

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.
- b) (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.
- c) (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.
- b) (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2 , que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

- a) (1.5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.
- b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$.

Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t .

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule:

a) (1.25 puntos) $\int_1^e (x+2) \ln x dx$.

b) (1.25 puntos) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)}$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 0)$ y $P_3(1, 3, 2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a .

b) (1 punto) Dado el punto $Q(3, 3, 3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2 , P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.