



ABAU
Convocatoria ordinaria 2024
MATEMÁTICAS II

CÓDIGO 20

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A y B dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calcule A^2 .
- Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$$

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

- Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.
- Calcule $\int x^3 e^{x^2} dx$

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

- Considere el plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ y la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$ donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π .
- Calcule la distancia del punto $P(1, 3, 1)$ al plano $\pi': 4x + 2y - 4z = 2$.

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

- Considere los puntos $Q(-1, 3, -5)$, $R(3, 1, 0)$ y $S(0, 1, 2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q, R y S.
- Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, -1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$.

- a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B}))$.
- b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

(Nota: $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente).

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

- a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?
- b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A y B dos matrices tales que $A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 .

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

a) Resolvemos el sistema matricial planteado para obtener la expresión de las matrices A y B.

$$\left. \begin{array}{l} A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 1}^a - \text{Ecuación 2}^a \} \Rightarrow 2B - B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos A^2 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 2+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial planteada.

$$A^2X - (A+B)^T = 3I - 2X \Rightarrow A^2X + 2X = (A+B)^T + 3I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^2 + 2I)X = (A+B)^T + 3I \Rightarrow X = (A^2 + 2I)^{-1}[(A+B)^T + 3I]$$

Calculamos la expresión de la matriz X haciendo uso de lo obtenido en el apartado anterior.

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 + 2I| = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(A^2 + 2I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^2 + 2I)^T\right)}{|A^2 + 2I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}{18} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2 + 2I)^{-1} \left[(A+B)^T + 3I \right] = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 21+3 & 0-15 \\ 0-6 & 0+30 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 24 & -15 \\ -6 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$.

PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{vmatrix} = 3m^3 + 0 + 2m(m-4) - 0 - 2m^2(m+2) - 2m(m-4) =$$

$$= 3m^3 + \cancel{2m^2} - 8m - 2m^3 - 4m^2 - \cancel{2m^2} + 8m = m^3 - 4m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 4 = 0 \rightarrow m = 4 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda tan sencillo que lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} 2y + z = 3 \\ -2z = 5 \\ -4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 3 \\ z = \frac{-5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 0 + \frac{-5}{2} = 3 \Rightarrow \frac{-5}{2} = 3 \text{ ¡Imposible!}$$

El sistema es **incompatible** (sin solución)

CASO 3. $m = 4$

Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 8 \quad 12 \quad 2 \quad 5 \\ -8 \quad -12 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 3^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{4 \quad 6 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} \quad -1 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible determinado y si $m = 0$ o $m = 4$ el sistema es incompatible.

PREGUNTA 3. Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3 e^{x^2} dx$

a) Está en los libros de texto.

b) Utilizamos integración por partes.

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 2x e^{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = 2x e^{x^2} dx \Rightarrow v = \int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) = \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1) + C$$

PREGUNTA 4. Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

a) Calculamos el valor del primer límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x} = \frac{\sin 0 - \ln(1+0)}{0 \cdot \sin 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x \cos x} = \frac{\cos 0 - \frac{1}{1+0}}{\sin 0 + 0 \cdot \cos 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{-\sin 0 + \frac{1}{(1+0)^2}}{\cos 0 + \cos 0 - 0 \cdot \sin 0} = \frac{0+1}{1+1-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Calculamos el valor del segundo límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} = \frac{e^{\sin 0} - e^0}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2x} = \frac{\cos 0 \cdot e^{\sin 0} - e^0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} - e^x}{2} = \frac{-\sin 0 \cdot e^{\sin 0} + \cos 0 \cdot \cos 0 \cdot e^{\sin 0} - e^0}{2} =$$

$$= \frac{1-1}{2} = \boxed{0}$$

PREGUNTA 5. Geometría. (2 puntos)

a) Considere el plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ y la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$ donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π .

b) Calcule la distancia del punto $P(1,3,1)$ al plano $\pi': 4x + 2y - 4z = 2$.

a) Para que la recta esté contenida en el plano cualquier punto de la recta debe pertenecer al plano (debe cumplir su ecuación).

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(2, c, 3) \\ \vec{v}_r = (3, 2, 4) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = c + 2\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$$

Hallamos otro punto de la recta que también debe pertenecer al plano.

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = c + 2\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow Q_r(5, c+2, 7) \\ \lambda = 1$$

El punto $Q_r(5, c+2, 7)$ pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q_r(5, c+2, 7) \in \pi \\ \pi: 4x + 2y + bz = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot 5 + 2(c+2) + b \cdot 7 = 2 \Rightarrow 20 + 2c + 4 + 7b = 2 \Rightarrow \boxed{2c + 7b = -22}$$

El punto $P_r(2, c, 3)$ pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(2, c, 3) \in \pi \\ \pi: 4x + 2y + bz = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot 2 + 2 \cdot c + b \cdot 3 = 2 \Rightarrow 8 + 2c + 3b = 2 \Rightarrow \boxed{2c + 3b = -6}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2c + 3b = -6 \\ 2c + 7b = -22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2c = -6 - 3b \\ 2c = -22 - 7b \end{array} \right\} \Rightarrow -6 - 3b = -22 - 7b \Rightarrow 4b = -16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{-16}{4} = -4} \Rightarrow 2c = -6 - 3(-4) = 6 \Rightarrow \boxed{c = \frac{6}{2} = 3}$$

Los valores buscados son $b = -4$ y $c = 3$.

b) Calculamos la distancia pedida usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 3, 1) \\ \pi': 4x + 2y - 4z - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi') = \frac{|4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.66 \text{ u}}$$

PREGUNTA 6. Geometría. (2 puntos)

- a) Considere los puntos $Q(-1, 3, -5)$, $R(3, 1, 0)$ y $S(0, 1, 2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q , R y S .
- b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, -1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

- a) El plano π' que contiene a los tres puntos tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{QS}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{QR} = (3, 1, 0) - (-1, 3, -5) = (4, -2, 5) \\ \vec{v} = \overrightarrow{QS} = (0, 1, 2) - (-1, 3, -5) = (1, -2, 7) \\ S(0, 1, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14x + 5(y-1) - 8(z-2) + 2(z-2) - 28(y-1) + 10x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14x + 5y - 5 - 8z + 16 + 2z - 4 - 28y + 28 + 10x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x - 23y - 6z + 35 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 4x + 23y + 6z - 35 = 0}$$

La ecuación del plano π' que contiene a los puntos Q , R y S es $\pi': 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

- b) La recta perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (4, 23, 6)$$

$$r: \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (4, 23, 6) \\ P(3, -1, -1) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -1 + 23\lambda \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R} \text{ Ecuaciones paramétricas}$$

$$r: \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (4, 23, 6) \\ P(3, -1, -1) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6} \text{ Ecuación continua}$$

PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B}))$.

(Nota: $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente).

a) Si A y B son sucesos independientes entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) = \frac{1}{6} \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Utilizamos el teorema de Bayes y las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} / (\bar{A} \cup \bar{B})) = \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \left\{ \bar{A} \subset (\bar{A} \cup \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A} \right\} =$$

$$= \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \left\{ \text{Ley de Morgan} \right. \\ \left. P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \right\} = \frac{1 - P(A)}{P(\overline{A \cap B})} =$$

$$= \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5} = \frac{12}{15} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

b) Si A y B son sucesos incompatibles entonces $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) = 0 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{5}{6}}$$

Utilizamos el teorema de Bayes y las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A}/(\bar{A} \cup \bar{B})) = \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \left\{ \bar{A} \subset (\bar{A} \cup \bar{B}) \rightarrow \bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A} \right\} =$$

$$= \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ley de Morgan} \\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \end{array} \right\} = \frac{1 - P(A)}{P(\overline{A \cap B})} =$$

$$= \frac{1 - P(A)}{1 - P(A \cap B)} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - 0} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

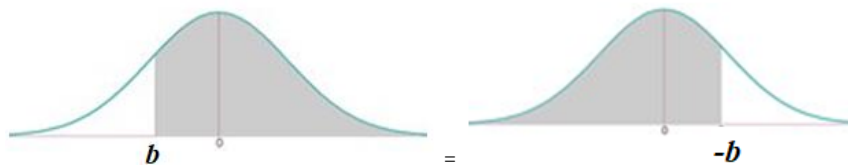
X es la cantidad de agua que echa una máquina en una botella (en mililitros). $X = N(500, 4)$

a) Nos piden calcular $P(499 < X < 502)$.

$$\begin{aligned}
 P(499 < X < 502) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{499 - 500}{4} < Z < \frac{502 - 500}{4}\right) = \\
 &= P(-0.25 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.25) = \\
 &= P(Z < 0.5) - P(Z > 0.25) = P(Z < 0.5) - [1 - P(Z < 0.25)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.6915 - 1 + 0.5987 = \boxed{0.2902}
 \end{aligned}$$

b) Nos piden hallar “a” tal que $P(X \geq a) = 0.975$.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq a) = 0.975 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 500}{4}\right) = 0.975 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad mayor que } 0.5 \rightarrow \\ \frac{a - 500}{4} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dots
 \end{aligned}$$



$$\dots \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 500}{4}\right) = 0.975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a - 500}{4} = 1.96 \Rightarrow -a + 500 = 1.96 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500 - 1.96 \cdot 4 = a \Rightarrow \boxed{a = 492.16}$$

La cantidad de agua excedida por el 97,5% de estas botellas es 492.16 mililitros.