

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cúbicas de 1m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Hallar su dominio y estudiar las asíntotas de su gráfica.
- b) (0.75 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 7/3)$.
- c) (0.5 puntos) Encontrar, si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(-1, 2, 6)$, el plano $\pi : 3x - 2y + z - 5 = 0$ y la recta $s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-1}$:

- a) (1.5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P , es secante a s y paralela al plano π .
- b) (1 punto) Halle el simétrico del punto P respecto al plano π .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una normal de media 6.7 y de desviación típica 1.25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfactorio el servicio; si la nota está entre 5 y 7.5, que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayor que 7.5, que el servicio es excelente.

- a) (0.75 puntos) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente?
- b) (1 punto) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio?
- c) (0.75 puntos) Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios, de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados consideren el servicio insatisfactorio?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X - 3Y = A$ y $3X + 6Y = B$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) (1.5 puntos) Hallar X , Y y X^{-1} .
- b) (1 punto) Calcular A^{127} .

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$.

- a) (1.5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de $f(x)$.
- b) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En el punto $A(1, 0, -1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3, 1, 0)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano $\pi : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 2 + 2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Llamamos al punto P el punto de incidencia del rayo de luz sobre el plano π . Se pide:

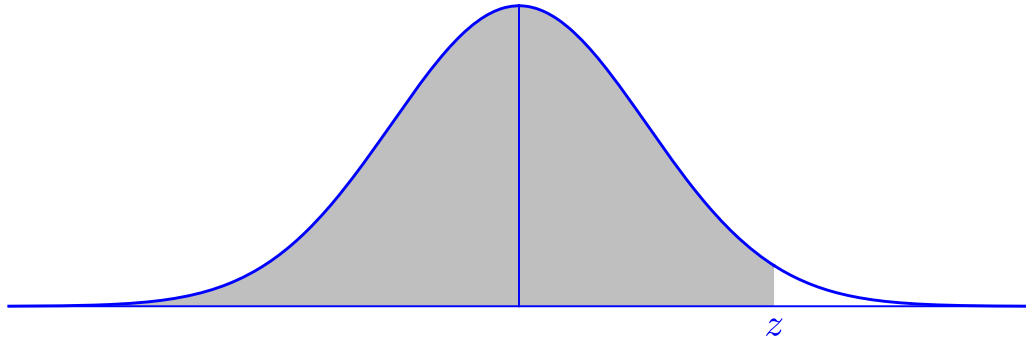
- a) (1.25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.
- b) (0.75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P .
- c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En la sección de idiomas de una biblioteca municipal se tienen libros, en francés o inglés, de tres categorías: el 50 % son cuentos infantiles, el 30 %, novelas históricas y el resto, manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas, en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico. Se toma un libro al azar y se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté en francés si no es un manual técnico.
- b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

