

Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat però fa bé els altres (segons les “seves” dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
 - Els errors de càlcul amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes de justificar, si la justificació és només “intuïtiva” (p. ex. una observació que no respon exhaustivament a allò que s'ha demanat), amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement “Càlcul i/o justificació correcta”.

P1. — Una fàbrica de vi de Mallorca produeix 3 tipus de vi: negre, blanc i rosat. Amb la finalitat de saber el preu de cada tipus de vi, hem comprat vi, el mateix dia i a la fàbrica mateixa, de 4 maneres diferents:

- comprant 3 botelles de vi negre i 2 de vi blanc hem pagat 67 €,
- comprant 2 botelles de vi negre, 4 de vi blanc i 1 de rosat hem pagat 85 €,
- comprant 1 botella de vi negre i 1 de vi rosat hem pagat 21 €, i finalment,
- comprant 4 botelles de vi blanc i 5 de vi rosat hem pagat 85 €.

- (a) **[3 punts]** Escriu, en forma matricial, el sistema d'equacions lineals que s'hauria de resoldre per poder descobrir el preu de cada tipus de vi.

Criteris: Si només escriuen la matriu 3×3 , han de justificar per què lleven ja una fila (-2 punts si no ho justifiquen). Es donarà 1 punt si escriuen el sistema correctament però no és en forma matricial. Es restarà 1 punt per cada nombre mal posat.

- (b) **[2 punts]** És necessari tenir les dades de les 4 compres per saber el preu de cada tipus de vi? Justifica la resposta.

Criteris: -1 punt si no justifiquen que les compres han de ser linealment independents.

- (c) **[5 punts]** Calcula quin és el preu de cada tipus de vi.

Criteris: -1 punt per error de càlcul.

P2. — Considerem les matrius A de dimensió 3×3 que satisfan que $3A + I = A^2$, on I és la matriu identitat de dimensió 3×3 .

- (a) **[3 punts]** Calcula l'expressió de la matriu inversa de A .

Criteris: Només 1 punt si han aïllat la I correctament però no han donat la solució.

- (b) **[3 punts]** Donada l'equació matricial

$$A + 3AX = 5I,$$

on A és una de les matrius de l'enunciat. Calcula, en funció només de la matriu A (no de la seva inversa) i de la identitat I , la matriu X . Quina dimensió té la matriu X ? Justifica la resposta.

Criteris: 2 punts per aïllar bé X . Ara bé, -1 punt si ho deixen en funció de A^{-1} . 1 punt si contesten bé la dimensió de X . Ara bé, -0.5 si la justificació no hi és o és incorrecta.

- (c) **[4 punts]** Calcula totes les matrius de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

que satisfan les condicions de l'enunciat.

Criteris: -0.5 punts per error de càlcul. Màxim 3 errors. Finalment, -1 punt si no queden clares les diferents combinacions de resultats.

P3. — Considerem els punts $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, -1, 3)$ i $C = (-1, 2, 1)$.

- (a) **[3 punts]** Calcula el punt D tal que $ABDC$ sigui un paral·lelogram.

Criteris: 1 punt per plantejar bé. 2 punts per la resolució. -0.5 per error de càlcul.

- (b) **[4 punts]** Calcula un dels punts E de l'espai de tal manera que la recta AE sigui perpendicular al pla ABC i que la distància entre els punts A i E sigui 1.

Criteris: 1 punt per plantejar bé que AE i ABC són perpendiculars; 1 punt per plantejar bé que la distància entre els punts val 1; i 2 punts per resoldre bé el problema. -0.5 per error de càlcul.

- (c) **[3 punts]** Escribeu l'equació d'un dels plans paral·lels al pla ABC que dista una unitat d'aquest.

Criteris: -1 punt per error de càlcul.

P4. — (a) **[5 punts]** Discuteix, segons els valors de a i b (paràmetres reals), la posició relativa dels plans

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \quad \text{i} \quad \pi_2 : 6x + y - 2z = b.$$

És a dir, si són coincidents, paral·lels o es tallen. En el darrer cas, especifica si ho fan perpendicularment.

Criteris: 1 punt per calcular bé els vectors normals (o altres vectors si ho fan per mitjà d'un procediment diferent). 1 punt per cada cas correcte

- (b) **[5 punts]** Calcula l'equació de la recta perpendicular al pla π i que passa pel punt de tall entre la recta s i el mateix pla π , sent

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta, \\ y = 3\beta, \\ z = 1 + \alpha, \end{cases} \quad \text{i} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1},$$

per a α i β valors reals qualssevol.

Criteris: 2 punts pel càlcul correcte de P . 2 punts per calcular bé el vector director de la recta. 1 punt per escriure una equació vàlida. -1 punt per error de càlcul.

P5. — **[10 punts]** Volem fer una tanca en un camp rectangular emprant diferents materials a cada costat. Començant pel fons del camp i movent-nos al voltant d'aquest en el sentit contrari a les agulles del rellotge, el cost del material per a cada costat és de 6 €/m, 9 €/m, 12 €/m i 14 €/m, respectivament. Si hem de gastar exactament 1000 € per comprar el material de tancament, determina les dimensions del camp que maximitzaran l'àrea tancada.

Criteris: 1 punt si indiquen qui és cada variable; 2 punts si escriuen bé la relació del cost; 2 punts si plantegen bé la funció a maximitzar; 2 punts per cada mida ben calculada; 1 punt si comproven que realment és un màxim.

P6. — Segui la funció

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1, & x \leq 0, \\ ax^2 + b(x + 3), & 0 < x \leq 1, \\ a \cos(\pi x) + 7bx, & x > 1. \end{cases}$$

- (a) **[5 punts]** Calcula els valors de a i b per als quals la funció $f(x)$ és contínua.

Criteris: 2 punts per veure que cada subfunció és contínua dins del seu domini, 1 punt per imposar que és contínua a $x = 0$, 1 punt per imposar que és contínua a $x = 1$, 1 punt per trobar els valors correctes de a i b .

- (b) **[5 punts]** Siguin $a = 3$ i $b = 2$, calcula l'àrea compresa entre $x = -1$, $x = 0$ i l'eix OX .

Criteris: 1 punt per considerar la part de $f(x)$ que toca. 1 punt per veure que $f_1(x)$ no talla l'eix OX . 1 punt per plantejar bé la integral. 1 punt per resoldre bé la integral. 1 punt per aplicar bé la regla de Barrow.

P7. — Siguin A i B dos successos d'un mateix espai mostral tals que satisfan que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.1$ i $P(A \cap B^c) = 0.35$ (sent B^c el succés complementari de B), calcula:

- (a) **[3 punts]** $P(A)$.
 (b) **[3 punts]** $P(B)$.
 (c) **[2 punts]** $P(A^c \cup B^c)$.
 (d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Criteris: (a,b) 2 punts per indicar què han de calcular, 1 punt per la resposta correcta; (c,d) 1 punt per indicar què han de calcular, 1 punt per la resposta correcta.

P8. — La durada dels embarassos humans des de la concepció fins al naixement s'aproxima a una distribució normal amb una mitjana de 266 dies i una desviació típica de 16 dies.

- (a) **[4 punts]** Quina proporció de tots els embarassos durarà entre 240 i 270 dies (aproximadament entre 8 i 9 mesos)?

Criteris: 1 punt pel plantejament, 1 punt per tipificar, 1 punt per separar les probabilitats, 1 punt per la solució correcta.

- (b) **[6 punts]** Si ens fixam en el 70% dels embarassos que més duren, quina és la seva durada?

Criteris: 2 punts pel plantejament, 1 punt per tipificar, 1 punt per trobar el valor adequat a la taula, 2 punts per aïllar k .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Justificau les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Una fàbrica de vi de Mallorca produeix 3 tipus de vi: negre, blanc i rosat. Amb la finalitat de saber el preu de cada tipus de vi, hem comprat vi, el mateix dia i a la fàbrica mateixa, de 4 maneres diferents:

- comprant 3 botelles de vi negre i 2 de vi blanc hem pagat 67 €,
- comprant 2 botelles de vi negre, 4 de vi blanc i 1 de rosat hem pagat 85 €,
- comprant 1 botella de vi negre i 1 de vi rosat hem pagat 21 €, i finalment,
- comprant 4 botelles de vi blanc i 5 de vi rosat hem pagat 85 €.

- (a) **[3 punts]** Escriu, en forma matricial, el sistema d'equacions lineals que s'hauria de resoldre per poder descobrir el preu de cada tipus de vi.

Solució.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

- (b) **[2 punts]** És necessari tenir les dades de les 4 compres per saber el preu de cada tipus de vi? Justifica la resposta.

Solució. No, perquè només tenim 3 incògnites. 3 compres són suficients però han de ser “linealment independents” entre elles. S'accepta tant si diuen que són “linealment independents” com si veuen que el Rang és 3.

- (c) **[5 punts]** Calcula quin és el preu de cada tipus de vi.

Solució. Vi negre = 14 €, vi blanc = 12.5 € i vi rosat = 7 €.

P2. — Considerem les matrius A de dimensió 3×3 que satisfan que $3A + I = A^2$, on I és la matriu identitat de dimensió 3×3 .

- (a) **[3 punts]** Calcula l'expressió de la matriu inversa de A .

Solució. $I = A^2 - 3A = A(A - 3I)$, llavors $A^{-1} = A - 3I$.

- (b) **[3 punts]** Donada l'equació matricial

$$A + 3AX = 5I,$$

on A és una de les matrius de l'enunciat. Calcula, en funció només de la matriu A (no de la seva inversa) i de la identitat I , la matriu X . Quina dimensió té la matriu X ? Justifica la resposta.

Solució. $A + 3AX = A(I + 3X) = 5I \rightarrow I + 3X = 5A^{-1} \rightarrow I + 3X = 5(A - 3I) \rightarrow X = \frac{1}{3}(5A - 16I)$. La matriu X és de dimensió 3×3 per ser la resta de dues matrius d'aquesta mida.

- (c) [4 punts] Calcula totes les matrius de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

que satisfan les condicions de l'enunciat.

Solució. Volem que $A(A - 3I) = I$. Llavors tenim que,

$$A - 3I = \begin{pmatrix} a-3 & 1 & 0 \\ 1 & b-3 & 0 \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix},$$

i per tant, s'ha de satisfer que

$$A(A - 3I) = \begin{pmatrix} a(a-3)+1 & a+b-3 & 0 \\ a-3+b & 1+b(b-3) & 0 \\ 0 & 0 & c(c-3) \end{pmatrix} = I,$$

per la qual cosa, és necessari que es compleixin les condicions següents:

$$a(a-3) = 0, \quad a+b = 3, \quad b(b-3) = 0, \quad c(c-3) = 1.$$

Que fan que les possibles solucions siguin quatre:

$$\begin{aligned} (1) \quad a = 0, \quad b = 3, \quad c = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \quad (2) \quad a = 0, \quad b = 3, \quad c = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}; \\ (3) \quad a = 3, \quad b = 0, \quad c = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \quad (4) \quad a = 3, \quad b = 0, \quad c = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

P3. — Considerem els punts $A = (0, 0, 0)$, $B = (2, -1, 3)$ i $C = (-1, 2, 1)$.

- (a) [3 punts] Calcula el punt D tal que $ABDC$ sigui un paral·lelogram.

Solució. Notem que, com que A és l'origen de coordenades, les coordenades de D coincideixen amb les del vector $\vec{AD}$, el qual és la suma dels vectors $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (2, -1, 3) \\ \vec{AC} &= (-1, 2, 1) \\ \rightarrow \vec{AD} &= \vec{AB} + \vec{AC} = (1, 1, 4) \end{aligned}$$

Si no agafen $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ com a costats (tot i que l'ordre de les lletres del paral·lelogram així ho designa), es podria calcular similarment, tot i que les coordenades canviarien.

Exemple: Si agafam $ABCD$, seria $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \rightarrow \vec{AD} = \vec{AC} - \vec{AB} = (-3, 3, -2)$. Per tant, $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = (-3, 3, -2)$, que coincideix amb les coordenades de D .

- (b) [4 punts] Calcula un dels punts E de l'espai de tal manera que la recta AE sigui perpendicular al pla ABC i que la distància entre els punts A i E sigui 1.

Solució. El vector director de la recta AE es correspon amb el vector normal del pla ABC . És a dir,

$$\vec{d}_{AE} = \vec{n}_{ABC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7, -5, 3).$$

Volem que el vector $\vec{d}_{AE}$ tingui longitud 1. D'aquesta manera, la $\text{dist}(A, E) = 1$. Per tant, el vector que cercam és el

$$\vec{AE} = \frac{1}{\sqrt{83}}(-7, -5, 3).$$

Ara bé, com que $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \vec{AE}$ tenim que les coordenades del punt E són $\left(\frac{-7}{\sqrt{83}}, \frac{-5}{\sqrt{83}}, \frac{3}{\sqrt{83}}\right)$.

- (c) **[3 punts]** Escribeu l'equació d'un dels plans paral·lels al pla ABC que dista una unitat d'aquest.

Solució. El pla que cercam té els mateixos vectors directors que ABC i passa pel punt E calculat a l'apartat anterior. De la mateixa manera, el vector normal coincideix en ambdós plans. Per tant: L'equació paramètrica és

$$\begin{cases} x = \frac{-7}{\sqrt{83}} + 2\lambda - \beta, \\ y = \frac{-5}{\sqrt{83}} - \lambda + 2\beta, \\ z = \frac{3}{\sqrt{83}} + 3\lambda + \beta. \end{cases}$$

Com que no s'especifica l'equació, es pot donar la solució també amb l'equació implícita, que és $-7x - 5y + 3z + D = 0$ tal que D compleix

$$\frac{49}{\sqrt{83}} + \frac{25}{\sqrt{83}} + \frac{9}{\sqrt{83}} + D = 0 \rightarrow \frac{83}{\sqrt{83}} + D = 0 \rightarrow D = -\sqrt{83},$$

i, per tant, l'equació del pla és $-7x - 5y + 3z - \sqrt{83} = 0$; o fins i tot es pot escollir-ne una altra de diferent que també sigui vàlida.

- P4.** — (a) **[5 punts]** Discuteix, segons els valors de a i b (paràmetres reals), la posició relativa dels plans

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \quad \text{i} \quad \pi_2 : 6x + y - 2z = b.$$

És a dir, si són coincidents, paral·lels o es tallen. En el darrer cas, especifica si ho fan perpendicularment.

Solució. Els vectors normals de cada pla són, respectivament,

$$\vec{n}_1 : (3, a, -1) \quad \text{i} \quad \vec{n}_2 : (6, 1, -2).$$

Llavors:

- $\pi_1 // \pi_2$ si i només si $(3, a, -1) = k(6, 1, -2)$, i per tant, $a = 1/2$.
- π_1 i π_2 són coincidents si $a = 1/2$ i, a més, $b = 2$.
- $\pi_1 \perp \pi_2$ si i només si $(3, a, -1) \cdot (6, 1, -2) = 18 + a + 2 = 0$ i, per tant, si $a = -20$.
- altrament, són secants.

- (b) **[5 punts]** Calcula l'equació de la recta perpendicular al pla π i que passa pel punt de tall entre la recta s i el mateix pla π , sent

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta, \\ y = 3\beta, \\ z = 1 + \alpha, \end{cases} \quad \text{i} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1},$$

per a α i β valors reals qualssevol.

Solució. Calculem primer el punt de tall entre s i π . Substituint les equacions de x , y i z del pla a l'equació de la recta, es té que

$$\frac{2 + 4\alpha - \beta - 1}{2} = \frac{3\beta}{2} = \frac{1 + \alpha - 1}{-1},$$

i, per consegüent, $\alpha = -3/20$ i $\beta = 1/10$. Finalment, substituint els seus valors a les equacions del pla, obtenim que $x = 13/10$, $y = 3/10$ i $z = 17/20$. Per tant, el punt de tall és

$$P = \left(\frac{13}{10}, \frac{3}{10}, \frac{17}{20} \right).$$

Per altra banda, calculem el vector normal del pla π :

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -1, 12).$$

Per tant, l'equació de la recta és

$$\begin{cases} x = 13/10 - 3t, \\ y = 3/10 - t, \\ z = 17/20 + 12t. \end{cases}$$

P5. — [10 punts] Volem fer una tanca en un camp rectangular emprant diferents materials a cada costat. Començant pel fons del camp i movent-nos al voltant d'aquest en el sentit contrari a les agulles del rellotge, el cost del material per a cada costat és de 6 €/m, 9 €/m, 12 €/m i 14 €/m, respectivament. Si hem de gastar exactament 1000 € per comprar el material de tancament, determina les dimensions del camp que maximitzaran l'àrea tancada.

Solució. Siguin x i y els costats del camp (davant i fons, i dreta i esquerra, respectivament). Notem que x i y són valors positius (i diferents de 0) ja que es refereixen a longituds. Aleshores,

- Com que el cost total ha de ser 1000€, tenim que $6x + 9y + 12x + 14y = 1000$, és a dir, $18x + 23y = 1000$, d'on $y = (1000 - 18x)/23$.
- Volem maximitzar l'àrea del camp. Sabem que $A = xy$. Aleshores, volem maximitzar la funció

$$A(x) = x \frac{1000 - 18x}{23} = \frac{1000}{23}x - \frac{18}{23}x^2.$$

Calculem els punts crítics de $A(x)$ per veure quin és el màxim de la funció.

$$A'(x) = \frac{1000}{23} - \frac{36}{23}x = 0 \Leftrightarrow \frac{1000}{23} = \frac{36}{23}x \Leftrightarrow 1000 = 36x \Leftrightarrow x = \frac{250}{9} \text{ m.}$$

I per tant

$$y = \frac{1000 - 18 \frac{250}{9}}{23} = \frac{1000 - 500}{23} = \frac{500}{23} \text{ m.}$$

Comprovem que es tracta realment d'un màxim. Per a això poden calcular la segona derivada o mirar el signe d'un punt a l'esquerra i un a la dreta de x :

$$A''\left(\frac{250}{9}\right) = -\frac{36}{23} < 0,$$

i, per tant, és, en efecte, un màxim. Aleshores, les dimensions del camp, recurrent-lo tal com diu l'enunciat, són $\frac{250}{9} \text{ m}$, $\frac{500}{23} \text{ m}$, $\frac{250}{9} \text{ m}$ i $\frac{500}{23} \text{ m}$, respectivament.

P6. — Sigui la funció

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1, & x \leq 0, \\ ax^2 + b(x + 3), & 0 < x \leq 1, \\ a \cos(\pi x) + 7bx, & x > 1. \end{cases}$$

(a) **[5 punts]** Calcula els valors de a i b per als quals la funció $f(x)$ és contínua.

Solució. Les tres funcions són contínues per ser sumes i productes de contínues. Hem d'imposar que també sigui contínua als extrems:

– Continuitat a $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} be^x + a + 1 &= b + a + 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 + b(x + 3) &= 3b, \\ \rightarrow b + a + 1 &= 3b \rightarrow a = 2b - 1. \end{aligned}$$

– Continuitat a $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + b(x + 3) &= a + 4b, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} a \cos(\pi x) + 7bx &= -a + 7b, \\ \rightarrow a + 4b &= -a + 7b \rightarrow 2a = 3b \end{aligned}$$

Per tant, hem de resoldre.

$$\begin{aligned} a &= 2b - 1, \\ 2a &= 3b \rightarrow 4b - 2 = 3b \rightarrow b = 2; a = 3. \end{aligned}$$

(b) **[5 punts]** Siguin $a = 3$ i $b = 2$, calcula l'àrea compresa entre $x = -1$, $x = 0$ i l'eix OX .

Solució. La funció definida en aquest interval de x és $f_1(x) = 2e^x + 4$, la qual és sempre creixent i positiva (funció exponencial més una constant positiva). Per tant,

$$\int_{-1}^0 2e^x + 4 dx = [2e^x + 4x]_{-1}^0 = (2 + 0) - (2e^{-1} - 4) = 2 - 2e^{-1} + 4 = -2e^{-1} + 6.$$

Per tant, l'àrea és $-2e^{-1} + 6$ (5.2642 u^2).

P7. — Siguin A i B dos successos d'un mateix espai mostral tals que satisfan que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.1$ i $P(A \cap B^c) = 0.35$ (sent B^c el succés complementari de B), calcula:

(a) **[3 punts]** $P(A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[2 punts]** $P(A^c \cup B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Solució.

(a) $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) = 0.45,$

(b) $P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.35,$

(c) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.9,$

(d) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.45} = \frac{1}{4.5} \neq P(B).$ No són independents.

P8. — La durada dels embarassos humans des de la concepció fins al naixement s'aproxima a una distribució normal amb una mitjana de 266 dies i una desviació típica de 16 dies.

- (a) **[4 punts]** Quina proporció de tots els embarassos durarà entre 240 i 270 dies (aproximadament entre 8 i 9 mesos)?

Solució.

$$P(240 < X < 270) = P\left(\frac{240 - 266}{16} < Z < \frac{270 - 266}{16}\right) =$$

$$P(-1.625 < Z < 0.25) = P(Z < 0.25) - 1 + P(Z < 1.6) = 0.5987 - 1 + 0.9484 = 0.5471.$$

- (b) **[6 punts]** Si ens fixam en el 70% dels embarassos que més duren, quina és la seva durada?

Solució.

$$P(X > k) = 1 - P\left(Z < \frac{k - 266}{16}\right) = 0.70 \rightarrow P\left(Z < \frac{k - 266}{16}\right) = 0.3.$$

Per tant, hem de cercar a la taula el valor α tal que $P(Z < \alpha) = 0.3$, el que és equivalent a cercar α tal que $P(Z < -\alpha) = 0.7$.

Mirant a la taula tenim que 0.52 correspon a 0.6985 i 0.53 correspon a 0.7019. Interpolant tenim que $\alpha = -0.5244$ és el valor que correspon a una probabilitat de 0.3. Els alumnes poden emprar tant el valor interpolat com el valor central 0.525. Aleshores,

– emprant el punt mitjà:

$$\frac{k - 266}{16} = -0.525 \rightarrow k = 257.6 \text{ dies.}$$

– emprant el punt interpolat:

$$\frac{k - 266}{16} = -0.5244 \rightarrow k = 257.61 \text{ dies.}$$

Resposta: Duren més de 257.6 dies.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.