

Criteris de correcció globals

- Heu de corregir quatre qüestions en total d'entre les vuit proposades. Si l'alumne presenta més de quatre qüestions, corregiu-ne les quatre primeres.
- Cada problema té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions màximes que apareixen a cada apartat (si no està indicat, tots els apartats d'una mateixa pregunta tenen la mateixa valoració). Les puntuacions dels apartats són independents: si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades equivocades), donau-li la puntuació adient.
- Es valorarà conjuntament el resultat, la justificació (ja sigui simbòlica o escrita), la claredat i ús del llenguatge matemàtic i no matemàtic, i l'estructura de la resposta. Orientativament, penalitzau:
 - Els errors de càlcul amb un 25%; els errors greus i/o que portin a resultats incoherents o absurds, amb un 50%.
 - En preguntes de justificar, si la justificació és només "intuïtiva" (p. ex. una observació que no respon exhaustivament a allò que s'ha demanat), amb el 30%-50%; en preguntes de justificar, una resposta sense cap justificació s'ha de penalitzar amb el 100%.
 - En qualsevol pregunta, si apareixen raonaments (que no són clars/evidents) sense justificar, amb el 20%-30%.
 - La imprecisió en l'ús del llenguatge matemàtic (p. ex. variables sense introduir/que canvien de significat), o la falta de claredat per absència de llenguatge matemàtic, amb un 20%-30%.
 - L'estructura s'ha de penalitzar en funció de la dificultat per entendre la resposta.
- Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris generals o específics. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Criteris de correcció específics

Només es detallen els apartats en què hi ha diverses preguntes o que es poden desglossar. En apartats on s'omet el criteri de correcció específic, aquest serà simplement "Càlcul i/o justificació correcta".

- P1.** — (a) **Criteris:** -2 punts si no sap fer la transposada d'una matriu, -2 punts si no sap multiplicar matrius, -1 punt per error de càlcul (màxim 2).
- (b) **Criteris:** -1 punt si no justifica que la matriu és invertible, -1 punt per error de càlcul (amb més de 2 errors es lleva tota la puntuació), -1 punt si no comprova que la matriu resultant és M^{-1} .
- (c) **Criteris:** -1 punt per error de càlcul, 2 punts per al procediment i 2 punts per a la resolució.

P2. —

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) **Criteris:** 4 punts si ho resolen correctament, 0 altrament. Es lleva -1 punt només si hi ha un únic error de càlcul.
- (b) **Criteris:** 1 punt pel càlcul del determinant, 1 punt pel cas de $Rang = 3$, 1 punt per cada cas concret ($k = 3$ i $k = 0$).
- (c) **Criteris:** -1.5 punt si no està explicat.

- P3.** — (a) **Criteris:** 1 punt pel càlcul dels vectors, 2 punts per veure que dos dels costats són perpendiculars, -1 punt per error de càlcul.
- (b) **Criteris:** -1.5 punts per cada mòdul mal calculat.
- (c) **Criteris:** -1 punt si hi ha un error de càlcul. Altrament 4 punts si està bé, 0 si no.

- P4.** — (a) **Criteris:** 2.5 punts per veure que són perpendiculars i 2.5 per veure que s'encreuen. -1 punt per error de càlcul.
- (b) **Criteris:** 2.5 punts per calcular el vector normal del pla i 2.5 per proporcionar l'equació implícita. -1 punt per error de càlcul.

- P5.** — (a) **Criteris:** 2 punts per plantejar bé cada una de les equacions, 1 punt per proporcionar el resultat correcte.

(b)

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Criteris: 2 punts per indicar el domini, 3 punts per contestar que sí que la funció és contínua en el seu domini. Si contesten fals perquè contemplen tot $\mathbb{R}^+$, avaluam: 1 punt per plantejar el límit, 1 punt per resoldre bé el límit, 1 punt per dir el tipus de discontinuïtat, -0.5 per contestar malament el fet que és contínua en el seu domini.

- P6.** — **Criteris:** 2 punts per veure els punts on tallen les corbes, 2 punts per plantejar bé la integral a resoldre, 2 punts per integrar correctament, 2 punts per resoldre bé la integral definida (aplicar bé la regla de Barrow) i 2 punts per posar bé les unitats.

- P7.** — **Criteris:** (a,b) 1 punt pel plantejament, 2 punts per la resolució; (c) 2 punts pel plantejament, 2 punts per la resolució. En cas de no considerar l'extracció, han d'indicar el perquè d'aquesta elecció de manera correcta. Altrament només s'avaluarà la part corresponent al plantejament de la probabilitat que es vol calcular.

- P8.** — (a) **Criteris:** 2 punts pel plantejament, 1 punt per tipificar, 1 punt per arreglar l'expressió per poder trobar el valor corresponent a la taula, 1 punt per trobar el valor correcte a la taula, 1 punt per aïllar μ . No penalitzam per no arrodonir. És simplement per facilitar els càlculs de (b) i (c).
- (b) **Criteris:** 1 punt pel plantejament, 1 punt per la resolució.
- (c) **Criteris:** 1 punt pel plantejament, 1 punt per la resolució.

P1. — (a) *Solució.* Tenim que

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *Solució.* Com que $|M| = -2 \neq 0$, tenim que la matriu és invertible.

Per calcular la inversa ens diuen que resolguem dos sistemes matricials. Fem-ho

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 2c \\ 2a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a - 4a = 1 \rightarrow a = -1/2, \\ c = -2a \rightarrow c = 1. \end{cases}$$

$$M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b + 2d \\ 2b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b = -d \rightarrow b = 1, \\ -2d + d = 1 \rightarrow d = -1. \end{cases}$$

Per tant,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprovem-ho:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) *Solució.* Com que M és invertible, $XM + A = C \rightarrow XM = C - A \rightarrow X = (C - A)M^{-1}$. Aleshores tenim que

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & 4 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

P2. —

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Solució.*

$$B = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}.$$

(b) *Solució.* $\det(B) = (3-k)(-k)(3-k) = 0 \iff k = 3, k = 0$. Per tant, si $k \neq 3$, i $k \neq 0$, tenim que el $\text{Rang}(B) = 3$. Altrament,

– si $k = 3$, $\text{Rang}(B) = 1$, ja que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

– si $k = 0$, $\text{Rang}(B) = 2$, ja que

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) *Solució.* Per a qualsevol $k \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$, ja que $\det(B) \neq 0$, com s'ha vist a (b).

P3. — (a) *Solució.* Els vectors que generen el triangle són:

$$\vec{PQ} = (8, 0, 6), \quad \vec{PR} = (-3, 0, 4), \quad \text{i} \quad \vec{QR} = (-11, 0, -2).$$

Per veure que és rectangle, dos dels vectors que generen els seus costats han de ser perpendiculars. En efecte,

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = (8, 0, 6) \cdot (-3, 0, 4) = -24 + 0 + 24 = 0,$$

i, per tant, P és el vèrtex de l'angle recte.

(b) *Solució.* No, perquè els catets del triangle ja no són iguals:

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{100} = 10u, \quad |\vec{PR}| = \sqrt{25} = 5u.$$

(c) *Solució.* Perquè els 4 punts siguin coplanaris, S ha de pertànyer al pla π que formen els altres tres punts, on

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 8\lambda - 3t, \\ y = 1, \\ z = 1 + 6\lambda + 4t. \end{cases}$$

Imposant que S compleixi les equacions del pla, tenim que S ha de ser de la forma

$$\left(\frac{7\lambda - 2}{2}, 1, 0 \right),$$

per a tot λ real. Per tant, a pot ser qualsevol.

Una altra manera és provar que el determinant de la matriu formada pels vectors $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$, $\vec{PS}$ és nul. És a dir,

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 & -1 - a \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En efecte, ja que té una fila de 0.

P4. — (a) *Solució.* S'encreuen perpendicularment, ja que:

Dos punts de r són $P = (-1, 0, 1)$ i $Q = (1, -1, 1)$, per tant, tenim que el vector director de r és

$$\vec{d}_r = \vec{PQ} = (2, -1, 0)$$

mentre que el de s és

$$\vec{d}_s = (1, 2, 1),$$

els quals satisfan que $\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 0$, dada que ens diu que són perpendiculars. Ara bé, el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = -1, \\ z = 1, \\ x + 1 = \frac{y - 1}{2}, \\ x + 1 = z, \end{cases}$$

no té solució i, per tant, no es tallen. És a dir, s'encreuen.

(b) *Solució.* El vector normal del pla que ens demanen és:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 5).$$

Així doncs, el pla és de la forma $-x - 2y + 5z = D$ tal que es compleix que $-2 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = D$, d'on $D = -1$. Aleshores, l'equació implícita del pla és

$$-x - 2y + 5z = -1, \quad \text{que és el mateix que } x + 2y - 5z = 1.$$

P5. — (a) *Solució.* $f(x)$ ha de complir que:

$$- f'(100) = a + b \frac{1}{2\sqrt{100}} = 0. \quad \text{És a dir, } 20a + b = 0.$$

$$- f(49) = 91. \quad \text{És a dir, } 49a + 7b = 91.$$

Resolent el sistema tenim que $a = -1$ i $b = 20$.

(b)

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Solució. El domini és $D = [0, 1) \cup (1, +\infty)$. Tota funció és sempre contínua en el seu domini. Fora d'aquest, presenta una discontinuïtat "evitable" a $x = 1$ ("li falta un punt", el $(1, 1/2)$), però es demana dins del seu domini.

P6. — *Solució.* Els punts de tall de les dues corbes són a $x = 0$ i $x = 4$. Per altra part, la gràfica de $f(x)$ va per damunt de la de $g(x)$. Aleshores,

$$A = \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x) dx = \frac{64}{3} u^2 = 21.\hat{3} u^2.$$

P7. — *Solució.* Sigui N el succés "persona aficionada a la natació", C el succés "persona aficionada al ciclisme" i A el succés "persona que s'inclina més per altres esports" (és a dir, $A = (N \cup C)^c$).

$$(a) P(NN) = \frac{38}{100} \frac{37}{99} = 0.1420,$$

$$(b) P(CN \cup NC) = 2 \frac{21}{100} \frac{38}{99} = 0.1612,$$

$$(c) P((N \cup A)|C) = \frac{41}{100} + \frac{38}{99} = 0.798.$$

A la figura Figura 1 podem veure la representació gràfica de l'estudi en format arbre.

També es pot resoldre INDICANT que, al ser la població molt gran, estadísticament es pot no tenir en compte l'extracció. Llavors, (a) $P(NN) = 0.1444$, (b) $P(CN \cup NC) = 0.1596$, (c) $P((N \cup A)|C) = 0.79$.

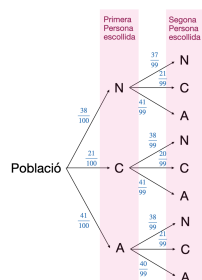


Figura 1: Informació gràfica (en forma d'arbre) dels dos successos amb algunes de les probabilitats que es poden extreure de l'enunciat.

P8. — (a) *Solució.* El pes segueix una distribució normal $N(\mu, 7.8)$. Sigui X el pes, en grams, que conté una llauna de mongetes, sabem que $P(X < 200) = 0.10$. Aleshores, tipificant tenim que

$$P\left(Z < \frac{200 - \mu}{7.8}\right) = 0.10.$$

Notem que $\mu > 200$, llavors $(200 - \mu)/7.8 < 0$. Ara bé,

$$P\left(Z < \frac{200 - \mu}{7.8}\right) = 1 - P\left(Z < -\frac{200 - \mu}{7.8}\right) = 0.10 \rightarrow P\left(Z < -\frac{200 - \mu}{7.8}\right) = 0.9.$$

Mirant a la taula tenim que 1.28 correspon a 0.8997 i 1.29 correspon a 0.9015. Interpolant tenim que 1.2816 és el valor que correspon a una probabilitat de 0.9. Els alumnes poden emprar tant el valor interpolat com 1.285. Aleshores,

– emprant el punt mitjà:

$$-\frac{200 - \mu}{7.8} = 1.285 \rightarrow \mu = 210.023,$$

– emprant el punt interpolat:

$$-\frac{200 - \mu}{7.8} = 1.2817 \rightarrow \mu = 209.997.$$

Aleshores, $\mu = 210$ g.

(b) *Solució.*

$$P(X > 225) = P\left(Z > \frac{225 - 210}{7.8}\right) = P(Z > 1.9231) = 1 - P(Z < 1.92) = 1 - 0.9726 = 0.0274.$$

(c) *Solució.*

$$P(190 < X < 225) = P\left(\frac{190 - 210}{7.8} < Z < \frac{225 - 210}{7.8}\right) = P(-2.56 < Z < 1.92) =$$

$$P(Z < 1.92) - P(Z < -2.56) = P(Z < 1.92) - 1 + P(Z < 2.56) = 0.9726 - 1 + 0.9948 = 0.9674.$$