

**Universidad
Zaragoza****EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD**
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2024
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final se calculará sumando las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividiendo dicha suma por tres.

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación

matricial $AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

2.- (10 puntos) Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

3.- (10 puntos) El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función $IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$ siendo $t \in [0, 62]$ el número de años transcurridos desde 1.932. Se pide:

a.- (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b.- (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c.- (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

4.- (10 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a.- (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$.

b.- (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x) dx$.

c.- (4 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5.- (10 puntos) En España, el 30% de la población tiene menos de 30 años, el 50% tiene entre 30 y 65 años y el 20% tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70% tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95% tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50% tiene teléfono móvil.

a.- (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.

b.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?

c.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

d.- (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

6.- (10 puntos) Responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52% de los habitantes son mujeres y el 48% son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X ? Calcule $P(X=2)$.

b.- (8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95%.

b.1 (4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?

b.2 (4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación

matricial $AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

a.- Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX - IX = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1}B$$

Comprobamos que la matriz $A - I$ tiene inversa y la calculamos.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (A - I)^{-1}$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - I)^T)}{|A - I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X .

$$X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2 \\ -1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

b.- Llamamos "x" al número de unidades vendidas en tienda, "y" al número de unidades vendidas online y "z" al número de unidades vendidas de segunda mano.

Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto $\rightarrow$

$$10x + 6y + 5z = 1600$$

El número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física $\rightarrow y = 5x$

Por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física $\rightarrow 5z = 10x + 800$

Reuniendo las tres ecuaciones tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ y = 5x \\ 5z = 10x + 800 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ -5x + y = 0 \\ z = 2x + 160 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ -5x + y = 0 \\ -2x + z = 160 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema con técnicas matriciales.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ -5x + y = 0 \\ -2x + z = 160 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ -5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 0 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ -5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes, hallamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 6 & 5 \\ -5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 0 + 0 + 10 + 30 + 0 = 50 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 10 & -5 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{50} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 5 & 20 & -25 \\ 2 & -12 & 40 \end{pmatrix}$$

Utilizamos lo obtenido para resolver el sistema.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 0 \\ 160 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1600 \\ 0 \\ 160 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 5 & 20 & -25 \\ 2 & -12 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1600 \\ 0 \\ 160 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 1600 - 0 - 800 \\ 8000 - 0 - 4000 \\ 3200 - 0 + 6400 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 800 \\ 4000 \\ 9600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 80 \\ 192 \end{pmatrix}$$

Se han vendido 16 unidades en tienda física, 80 unidades en tienda online y 192 en tienda de segunda mano.

2.- (10 puntos) Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

a.- Llamamos x = número de partidos, y = número de conciertos.
Obtenemos las restricciones del problema.

Su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros $\rightarrow 60x + 40y \leq 1000$.

Debe asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos $\rightarrow x \geq y$.

Debe acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año $\rightarrow x \leq 14$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 60x + 40y \leq 1000 \\ x \geq y \\ x \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 50 \\ x \geq y \\ x \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

¿Puede ser $x = 8$ e $y = 8$? Veamos si se cumplen todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 60 \cdot 8 + 40 \cdot 8 \leq 1000 \\ 8 \geq 8 \\ 8 \leq 14 \\ 8 \geq 0; 8 \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 800 \leq 1000 \text{ ¡OK!} \\ 8 \geq 8 \text{ ¡OK!} \\ 8 \leq 14 \text{ ¡OK!} \\ 8 \geq 0; 8 \geq 0 \text{ ¡OK!} \end{array} \right\}$$

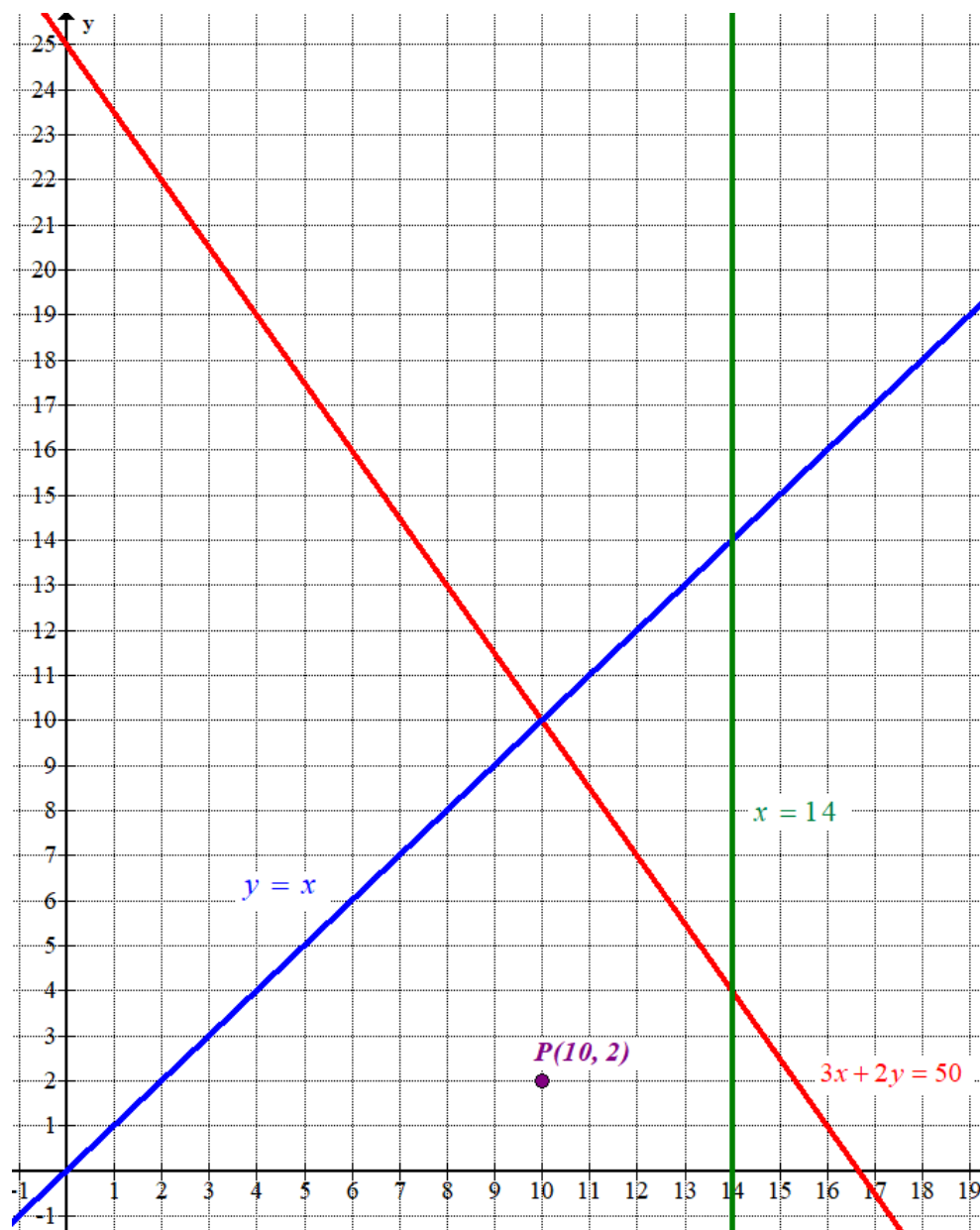
Se cumplen todas y si puede acudir a 8 partidos y 8 conciertos.

Como se observa en la primera inecuación se gastaría 800 €, por lo que no se gasta todo el presupuesto (1000 €).

b.- Deseamos maximizar el número de salidas $S(x, y) = x + y$.

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$3x + 2y = 50$	$y = x$	$x = 14$	$x \geq 0; y \geq 0$
$\begin{array}{c c} x & y = \frac{50-3x}{2} \\ \hline 0 & 25 \\ 10 & 10 \\ 14 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = x \\ \hline 0 & 0 \\ 10 & 10 \\ 14 & 14 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x = 14 & y \\ \hline 14 & 0 \\ 14 & 4 \end{array}$	Primer cuadrante



Como las restricciones son

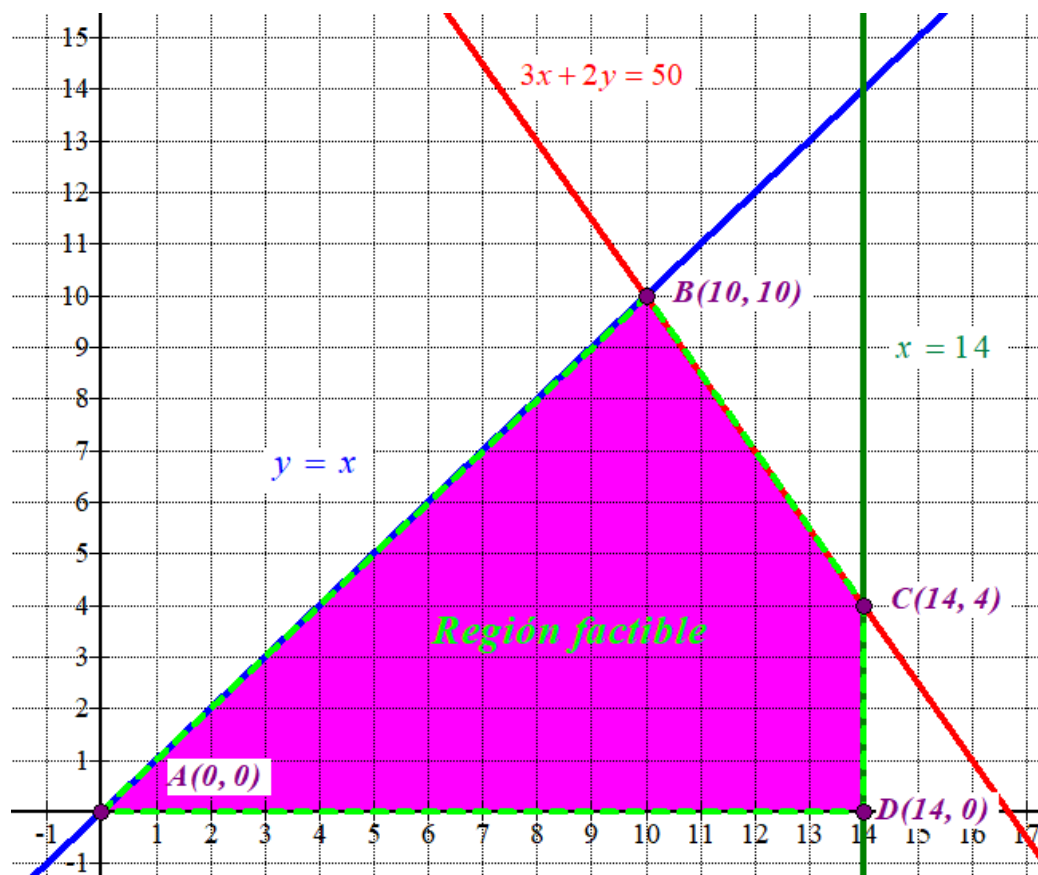
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 50 \\ x \geq y \\ x \leq 14 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul, y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto $P(10, 2)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \leq 50 \\ 10 \geq 2 \\ 10 \leq 14 \\ 10 \geq 0; 2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función número de salidas $S(x, y) = x + y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow S(0, 0) = 0$$

$$B(10, 10) \rightarrow S(10, 10) = 10 + 10 = 20 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(14, 4) \rightarrow S(14, 4) = 14 + 4 = 18$$

$$D(14, 0) \rightarrow S(14, 0) = 14 + 0 = 14$$

El valor máximo es 20 y se obtiene en $B(10, 10)$.

El mayor número de salidas cumpliendo las restricciones son 20 debiendo ir a 10 partidos y a 10 conciertos.

3.- (10 puntos) El cálculo del índice de progreso real (*IPR*) de un país viene determinado por la función $IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$ siendo $t \in [0, 62]$ el número de años transcurridos desde 1.932. Se pide:

a.- (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b.- (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c.- (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

a.- Utilizamos la derivada para averiguar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} IPR'(t) = -3t^2 + 108t + 480 \\ IPR'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3t^2 + 108t + 480 = 0 \Rightarrow t^2 - 36t - 160 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4(1)(-160)}}{2} = \frac{36 \pm 44}{2} = \begin{cases} \frac{36 + 44}{2} = 40 \in [0, 62] \\ \frac{36 - 44}{2} = -4 \notin [0, 62] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de 40.

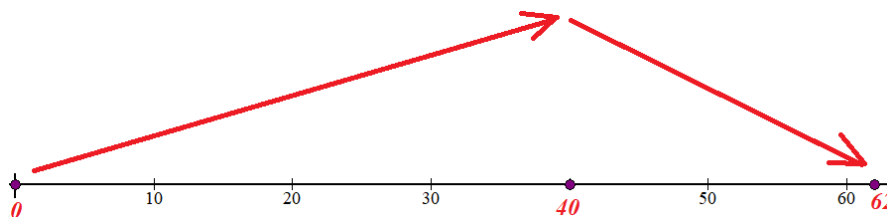
- En el intervalo $[0, 40)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale

$$IPR'(10) = -3 \cdot 10^2 + 108 \cdot 10 + 480 = 1260 > 0. \text{ La función crece en } [0, 40).$$

- En el intervalo $(40, 62]$ tomamos $t = 50$ y la derivada vale

$$IPR'(50) = -3 \cdot 50^2 + 108 \cdot 50 + 480 = -1260 < 0. \text{ La función decrece en } (40, 62].$$

La función sigue el esquema siguiente.



El IPR del país crece los primeros 40 años y decrece a partir del año 1972.

b.- Por lo visto en el apartado anterior sabemos que en el año 1972 se alcanza un valor máximo del IPR. Obtenemos el IPR de ese año.

$$IPR(40) = -40^3 + 54 \cdot 40^2 + 480 \cdot 40 + 6000 = 47600.$$

El valor máximo del IPR es de 47600 en el año 1972.

Como la función crece del año 1932 al año 1972 y decrece del año 1972 al año 1994 el valor mínimo debe estar en los extremos del intervalo $[0, 62]$.

$$IPR(0) = -0^3 + 54 \cdot 0^2 + 480 \cdot 0 + 6000 = 6000$$

$$IPR(62) = -62^3 + 54 \cdot 62^2 + 480 \cdot 62 + 6000 = 5008$$

El valor mínimo del IPR es 5008 que se produce en el año 1994.

c.- Utilizamos la segunda derivada para intentar encontrar los posibles puntos de inflexión de la función.

$$IPR'(t) = -3t^2 + 108t + 480 \Rightarrow IPR''(t) = -6t + 108$$

$$IPR''(t) = 0 \Rightarrow -6t + 108 = 0 \Rightarrow 6t = 108 \Rightarrow t = \frac{108}{6} = 18$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0, 18)$ tomamos $t = 10$ y la derivada segunda vale $IPR''(10) = -60 + 108 = 48 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $[0, 18)$.
- En el intervalo $(18, 62]$ tomamos $t = 40$ y la derivada segunda vale $IPR''(40) = -6 \cdot 40 + 108 = -132 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en el intervalo $(18, 62]$.

La función tiene un punto de inflexión en el año 1950, siendo convexa de 1932 a 1950 y cóncava del año 1950 a 1994.

4.- (10 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a.- (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$.

b.- (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x) dx$.

c.- (4 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

a.- En el intervalo $(-\infty, 2)$ la función es $f(x) = \frac{1}{2-x}$ que es continua pues el denominador no se anula en el intervalo $(-\infty, 2)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$. Estudiamos el signo del radicando.

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x > 0 \text{ para } x \in (2, +\infty)$$

El radicando es positivo y la función es continua en el intervalo $(2, +\infty)$.

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 2$.

- Existe $f(2) = 1$.
- ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$? ¡No existe!

La función no es continua en $x = 2$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b.- La función en el intervalo $[0, 1]$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{2-x} dx = - \int \frac{-1}{2-x} dx = -\ln(2-x) + C$$

Calculamos el valor de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2-x} dx = [-\ln(2-x)]_0^1 = [-\ln(2-1)] - [-\ln(2-0)] = -\ln 1 + \ln 2 = \boxed{\ln 2}$$

Hemos comprobado que $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2$.

c.- La función en el intervalo $(2, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

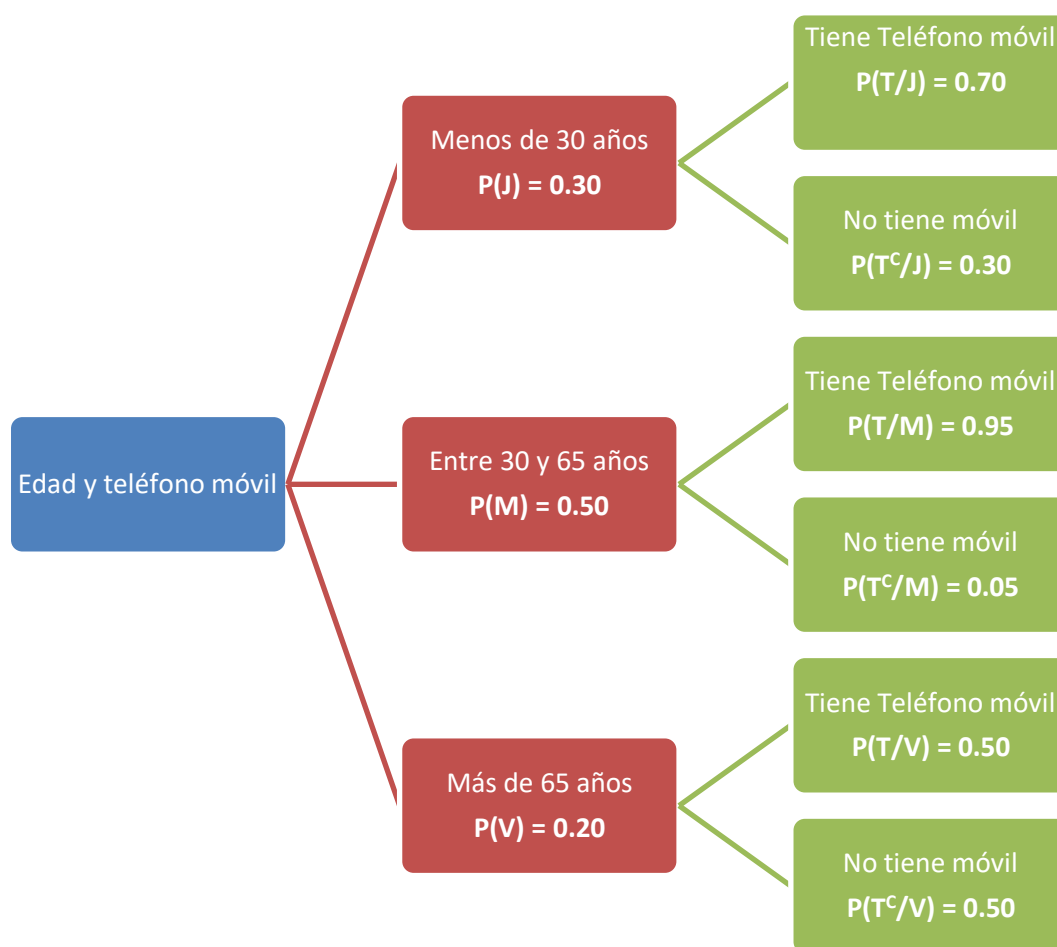
$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 2x} = \infty - \infty = \text{Indeterminación (conjugado)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 2x})(x + \sqrt{x^2 - 2x})}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - 2x})^2}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{+\infty}}} = \frac{2}{1+1} = \boxed{1}
\end{aligned}$$

Hemos comprobado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

- 5.- (10 puntos) En España, el 30% de la población tiene menos de 30 años, el 50% tiene entre 30 y 65 años y el 20% tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70% tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95% tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50% tiene teléfono móvil.
- a.- (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.
- b.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?
- c.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?
- d.- (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

Llamamos J a “tener menos de 30 años”, M a “tener entre 30 y 65 años”, V a “tener más de 65 años” y T a “tener Teléfono móvil”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a.- Nos piden calcular $P(V \cap T)$.

$$P(V \cap T) = P(V)P(T/V) = 0.2 \cdot 0.5 = \boxed{0.1}$$

La probabilidad de elegir una persona de más de 65 años y con teléfono móvil es de 0.1.

- b.- Nos piden calcular $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(J)P(T/J) + P(M)P(T/M) + P(V)P(T/V) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.95 + 0.2 \cdot 0.5 = \boxed{\frac{157}{200} = 0.785}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar tenga teléfono móvil es de 0.785.

c.- Nos piden calcular $P(V/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/T) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{P(V)P(T/V)}{P(T)} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.785} = \boxed{\frac{20}{157} \approx 0.1274}$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar sea mayor de 65 años, sabiendo que tiene teléfono móvil tiene un valor aproximado de 0.1274.

d.- Si suponemos independencia en la elección de las tres personas la probabilidad de que los tres tengan teléfono móvil es el producto de las probabilidades de que cada uno tenga móvil.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Los tres tienen teléfono móvil}) &= P(T/J)P(T/M)P(T/V) = \\
 &= 0.7 \cdot 0.95 \cdot 0.5 = \boxed{\frac{133}{400} = 0.3325}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que eligiendo una persona de cada grupo de edad los tres tengan teléfono móvil es de 0.3325.

6.- (10 puntos) Responda a las siguientes preguntas:

- a.- (2 puntos)** En una ciudad, según los datos del INE, el 52% de los habitantes son mujeres y el 48% son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X ? Calcule $P(X=2)$.
- b.- (8 puntos)** Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95%.
- b.1 (4 puntos)** Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?
- b.2 (4 puntos)** Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

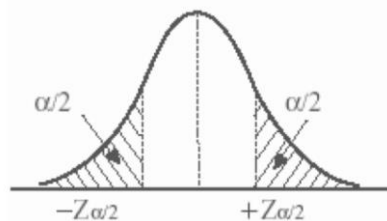
- a.-** La variable X es una binomial pues cada elección es independiente de las otras (con reemplazamiento) y solo puede pasar que la persona elegida sea hombre o mujer. Esta binomial tiene parámetros $n = 4$ y $p =$ probabilidad de elegir un hombre $= 0.48$.
 $X = B(4, 0.48)$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} 0.48^2 \cdot 0.52^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} 0.48^2 \cdot 0.52^2 = 6 \cdot 0.48^2 \cdot 0.52^2 \approx \boxed{0.3738}$$

- b.-** Como no tenemos el dato de la proporción muestral, tomamos $p = 0.5$.

Para un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6065
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8341
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9685	0.9691
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850

Como el error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza utilizamos la fórmula del error y lo igualamos a $0.08 / 2 = 0.04$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.04 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.04}{1.96} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.04}{1.96} \right)^2} = 600.25$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 601 aficionados.

c.- Tenemos que $p = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} \simeq 0.6667$, $n = 120$.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{120}} \simeq 0.0843$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.6667 - 0.0843, 0.6667 + 0.0843) = (0.5824, 0.751)$$