la función tiene un máximo relativo en $x=1$. Como

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 5 = 9 \text{ las coordenadas del máximo relativo son } (1, 9)$$

Al ser $f''(3) = 6 > 0$ la función tiene un mínimo relativo en $x=3$. Como

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 5 = 5 \text{ las coordenadas del mínimo relativo son } (3, 5)$$

PROBLEMA 5. (Se calificará de 0 a 10 puntos)

La tabla siguiente muestra los datos sobre la altura (en metros) de un grupo de 50 estudiantes

Altura	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
Nº de estudiantes	4	9	10	7	4	5	6	3	2

Obtener razonadamente la altura media así como la desviación típica de la altura de esta muestra de estudiantes.

La media se calcula con la fórmula $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N}$ y la varianza $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - (\bar{x})^2$.

Realizamos una tabla para el cálculo más cómodo de los sumatorios de las fórmulas.

Altura (x_i)	Nº de estudiantes (f_i)	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1.50	4	6	9
1.55	9	13.95	21.6225
1.60	10	16	25.6
1.65	7	11.55	19.0575
1.70	4	6.8	11.56
1.75	5	8.75	15.3125
1.80	6	10.8	19.44
1.85	3	5.55	10.2675
1.90	2	3.8	7.22
TOTAL	N = 50	83.2	139.08

La media de altura de la muestra es $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{83.2}{50} = 1.664$ metros.

La varianza de la altura de la muestra es $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{139.08}{50} - 1.664^2 = 0.012704$ y

la desviación típica es $\sigma = \sqrt{0.012704} = 0.1127$ metros.