



Universidad
Zaragoza

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2024
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final se calculará sumando las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividiendo dicha suma por tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial

$$AX + 3B = C \text{ esté bien planteada, siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Resuelva la ecuación matricial despejando previamente } X.$$

b.- (5 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7.100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?

2.- (10 puntos) Una empresa produce dos productos, A y B , con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible del apartado **a.-** y una nueva función objetivo dada por: $\max f(x, y) = 30x + by$, donde b es un valor desconocido. Razone que $(40, 40)$ no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con $(20, 20)$.

3.- (10 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50$, $0 \leq x \leq 8$.

a.- (4 puntos) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ cuando $x \in [0, 8]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b.- (3 puntos) ¿ $f(x)$ tiene algún punto de inflexión? Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_1^3 f(x) dx$.

- 4.- (10 puntos)** La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \frac{100t}{10 + 2t}$ €, siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.
- a.- (3 puntos)** Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.
- b.- (4 puntos)** Calcule $V'(t)$ y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en **a.-** para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$ sea igual a 125 €.
- c.- (3 puntos)** ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175 €?
- 5.- (10 puntos)** Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.
- a.- (3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas?
- b.- (4 puntos)** Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?
- c.- (3 puntos)** Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?
- 6.- (10 puntos)** En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.
- a.- (5 puntos)** Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98% para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.
- b.- (2 puntos)** El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75% de los votos. A la vista de los resultados del apartado **a.-**, ¿es razonable tal afirmación?
- c.- (3 puntos)** Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62% de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $AX + 3B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X .

b.- (5 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7.100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m \times n$ tenemos que

$$\begin{array}{c} A \cdot X + 3B \\ 2 \times \boxed{2 \cdot m} \times n + 2 \times 3 \rightarrow 2 \times 3 \end{array}$$

El producto AX es posible si $m = 2$ y se obtiene una matriz $2 \times n$.

$$\begin{array}{c} A \cdot X \\ 2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times n \rightarrow 2 \times n \end{array}$$

Para que sea posible la suma $AX + 3B$ las dos matrices tienen que tener las mismas dimensiones y para ello debe ser $n = 3$, obteniéndose una matriz 2×3 con las mismas dimensiones que la matriz C .

$$\begin{array}{c} A \cdot X + 3B = C \\ 2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 + 2 \times 3 \rightarrow 2 \times 3 \end{array}$$

Las dimensiones de la matriz X deben ser 2×3 .

Resolvemos la ecuación matricial $AX + 3B = C$. Despejamos X .

$$AX + 3B = C \Rightarrow AX = C - 3B \Rightarrow X = A^{-1}(C - 3B)$$

Hallamos la matriz inversa de A y determinamos la expresión de la matriz X .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-4 & 3-1 & -2+4 \\ 10+4 & -6+1 & 4-4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 14 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

b.- Llamamos “x” al número de participaciones de 10 € vendidas, “y” al número de participaciones de 25 € vendidas y “z” al número de participaciones de 5 €.

Han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros $\rightarrow x = \frac{y}{2}$

Han recaudado 7.100 € $\rightarrow 10x + 25y + 5z = 7100$

Han vendido 430 participaciones $\rightarrow x + y + z = 430$

Reuniendo las tres ecuaciones tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 430 \\ x = \frac{y}{2} \\ 10x + 25y + 5z = 7100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 430 \\ 2x = y \\ 2x + 5y + z = 1420 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 430 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 5y + z = 1420 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema con técnicas matriciales.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 430 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 5y + z = 1420 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ hallamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 10 + 2 - 2 - 0 = 9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Utilizamos lo obtenido para resolver el sistema.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -430 + 1420 \\ -860 + 2840 \\ 5160 - 4260 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 990 \\ 1980 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 220 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Se han vendido 110 participaciones de 10 €, 220 participaciones de 25 € y 100 de 10 €.
Calculamos las ganancias de estas ventas: $110 \cdot 2.5 + 220 \cdot 5 + 100 \cdot 1 = 1475$ €.

Las ganancias han sido de 1475 €.

2.- (10 puntos) Una empresa produce dos productos, A y B, con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible del apartado **a.-** y una nueva función objetivo dada por: $\max f(x, y) = 30x + by$. donde b es un valor desconocido. Razone que $(40, 40)$ no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con $(20, 20)$.

a.- Llamamos x = número de productos A, y = número de productos B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Mano de obra en horas	Unidades de material	Ganancias
Nº productos A (x)	$3x$	$2x$	$30x$
Nº productos B (y)	$2y$	$3y$	$40y$
TOTALES	$3x + 2y$	$2x + 3y$	$30x + 40y$

Queremos maximizar las ganancias: $G(x, y) = 30x + 40y$

Las restricciones son:

“Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material”

$\rightarrow 3x + 2y \leq 150; 2x + 3y \leq 150$.

“La producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos” $\rightarrow x + y \geq 20$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 150 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ x + y \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$3x + 2y = 150$$

$$2x + 3y = 150$$

$$x + y = 20$$

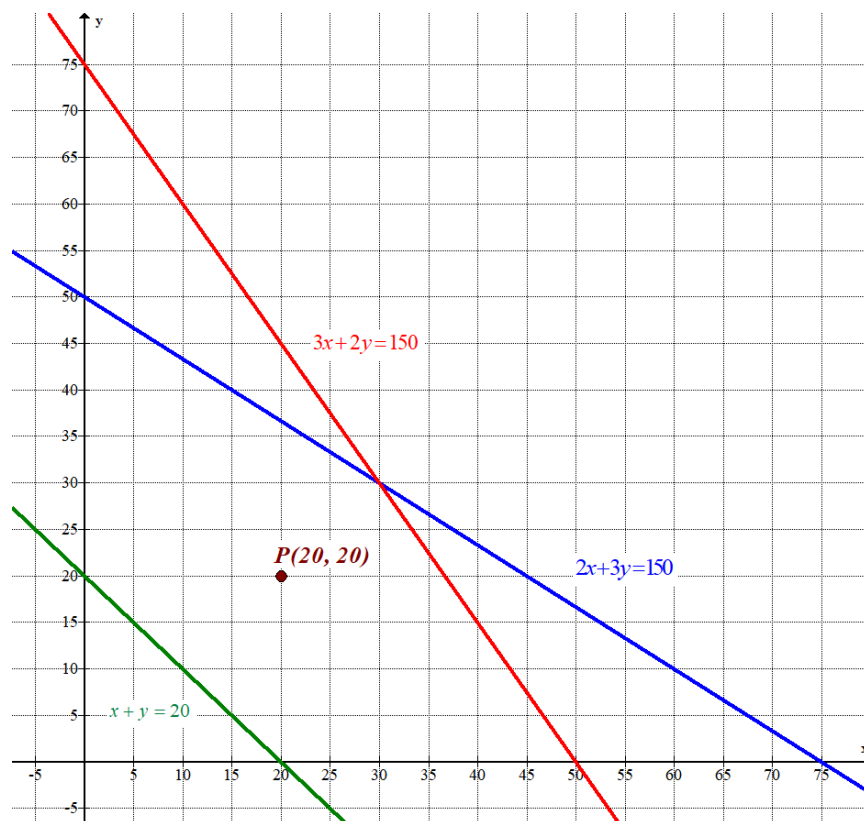
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{150 - 3x}{2}$
0	75
30	30
50	0

x	$y = \frac{150 - 2x}{3}$
0	50
30	30
75	0

x	$y = 20 - x$
0	20
20	0

Primer
cuadrante



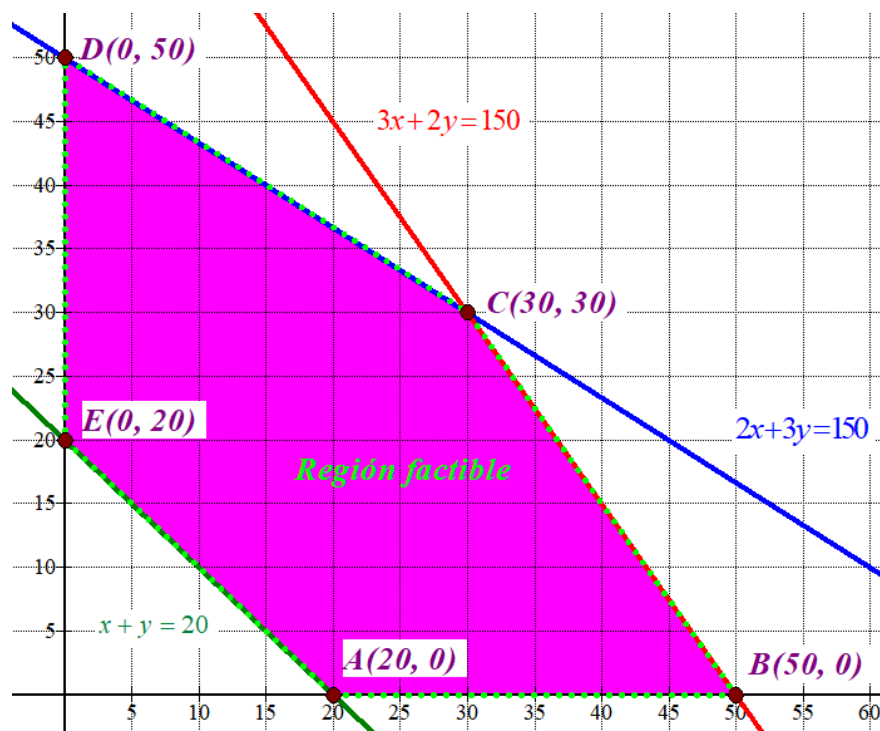
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 150 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ x + y \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de las rectas **roja** y **azul**, y por encima de la recta **verde**.
Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \leq 150 \\ 2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 \leq 150 \\ 20 + 20 \geq 20 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función ganancias $G(x, y) = 30x + 40y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(20, 0) \rightarrow G(20, 0) = 30 \cdot 20 + 40 \cdot 0 = 600$$

$$B(50, 0) \rightarrow G(50, 0) = 30 \cdot 50 + 40 \cdot 0 = 1500$$

$$C(30, 30) \rightarrow G(30, 30) = 30 \cdot 30 + 40 \cdot 30 = 2100 \text{ ¡Máximo!}$$

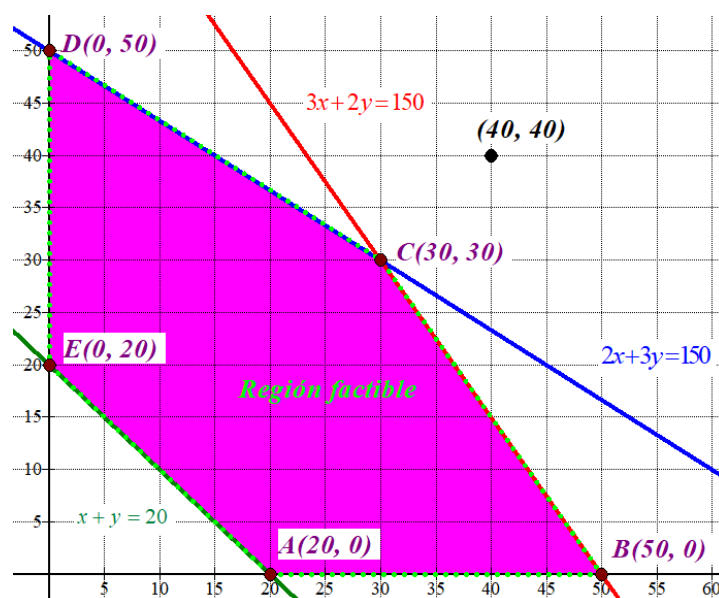
$$D(0, 50) \rightarrow G(0, 50) = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 50 = 2000$$

$$E(0, 20) \rightarrow G(0, 20) = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 20 = 800$$

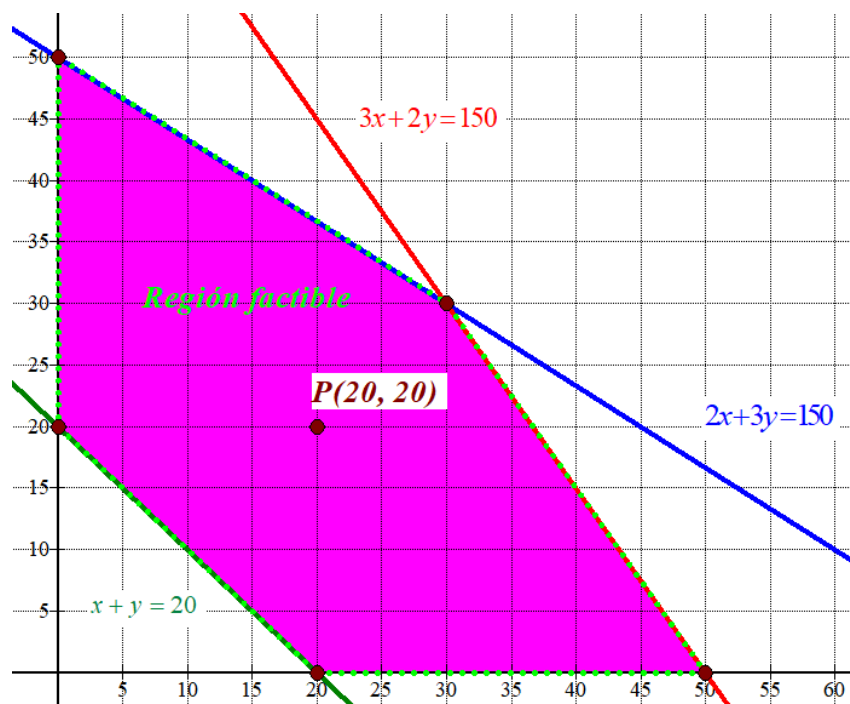
El valor máximo es 2100 y se obtiene en $C(30, 30)$.

Con 30 productos de cada tipo nos ajustamos a las restricciones y obtenemos una máxima ganancia por valor de 2100 €.

- b.-** El punto $(40, 40)$ está situado fuera de la región factible y no cumple las restricciones del problema. No puede ser solución del problema.



El punto $(20, 20)$ si pertenece a la región factible y el punto cumple las restricciones, pero no puede ser solución óptima pues es un punto interior de la región factible. Cualquier solución óptima debe estar situada en las rectas que delimitan la región.



3.- (10 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50$, $0 \leq x \leq 8$.

a.- (4 puntos) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ cuando $x \in [0, 8]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b.- (3 puntos) ¿ $f(x)$ tiene algún punto de inflexión? Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_1^3 f(x) dx$.

a.- Utilizamos la derivada para averiguar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 18x + 40 = 0 \Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(3)(40)}}{2(3)} =$$

$$= \frac{18 \pm \sqrt{-156}}{6} = \text{No existe}$$

La derivada nunca se anula. Como $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 18 + 40 = 25 > 0$ la derivada siempre es positiva y la función es creciente en su intervalo de definición $[0, 8]$.

El valor mínimo de la función está en $x = 0$ y el máximo en $x = 8$.

El valor mínimo de la función es $f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 40 \cdot 0 + 50 = 50$ y el valor máximo es

$$f(8) = 8^3 - 9 \cdot 8^2 + 40 \cdot 8 + 50 = 306. \text{ Ambos son extremos absolutos.}$$

b.- Calculamos la derivada segunda y buscamos los valores donde se anula.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow f''(x) = 6x - 18 \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Comprobamos si la derivada tercera en $x = 3$ no se anula.

$$f''(x) = 6x - 18 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(3) = 6 \neq 0$$

Al ser un valor distinto de cero la función tiene un punto de inflexión en $x = 3$.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = 6 - 18 = -12 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $[0, 3)$.

- En el intervalo $(3, 8]$ tomamos $x = 5$ y la derivada segunda vale $f''(5) = 30 - 18 = 12 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(3, 8]$.

La función tiene un punto de inflexión en $x = 3$, es cóncava en $[0, 3)$ y convexa en $(3, 8]$.

c.- Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 x^3 - 9x^2 + 40x + 50 dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 20x^2 + 50x \right]_1^3 = \\ &= \left[\frac{3^4}{4} - 3 \cdot 3^3 + 20 \cdot 3^2 + 50 \cdot 3 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 3 \cdot 1^3 + 20 \cdot 1^2 + 50 \cdot 1 \right] = \\ &= \frac{81}{4} - 81 + 180 + 150 - \frac{1}{4} + 3 - 20 - 50 = \boxed{202} \end{aligned}$$

4.- (10 puntos) La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \frac{100t}{10 + 2t}$ €, siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

a.- (3 puntos) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (4 puntos) Calcule $V'(t)$ y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en **a.-** para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$ sea igual a 125 €.

c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175 €?

a.- Nos piden calcular $V(0)$.

$$V(0) = 200 - \frac{100 \cdot 0}{10 + 2 \cdot 0} = 200 - \frac{0}{10} = 200 \text{ €}$$

El valor inicial del dispositivo es de 200 €.

Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 200 - \frac{100t}{10 + 2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 200 - \frac{\frac{100t}{t}}{\frac{10}{t} + \frac{2t}{t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 200 - \frac{100}{\frac{10}{t} + 2} = 200 - \frac{100}{\frac{10}{\infty} + 2} = 200 - \frac{100}{2} = \boxed{150 \text{ €}} \end{aligned}$$

El valor del dispositivo en un horizonte infinito de tiempo es de 150 €.

b.- Calculamos la derivada de la función.

$$V'(t) = -\frac{100(10 + 2t) - 2(100t)}{(10 + 2t)^2} = -\frac{1000 + 200t - 200t}{(10 + 2t)^2} = \frac{-1000}{(10 + 2t)^2}$$

El numerador de la derivada (-1000) es constante y negativo, el denominador $((10 + 2t)^2)$ es siempre positivo, salvo en $t = -5$ que se anula, pero no pertenece al intervalo $[0, +\infty)$. El cociente es siempre negativo. La función $V(t)$ es siempre decreciente.

El máximo absoluto es $V(0) = 200$ €, la función decrece alcanzando en un horizonte infinito de tiempo un valor de 150 €, por lo que es imposible que el dispositivo alcance un valor inferior a 150 €, en particular no puede alcanzar un precio de 125 €.

c.- Igualamos la función a 175.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} V(t) = 200 - \frac{100t}{10 + 2t} \\ V(t) = 175 \end{array} \right\} &\Rightarrow 200 - \frac{100t}{10 + 2t} = 175 \Rightarrow 25 = \frac{100t}{10 + 2t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 250 + 50t = 100t \Rightarrow 250 = 50t \Rightarrow \boxed{t = \frac{250}{50} = 5} \end{aligned}$$

El dispositivo alcanza un valor de 175 € al cabo de 5 años.

- 5.- (10 puntos)** Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.
- a.- (3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas?
- b.- (4 puntos)** Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?
- c.- (3 puntos)** Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?

Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de respuestas correctas de un grupo de 4.

El número de repeticiones es $n = 4$ y la probabilidad de éxito es $p = 0.7$.

X es una variable binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 0.7$. $X = B(4, 0.7)$

- a.-** Nos piden calcular $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} 0.7^4 \cdot 0.3^0 = 0.7^4 = \boxed{0.2401}$$

La probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas es de 0.2401.

- b.-** Nos piden calcular $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{2} 0.7^2 \cdot 0.3^2 + \binom{4}{3} 0.7^3 \cdot 0.3^1 + 0.2401 = \\ &= 6 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^2 + 4 \cdot 0.7^3 \cdot 0.3 + 0.2401 = \boxed{0.9163} \end{aligned}$$

La probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen es de 0.9163.

- c.-** Si llamamos A al suceso aprobar el examen y B al suceso contestar correctamente todas las preguntas. Nos piden calcular $P(B/A)$. Hemos calculado en los apartados anteriores

$P(A) = 0.9163$ y $P(B) = 0.2401$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \{A \cap B = B\} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.2401}{0.9163} = \boxed{\frac{49}{187} \approx 0.262}$$

Hemos utilizado que el suceso $A \cap B =$ “Aprobar el examen (A) y contestar correctamente a todas las preguntas (B)” es el mismo suceso que contestar correctamente a todas las preguntas (B).

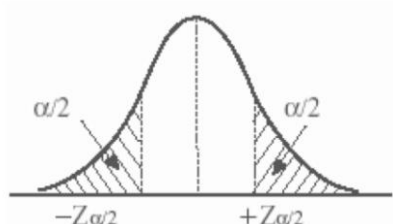
La probabilidad de que haya contestado correctamente todas las preguntas sabiendo que ha aprobado el examen es de 0.262.

- 6.- (10 puntos)** En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.
- a.- (5 puntos)** Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98% para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.
- b.- (2 puntos)** El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75% de los votos. A la vista de los resultados del apartado **a.-**, ¿es razonable tal afirmación?
- c.- (3 puntos)** Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62% de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

a.- $p = \frac{120}{200} = 0.6$ y $q = 1 - 0.6 = 0.4$.

Para un nivel de confianza del 98%

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5518	0.5558
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9903
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945

Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{200}} \approx 0.08$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.6 - 0.08, 0.6 + 0.08) = (0.52, 0.68)$$

- b.-** El porcentaje del 75% se corresponde con una proporción de 0.75 que no está incluido en el intervalo de confianza calculado en el apartado **a.-**

No es razonable la afirmación con el nivel de confianza del 98%.

- c.-** Consideramos la variable aleatoria X = Número de votantes a Rupérez de un grupo de 3 personas. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 3$ y $p = 0.62$. $X = B(3, 0.62)$
Nos piden calcular $P(X \geq 1)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} 0.62^0 \cdot 0.38^3 = 1 - 0.38^3 = 0.9451$$

La probabilidad de que al elegir 3 votantes con reemplazamiento al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez es 0.9451.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO C.

Si 0.62 es la probabilidad de que al elegir un votante este haya votado a Rupérez entonces la probabilidad de que no haya votado a Rupérez es de $1 - 0.62 = 0.38$.

Como la elección de los tres votantes es con reemplazamiento sabemos que cada una de las tres elecciones es independiente de las anteriores y en todas la probabilidad de elegir a un votante que no haya votado a Rupérez es de 0.38.

La probabilidad de que al elegir a tres votantes estos no hayan votado a Rupérez es el producto $0.38 \cdot 0.38 \cdot 0.38 = 0.0549$.

El suceso contrario de “al elegir a 3 votantes ninguno ha votado a Rupérez” es “Al elegir 3 votantes al menos uno ha votado a Rupérez”.

$$P(\text{Al elegir 3 votantes al menos uno ha votado a Rupérez}) = 1 - 0.0549 = 0.9451$$

La probabilidad de que al elegir 3 votantes con reemplazamiento al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez es 0.9451.