

Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualche apartat, però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
 - Els errors de càlcul, amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes mecàniques o de càlcul no justificades, amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".

P1. — Tens un petit negoci que ven pantalons i camises. El preu de cada pantaló és de 60 €, i el preu de cada camisa és de 40 €.

- a) Aquesta setmana s'han venut un total de 100 unitats entre pantalons i camises, i hem tingut uns ingressos totals de 5400 €. Quants pantalons i quantes camises hem venut?

Criteris: 2 pt per plantejar, 3 pt per resoldre. Penalització amb -1 pt per no identificar les incògnites. Penalització amb -0.75 pt errors de càlcul. **(Total 5 pt)**

Solució. Considerem la matriu que, multiplicada per un vector que indica les unitats de pantalons i camises venudes (columnnes), ens dona el nombre total d'unitats i els ingressos totals (fileres):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 60 & 40 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, si x és el nombre de pantalons venuts, i y el nombre de camises venudes,

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 5400 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix},$$

que hem pogut resoldre pel mètode de Gauss, i hem obtingut que hem venut 70 pantalons i 30 camises.

- b) Fa tres setmanes es varen vendre un total de 110 unitats entre pantalons i camises, i un empleat que va revisar la caixa va dir que els ingressos totals eren de 4200 €... però tu no creus l'empleat. Quants pantalons i quantes camises s'haurien d'haver venut segons el que diu l'empleat? Interpreta el resultat obtingut.

Criteris: 1 pt per plantejar, 2 pt per resoldre, 2 pt per interpretar. **(Total 5 pt)**

Solució. Amb el mateix procediment que l'apartat anterior,

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 4200 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

No és possible haver venut -10 pantalons, així que aquesta combinació de 110 unitats i 4200 € d'ingressos totals és impossible.

P2. — Considera les matrius següents:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Sabem que existeix un valor x tal que B és la inversa de A . Quin és aquest valor x ? **(Total 3 pt)**

Solució. A i B són inverses si i només si se satisfà la igualtat matricial següent:

$$A \cdot B = I \implies \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies 2x + 3 \cdot (-5) = 1 \implies x = 8.$$

Atès que sabem que n'existeix un, aquest és necessàriament $x = 8$. (Altrament, hauríem de comprovar que la resta de termes del producte matricial coincideixen.)

- b) Per al valor x de l'apartat anterior, calcula $(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I)$.

Criteris: Penalització amb -1 pt per cada error de càlcul. Penalització amb -1 pt si no utilitza el valor de x calculat prèviament, si s'escau. **(Total 4 pt)**

Solució. Abans de fer càlculs matricials, podem simplificar l'expressió:

$$\begin{aligned} & (A + I)(B - I) + (A - I)(B + I) \\ &= [AB - A + B - I] + [AB + A - B - I] \\ &= 2AB - 2I = 2I - 2I = 0, \end{aligned}$$

és a dir, el resultat és la matriu nul·la.

- c) Existeixen alguns valors per a y, z de manera que C sigui la inversa de A ? **(Total 3 pt)**

Solució. No, ja que la inversa és única. És a dir, si B i C són dues inverses de la mateixa matriu, haurien de ser la mateixa matriu:

$$\begin{cases} A \cdot B = I \\ A \cdot C = I \end{cases} \implies B = C \implies \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = y, \\ -3 = z, \\ -5 = 7, \\ 2 = -1, \end{cases}$$

i és clar que les dues darreres igualtats no són certes.

P3. — Una empresa produeix dos tipus de productes: aspiradores i bateries elèctriques.

- Per produir una aspiradora, necessitam 5 h d'un operari i 4 kg de matèries primeres.
- Per produir una bateria, necessitam 1 h d'un operari i 1 kg de matèries primeres.

Cada aspiradora es ven per 100 €, i cada bateria, per 22 €. Disposam d'un màxim de 110 hores d'operaris i de 100 kg de matèries primeres. Suposarem que vendrem tota la producció.

- a) Quantes unitats de cada tipus hem de produir per maximitzar els ingressos?

Criteris: 2 pt per plantejar rectes (0.5 pt/recta). 2 pt per traçar i identificar rectes (0.5 pt/recta). 2 pt per calcular els vèrtexs (0.5 pt/vèrtex). 1 pt per indicar la funció objectiu. 1 pt per calcular correctament el vèrtex corresponent al màxim i interpretar-lo. Penalització amb -4 pt si les variables són incorrectes. Penalització amb -3 pt si la regió factible no està dibuixada o és incorrecta. Penalització amb -1 pt si les rectes trivials no estan representades o es representen intercanviades. **(Total 8 pt)**

Solució. Ho resoldrem com un problema de programació lineal en dues dimensions. En particular, siguin a les aspiradores que produïrem, i b les bateries que produïrem. Aleshores, les restriccions són:

$$\left. \begin{array}{l} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ 5a + b \leq 110 \\ 4a + b \leq 100 \end{array} \right\}$$

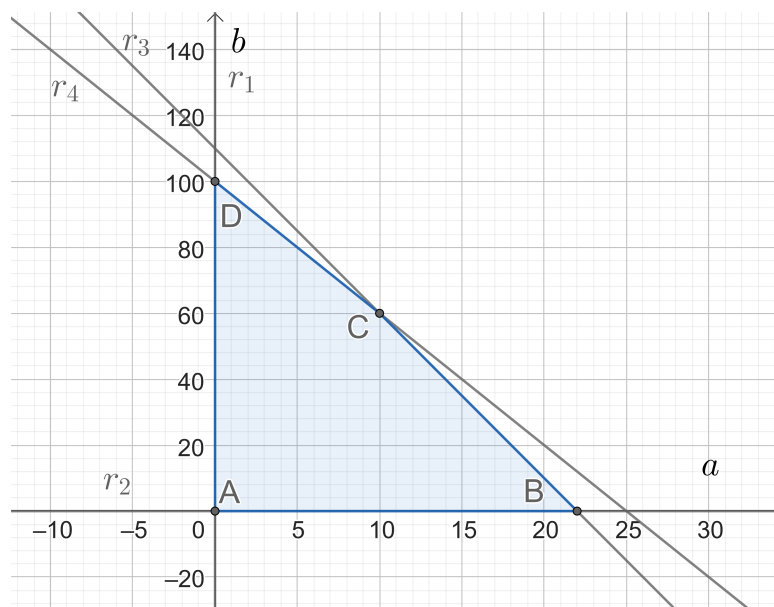
Per una altra part, la funció que volem maximitzar és:

$$f(a, b) = 100a + 22b.$$

Les rectes que delimiten la regió factible són:

- r_1 : $a = 0$, que és l'eix vertical.
- r_2 : $b = 0$, que és l'eix horitzontal.
- r_3 : $5a + b = 110$, que passa pels punts $(a = 22, b = 0)$ i $(a = 0, b = 110)$.
- r_4 : $4a + b = 100$, que passa pels punts $(a = 25, b = 0)$ i $(a = 0, b = 100)$.

La regió factible és, per tant:



Traçant les rectes, observem que els punts de tall són:

- A (r_1 i r_2), que és el punt $(0,0)$.
- B (r_1 i r_4), que és el punt $(0,100)$.
- C (r_4 i r_3), que és el punt $(10,60)$.
- D (r_3 i r_2), que és el punt $(22,0)$.

Avaluant la funció objectiu en els punts de tall,

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \cdot 100 + 0 \cdot 22 = 0, \\ f(0,100) = 0 \cdot 100 + 100 \cdot 22 = 2200, \\ f(10,60) = 10 \cdot 100 + 60 \cdot 22 = 2320, \\ f(22,0) = 22 \cdot 100 + 0 \cdot 22 = 2200. \end{cases}$$

Per tant, per maximitzar els ingressos, haurem de fabricar 10 aspiradores i 60 bateries. Els ingressos així obtinguts seran de 2320 €.

- b) Si el preu de venda de les aspiradores va disminuint, hi haurà un moment en què serà més rendible fabricar només bateries. Calcula quin és el preu de venda que han de tenir les aspiradores, de manera que el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries.

Criteris: No penalitzar si s'utilitza igualtat en comptes de desigualtat. **(Total 2 pt)**

Solució. Cercam un nou preu x per a les aspiradores tal que els ingressos al vèrtex C siguin més petits o iguals que els del vèrtex B :

$$0 \cdot x + 100 \cdot 22 \geq 10 \cdot x + 60 \cdot 22 \implies 10x \leq 40 \cdot 22 \implies x \leq 4 \cdot 22 = 88 \text{ €}.$$

És a dir, quan el preu de venda de les aspiradores és de menys de 88 €, el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries. Si el preu és igual a 88 €, el màxim benefici total el podem obtenir produïnt només bateries, o també produïnt 10 aspiradores i 22 bateries.

P4. — Considera la funció $f(x) = e^x - e^{-x}$, per a $x \geq 0$.

a) Calcula el valor de la funció en els extrems del domini.

Criteris: 1 pt per calcular correctament $f(0)$; 2 pts per calcular correctament $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$.

(Total 3 pt)

Solució. En els extrems del domini,

$$f(0) = e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty - 0 = +\infty.$$

b) Calcula $f'(x)$ i $f''(x)$.

Criteris:

(Total 4 pt)

Solució. La primera derivada és:

$$f'(x) = (e^x - e^{-x})' = e^x - (-1) \cdot e^{-x} = e^x + e^{-x}.$$

La segona derivada és:

$$f''(x) = (e^x + e^{-x})' = e^x + (-1) \cdot e^{-x} = e^x - e^{-x},$$

que, casualment, coincideix amb $f(x)$.

c) Calcula $\int_0^1 f(x) dx$.

Criteris: 2 pts per calcular correctament una primitiva; 1 pt per aplicar correctament la regla de Barrow.

(Total 3 pt)

Solució. Per l'apartat anterior, podem deduir que, si la segona derivada és la mateixa funció, aleshores la seva derivada n'és una primitiva. Alternativament, podem calcular-ho així:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 e^x - e^{-x} dx = \int_0^1 e^x + (-1) \cdot e^{-x} dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 \\ &= (e^1 + e^{-1}) - (e^0 + e^{-0}) = (e^1 + e^{-1}) - (1 + 1) = e + \frac{1}{e} - 2 \approx 1.086. \end{aligned}$$

P5. — Segons un estudi de mercat, la quantitat de gent que assistirà a un espectacle, g (en nombre de persones), en funció del preu de l'entrada, p (en €), serà la següent:

$$g(p) = \begin{cases} 500, & \text{per a } p = 0, \\ 300 - 3p, & \text{per a } 0 < p < 100, \\ 0, & \text{per a } p = 100. \end{cases}$$

- a) Quin és el domini de $g(p)$? És aquesta funció contínua?

Criteris: 1 pt per indicar el domini; 2 pts per estudiar la continuïtat. No penalitzar si s'argumenta que és discontinua sense estudiar tot el domini. **(Total 3 pt)**

Solució. El domini és $p \in [0, 100]$.

La funció no és contínua, ja que no ho és en el punt $p = 0$:

$$g(0) = 500, \quad \lim_{p \rightarrow 0^+} g(p) = 300 - 3 \cdot 0 = 300.$$

No obstant, la funció sí que és contínua a l'interval $(0, 100]$.

- b) Segons l'estudi de mercat, si hi assisteixen 240 persones, quin haurà estat el preu de l'entrada?

Criteris: Penalització amb -0.5 pt si no comproven els extrems del domini. **(Total 2 pt)**

Solució. Ens demanen calcular el preu p tal que $g(p) = 240$. No és ni $p = 0$ ni $p = 100$, així que si la solució existeix, serà a $p \in (0, 100)$:

$$300 - 3p = 240 \implies 3p = 60 \implies p = 20 \text{ €}.$$

- c) Els ingressos són el producte del preu per la quantitat de gent que hi assistirà. Segons l'estudi, quin preu maximitza els ingressos?

Criteris: 1 pt per indicar la funció objectiu; 2 pts per calcular la seva derivada; 2 pts per calcular el màxim. Penalització amb -1 pt si no es comprova que és un màxim. Penalització amb -1 pt si no es comprova el valor en els extrems del domini. **(Total 5 pt)**

Solució. Volem maximitzar la funció

$$f(p) = p \cdot g(p) = \begin{cases} 0 \cdot 500, & \text{per a } p = 0, \\ p \cdot (300 - 3p), & \text{per a } 0 < p < 100, \\ 100 \cdot 0, & \text{per a } p = 100. \end{cases}$$

El valor en els extrems és de $f(0) = 0 \text{ €}$ i de $f(100) = 0 \text{ €}$. A l'interior de l'interval, la funció pot tenir un màxim només quan la seva derivada s'anul·la:

$$(p \cdot (300 - 3p))' = 0 \implies (300p - 3p^2)' = 0 \implies 300 - 6p = 0 \implies p = 50.$$

Aquesta funció, que és una paràbola, té el vèrtex a $p = 50 \text{ €}$, que és un màxim absolut (el coeficient de p^2 és negatiu), i proporciona uns ingressos de $f(50) = 7.500 \text{ €}$.

P6. — Un estudi de mercat indica que uns clients determinats tenen un 7% de probabilitats de comprar un producte A, i un 10% de probabilitats de comprar un producte B.

- a) Si la probabilitat de “comprar A i no comprar B ” és d'un 6%, són els esdeveniments “comprar A ” i “comprar B ” independents?

Criteris: 2 pts per indicar que $P(A) \cdot P(B)$ hauria de coincidir amb $P(A \cap B)$; 3 pts per calcular $P(A \cap B)$. **(Total 5 pt)**

Solució. Els esdeveniments seran independents si $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \implies P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c).$$

Finalment,

$$\begin{cases} P(A) \cdot P(B) = 0.07 \cdot 0.10 = 0.007, \\ P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c) = 0.07 - 0.06 = 0.010, \end{cases}$$

i, per ser diferents, els esdeveniments són dependents.

- b) Si els esdeveniments “comprar A ” i “comprar B ” fossin independents, què seria major: la probabilitat de “no comprar A ”; o la probabilitat de “no comprar A , sabent que s'ha comprat B ”?

Criteris: Si es calculen les probabilitats, 1 pt per indicar que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, 2 pts per $P(A^c)$, 2 pts per $P(A^c|B)$. **(Total 5 pt)**

Solució. Si A i B són esdeveniments independents, conèixer si B és cert o fals no afecta a la probabilitat que A sigui cert o fals. Per tant, $P(A^c) = P(A^c|B)$.

P7. — Segons les dades de l'Institut Nacional d'Estadística (INE), l'1 de gener de 2023, a les Illes Balears hi havia 1 210 000 habitants en total. A més, el nombre d'habitatges, en funció del nombre d'habitants que hi conviven, eren els següents:

	Nombre de convivents			
	1	2	3	4 o més
Nombre d'habitatges	118 000	124 000	93 000	119 000

- a) Quin és el nombre mitjà de convivents per habitatge? **(Total 2 pt)**

Solució. El nombre mitjà de convivents el calcularem tenint en compte el nombre total d'habitants, i el nombre total d'habitatges: $1.210.000/454.000 = 2.66$ convivents per habitatge.

- b) Quants habitants pertanyen a un habitatge en el qual hi ha 4 o més convivents? Quin és el nombre mitjà de convivents en els habitatges en els quals hi ha 4 o més convivents?

Criteris: 1 pt per cada càlcul. **(Total 2 pt)**

Solució. Per calcular el nombre de convivents en els habitatges d'almenys 4 persones, observam que:

	Nombre de convivents			
	1	2	3	4 i més
Habitatges	118.000	124.000	93.000	119.000
Habitants	118.000	248.000	279.000	x

Per tant, $x = 1.210.000 - 118.000 - 248.000 - 279.000$, d'on obtenim que el nombre mitjà de convivents en aquests habitatges és de $x/119.000 = 4.74$.

- c) Escollint un habitant a l'atzar, quina és la probabilitat que visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta.

Criteris: Penalització amb -1 pt si no indica que utilitza la llei de Laplace (o casos favorables/casos totals). **(Total 3 pt)**

Solució. De 1.210.000 habitants, 118.000 viuen en un habitatge unipersonal. Per la llei de Laplace, la probabilitat demanada és de $\frac{118.000}{1.210.000} = 0.0975 = 9.75\%$.

- d) Escollint, de manera independent, dos habitants a l'atzar, quina és la probabilitat que algun d'ells visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta.

Criteris: 1.5 pt per plantejar, 1.5 pt per calcular. **(Total 3 pt)**

Solució. Siguin U_1 i U_2 els esdeveniments que indiquen que viu en un habitatge unipersonal, el primer i el segon habitant, respectivament. Atès que els hem escollit de manera independent,

$$\begin{aligned} P(U_1 \cup U_2) &= P(U_1) + P(U_2) - P(U_1 \cap U_2) = P(U_1) + P(U_2) - P(U_1)P(U_2) \\ &= 0.0975 + 0.0975 - 0.0975^2 = 0.1855 = 18.55\%. \end{aligned}$$

P8. — Una empresa que fabrica components electrònics realitza un estudi sobre la vida útil dels seus productes. Amb una mostra aleatòria de 50 components electrònics, el temps mitjà de vida útil és de 507 hores. Suposem que el temps de vida útil segueix una distribució normal i que la seva desviació típica és coneguda i igual a 150 hores.

- a) Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional de la vida útil dels components amb un nivell de confiança del 75%.

Criteris: Càlcul de $z_{\alpha/2}$ 1 pt, càlcul de $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 2 pts, càlcul dels extrems de l'interval 2 pts. Penalització amb -1 pt si s'utilitza el valor de $z_{\alpha/2}$ sense justificar. **(Total 5 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 75%, el nivell de significació és $\alpha = 0.25$. Per tant, $\alpha/2 = 0.125$ i $z_{\alpha/2} = 1.15$. Amb les dades de l'enunciat ($n = 50$, $\bar{x} = 507$, $\sigma = 150$), podem calcular l'interval demanat com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (482.60, 531.40).$$

- b) Suposant ara que la mitjana poblacional és de $\mu = 500$ hores, quantes hores de vida útil tenen el 10% de productes que menys vida útil tenen?

Criteris: 2 pts per plantejar, 2 pts per calcular, 1 pt per interpretar. Penalització amb -1 pt si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.5 pt per errors de càlcul lleus. **(Total 5 pt)**

Solució. Amb les mateixes variables que l'apartat anterior, cercam ara la vida útil v tal que:

$$\begin{aligned} P(X \leq v) = 10\% &\implies P\left(\frac{X-500}{150} \leq \frac{v-500}{150}\right) = 10\% \\ &\implies P\left(Z \leq \frac{v-500}{150}\right) = 10\% \\ &\implies P\left(Z \geq -\frac{v-500}{150}\right) = 90\%. \end{aligned}$$

Comprovant-ho a la taula, el valor més proper és per a $Z = 1.28$ i, per tant,

$$1.28 \geq -\frac{v-500}{150} \implies v = 500 - 150 \cdot 1.28 = 308,$$

és a dir, el 10% de productes que menys vida útil tenen, en tenen 308 hores o menys.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Justificau les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Tens un petit negoci que ven pantalons i camises. El preu de cada pantaló és de 60 €, i el preu de cada camisa és de 40 €.

- a) Aquesta setmana s'han venut un total de 100 unitats entre pantalons i camises, i hem tingut uns ingressos totals de 5400 €. Quants pantalons i quantes camises hem venut? **(5 pt)**

Solució. Considerem la matriu que, multiplicada per un vector que indica les unitats de pantalons i camises venudes (columnes), ens dona el nombre total d'unitats i els ingressos totals (fileres):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 60 & 40 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, si x és el nombre de pantalons venuts, i y el nombre de camises venudes,

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 5400 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix},$$

que hem pogut resoldre pel mètode de Gauss, i hem obtingut que hem venut 70 pantalons i 30 camises.

- b) Fa tres setmanes es varen vendre un total de 110 unitats entre pantalons i camises, i un empleat que va revisar la caixa va dir que els ingressos totals eren de 4200 €... però tu no creus l'empleat. Quants pantalons i quantes camises s'haurien d'haver venut segons el que diu l'empleat? Interpreta el resultat obtingut. **(5 pt)**

Solució. Amb el mateix procediment que l'apartat anterior,

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 4200 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

No és possible haver venut -10 pantalons, així que aquesta combinació de 110 unitats i 4200 € d'ingressos totals és impossible.

P2. — Considera les matrius següents:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Sabem que existeix un valor x tal que B és la inversa de A . Quin és aquest valor x ? (3 pt)

Solució. A i B són inverses si i només si se satisfà la igualtat matricial següent:

$$A \cdot B = I \implies \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies 2x + 3 \cdot (-5) = 1 \implies x = 8.$$

Atès que sabem que n'existeix un, aquest és necessàriament $x = 8$. (Altament, hauríem de comprovar que la resta de termes del producte matricial coincideixen.)

- b) Per al valor x de l'apartat anterior, calcula $(A + I)(B - I) + (A - I)(B + I)$. (4 pt)

Solució. Abans de fer càlculs matricials, podem simplificar l'expressió:

$$\begin{aligned} & (A + I)(B - I) + (A - I)(B + I) \\ &= [AB - A + B - I] + [AB + A - B - I] \\ &= 2AB - 2I = 2I - 2I = 0, \end{aligned}$$

és a dir, el resultat és la matriu nul·la.

- c) Existeixen alguns valors per a y, z de manera que C sigui la inversa de A ? (3 pt)

Solució. No, ja que la inversa és única. És a dir, si B i C són dues inverses de la mateixa matriu, haurien de ser la mateixa matriu:

$$\begin{cases} A \cdot B = I \\ A \cdot C = I \end{cases} \implies B = C \implies \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = y, \\ -3 = z, \\ -5 = 7, \\ 2 = -1, \end{cases}$$

i és clar que les dues darreres igualtats no són certes.

P3. — Una empresa produeix dos tipus de productes: aspiradores i bateries elèctriques.

- Per produir una aspiradora, necessitam 5 h d'un operari i 4 kg de matèries primeres.
- Per produir una bateria, necessitam 1 h d'un operari i 1 kg de matèries primeres.

Cada aspiradora es ven per 100 €, i cada bateria, per 22 €. Disposam d'un màxim de 110 hores d'operaris i de 100 kg de matèries primeres. Suposarem que vendrem tota la producció.

- a) Quantes unitats de cada tipus hem de produir per maximitzar els ingressos? (8 pt)

Solució. Ho resolldrem com un problema de programació lineal en dues dimensions. En particular, siguin a les aspiradores que produïrem, i b les bateries que produïrem. Aleshores, les restriccions són:

$$\left. \begin{aligned} a &\geq 0 \\ b &\geq 0 \\ 5a + b &\leq 110 \\ 4a + b &\leq 100 \end{aligned} \right\}$$

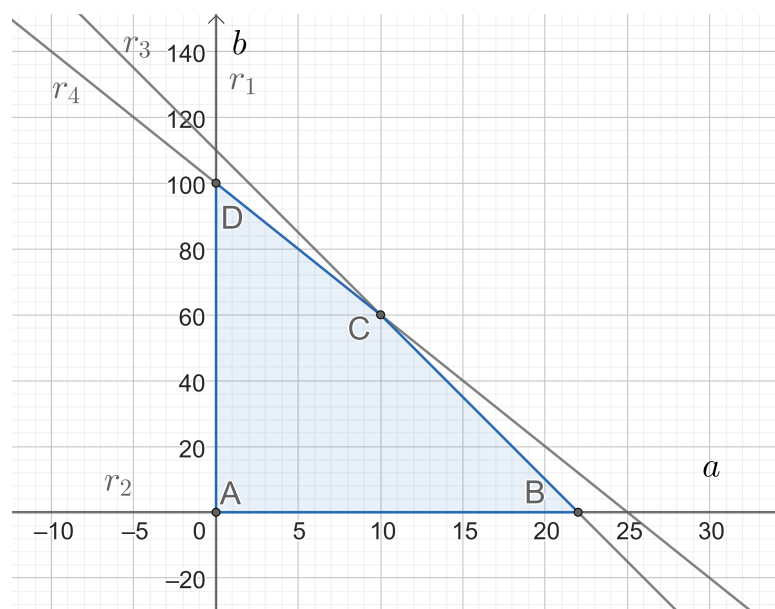
Per una altra part, la funció que volem maximitzar és:

$$f(a,b) = 100a + 22b.$$

Les rectes que delimiten la regió factible són:

- r_1 : $a = 0$, que és l'eix vertical.
- r_2 : $b = 0$, que és l'eix horitzontal.
- r_3 : $5a + b = 110$, que passa pels punts $(a = 22, b = 0)$ i $(a = 0, b = 110)$.
- r_4 : $4a + b = 100$, que passa pels punts $(a = 25, b = 0)$ i $(a = 0, b = 100)$.

La regió factible és, per tant:



Traçant les rectes, observem que els punts de tall són:

- A (r_1 i r_2), que és el punt $(0,0)$.
- B (r_1 i r_4), que és el punt $(0,100)$.
- C (r_4 i r_3), que és el punt $(10,60)$.
- D (r_3 i r_2), que és el punt $(22,0)$.

Avaluant la funció objectiu en els punts de tall,

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \cdot 100 + 0 \cdot 22 = 0, \\ f(0,100) = 0 \cdot 100 + 100 \cdot 22 = 2200, \\ f(10,60) = 10 \cdot 100 + 60 \cdot 22 = 2320, \\ f(22,0) = 22 \cdot 100 + 0 \cdot 22 = 2200. \end{cases}$$

Per tant, per maximitzar els ingressos, haurem de fabricar 10 aspiradores i 60 bateries. Els ingressos així obtinguts seran de 2320 €.

- b) Si el preu de venda de les aspiradores va disminuint, hi haurà un moment en què serà més rendible fabricar només bateries. Calcula quin és el preu de venda que han de tenir les aspiradores, de manera que el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries. **(2 pt)**

Solució. Cercam un nou preu x per a les aspiradores tal que els ingressos al vèrtex C siguin més petits o iguals que els del vèrtex B :

$$0 \cdot x + 100 \cdot 22 \geq 10 \cdot x + 60 \cdot 22 \implies 10x \leq 40 \cdot 22 \implies x \leq 4 \cdot 22 = 88 \text{ €}.$$

És a dir, quan el preu de venda de les aspiradores és de menys de 88 €, el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries. Si el preu és igual a 88 €, el màxim benefici total el podem obtenir produïnt només bateries, o també produïnt 10 aspiradores i 22 bateries.

P4. — Considera la funció $f(x) = e^x - e^{-x}$, per a $x \geq 0$.

- a) Calcula el valor de la funció en els extrems del domini. **(3 pt)**

Solució. En els extrems del domini,

$$f(0) = e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty - 0 = +\infty.$$

- b) Calcula $f'(x)$ i $f''(x)$. **(4 pt)**

Solució. La primera derivada és:

$$f'(x) = (e^x - e^{-x})' = e^x - (-1) \cdot e^{-x} = e^x + e^{-x}.$$

La segona derivada és:

$$f''(x) = (e^x + e^{-x})' = e^x + (-1) \cdot e^{-x} = e^x - e^{-x},$$

que, casualment, coincideix amb $f(x)$.

- c) Calcula $\int_0^1 f(x) dx$. **(3 pt)**

Solució. Per l'apartat anterior, podem deduir que, si la segona derivada és la mateixa funció, aleshores la seva derivada n'és una primitiva. Alternativament, podem calcular-ho així:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 e^x - e^{-x} dx = \int_0^1 e^x + (-1) \cdot e^{-x} dx = e^x + e^{-x} \Big|_0^1 \\ &= (e^1 + e^{-1}) - (e^0 + e^{-0}) = (e^1 + e^{-1}) - (1 + 1) = e + \frac{1}{e} - 2. \end{aligned}$$

P5. — Segons un estudi de mercat, la quantitat de gent que assistirà a un espectacle, g (en nombre de persones), en funció del preu de l'entrada, p (en €), serà la següent:

$$g(p) = \begin{cases} 500, & \text{per a } p = 0, \\ 300 - 3p, & \text{per a } 0 < p < 100, \\ 0, & \text{per a } p = 100. \end{cases}$$

- a) Quin és el domini de $g(p)$? És aquesta funció contínua? (3 pt)

Solució. El domini és $p \in [0, 100]$.

La funció no és contínua, ja que no ho és en el punt $p = 0$:

$$g(0) = 500, \quad \lim_{p \rightarrow 0^+} g(p) = 300 - 3 \cdot 0 = 300.$$

No obstant, la funció sí que és contínua a l'interval $(0, 100]$.

- b) Segons l'estudi de mercat, si hi assisteixen 240 persones, quin haurà estat el preu de l'entrada? (2 pt)

Solució. Ens demanen calcular el preu p tal que $g(p) = 240$. No és ni $p = 0$ ni $p = 100$, així que si la solució existeix, serà a $p \in (0, 100)$:

$$300 - 3p = 240 \implies 3p = 60 \implies p = 20 \text{ €}.$$

- c) Els ingressos són el producte del preu per la quantitat de gent que hi assitirà. Segons l'estudi, quin preu maximitza els ingressos? (5 pt)

Solució. Volem maximitzar la funció

$$f(p) = p \cdot g(p) \begin{cases} 0 \cdot 500, & \text{per a } p = 0, \\ p \cdot (300 - 3p), & \text{per a } 0 < p < 100, \\ 100 \cdot 0, & \text{per a } p = 100. \end{cases}$$

El valor en els extrems és de $f(0) = 0 \text{ €}$ i de $f(100) = 0 \text{ €}$. A l'interior de l'interval, la funció pot tenir un màxim només quan la seva derivada s'anul·la:

$$(p \cdot (300 - 3p))' = 0 \implies (300p - 3p^2)' = 0 \implies 300 - 6p = 0 \implies p = 50.$$

Aquesta funció, que és una paràbola, té el vèrtex a $p = 50 \text{ €}$, que és un màxim absolut i proporciona uns ingressos de $f(50) = 7.500 \text{ €}$.

P6. — Un estudi de mercat indica que uns clients determinats tenen un 7% de probabilitats de comprar un producte A , i un 10% de probabilitats de comprar un producte B .

- a) Si la probabilitat de “comprar A i no comprar B ” és d'un 6%, són els esdeveniments “comprar A ” i “comprar B ” independents? (5 pt)

Solució. Els esdeveniments seran independents si $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \implies P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c).$$

Finalment,

$$\begin{cases} P(A) \cdot P(B) = 0.07 \cdot 0.10 = 0.007, \\ P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c) = 0.07 - 0.06 = 0.010, \end{cases}$$

i, per ser diferents, els esdeveniments són dependents.

- b) Si els esdeveniments “comprar A ” i “comprar B ” fossin independents, què seria major: la probabilitat de “no comprar A ”; o la probabilitat de “no comprar A , sabent que s’ha comprat B ”? (5 pt)

Solució. Si A i B són esdeveniments independents, conèixer si B és cert o fals no afecta a la probabilitat que A sigui cert o fals. Per tant, $P(A^c) = P(A^c|B)$.

P7. — Segons les dades de l’Institut Nacional d’Estadística (INE), l’1 de gener de 2023, a les Illes Balears hi havia 1 210 000 habitants en total. A més, el nombre d’habitatges, en funció del nombre d’habitants que hi conviuen, eren els següents:

	Nombre de convivents			
	1	2	3	4 o més
Nombre d’habitatges	118 000	124 000	93 000	119 000

- a) Quin és el nombre mitjà de convivents per habitatge? (2 pt)

Solució. El nombre mitjà de convivents el calcularem tenint en compte el nombre total d’habitants, i el nombre total d’habitatges: $1.210.000/454.000 = 2.66$ convivents per habitatge.

- b) Quants habitants pertanyen a un habitatge en el qual hi ha 4 o més convivents? Quin és el nombre mitjà de convivents en els habitatges en els quals hi ha 4 o més convivents? (2 pt)

Solució. Per calcular el nombre de convivents en els habitatges d’almenys 4 persones, observam que:

	Nombre de convivents			
	1	2	3	4 i més
Habitatges	118.000	124.000	93.000	119.000
Habitants	118.000	248.000	279.000	x

Per tant, $x = 1.210.000 - 118.000 - 248.000 - 279.000$, d’on obtenim que el nombre mitjà de convivents en aquests habitatges és de $x/119.000 = 4.74$.

- c) Escollint un habitant a l’atzar, quina és la probabilitat que visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta. (3 pt)

Solució. De l’1.210.000 habitants, 118.000 viuen en un habitatge unipersonal. Per la llei de Laplace, la probabilitat demanada és de $\frac{118.000}{1.210.000} = 0.0975 = 9.75\%$.

- d) Escollint, de manera independent, dos habitants a l’atzar, quina és la probabilitat que algun d’ells visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta. (3 pt)

Solució. Siguin U_1 i U_2 els esdeveniments que indiquen que viu en un habitatge unipersonal, el primer i el segon habitant, respectivament. Atès que els hem escollit de manera independent,

$$\begin{aligned} P(U_1 \cup U_2) &= P(U_1) + P(U_2) - P(U_1 \cap U_2) = P(U_1) + P(U_2) - P(U_1)P(U_2) \\ &= 0.0975 + 0.0975 - 0.0975^2 = 0.1855 = 18.55\%. \end{aligned}$$

P8. — Una empresa que fabrica components electrònics realitza un estudi sobre la vida útil dels seus productes. Amb una mostra aleatòria de 50 components electrònics, el temps mitjà de vida útil és de 507 hores. Suposem que el temps de vida útil segueix una distribució normal i que la seva desviació estàndard és coneguda i igual a 150 hores.

- a) Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional de la vida útil dels components amb un nivell de confiança del 75%. **(5 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 75%, el nivell de significació és $\alpha = 0.25$. Per tant, $\alpha/2 = 0.125$ i $z_{\alpha/2} = 1.15$. Amb les dades de l'enunciat ($n = 50$, $\bar{x} = 507$, $\sigma = 150$), podem calcular l'interval demanat com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (482.60, 531.40).$$

- b) Suposant ara que la mitjana poblacional és de $\mu = 500$ hores, quantes hores de vida útil tenen el 10% de productes que menys vida útil tenen? **(5 pt)**

Solució. Amb les mateixes variables que l'apartat anterior, cercam ara la vida útil v tal que:

$$\begin{aligned} P(X \leq v) = 10\% &\implies P\left(\frac{X-500}{150} \leq \frac{v-500}{150}\right) = 10\% \\ &\implies P\left(Z \leq \frac{v-500}{150}\right) = 10\% \\ &\implies P\left(Z \geq -\frac{v-500}{150}\right) = 90\%. \end{aligned}$$

Comprovant-ho a la taula, el valor més proper és per a $Z = 1.28$ i, per tant,

$$1.28 \geq -\frac{v-500}{150} \implies v = 500 - 150 \cdot 1.28 = 308,$$

és a dir, el 10% de productes que menys vida útil tenen, en tenen 308 hores o menys.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.