



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)
CURSO 2023–2024**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria: JULIO

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ \frac{ax}{e^x - 1} + 2, & x > 0 \end{cases}$$

- a) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$. 1.75 pts
- b) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = -1$ 0.75 pts

1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x(3 - x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €. 2.5 pts

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es $11/5$. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno. 2.5 pts

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k - 3 & 0 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

- a) Estudiar el rango de la matriz M_k , dependiendo de los valores del parámetro k . 1.25 pts
- b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$, y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B$ 1.25 pts

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1: \begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases}, \quad r_2: \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores.

1 pto

b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1 .

1.5 pts

3B. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v}=8$

0.75 pts

b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi: x+3y+2z+3=0, \quad r: \begin{cases} 2x-3y-z=4 \\ x+y+2z=-3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman.

1.75 pts

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $1/3$, que la produzca B es $2/3$ y que la produzca C es $1/7$.

a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocula el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad?

1.5 pts

b) Si se inocula un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C?

1 pto

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento.

1.25 pts

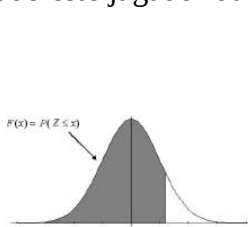
b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero?

Justificar la respuesta.

0.75 pts

c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada.

0.5 pts



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES

1A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ \frac{ax}{e^x - 1} + 2, & x > 0 \end{cases}$$

a) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$.

1.75 pts

b) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = -1$

0.75 pts

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

- Existe $f(0) = \frac{0^2 - 0 + 9}{0^2 + 3} = 3$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3} = 3$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{e^x - 1} + 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax + 2e^x - 2}{e^x - 1} = \frac{a \cdot 0 + 2e^0 - 2}{e^0 - 1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indet e min acción (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a + 2e^x}{e^x} = \frac{a + 2e^0}{e^0} = a + 2$$

- Los tres valores son iguales $\rightarrow a + 2 = 3 \rightarrow a = 1$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ \frac{x}{e^x - 1} + 2, & x > 0 \end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

Calculamos la derivada de la función cuando $x < 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - b)(x^2 + 3) - 2x(x^2 - bx + 9)}{(x^2 + 3)^2} = \\ &= \frac{\cancel{2x^3} + 6x - bx^2 - 3b - \cancel{2x^3} + 2bx^2 - 18x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

Calculamos la derivada de la función cuando $x > 0$.

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1(e^x - 1) - e^x x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - 1 - e^x x}{(e^x - 1)^2}$$

Calculamos las derivadas laterales en $x = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2} = \frac{b \cdot 0^2 - 0 - 3b}{(0^2 + 3)^2} = \frac{-3b}{9} = \boxed{\frac{-b}{3}}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - e^x x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^0 - 1 - e^0 \cdot 0}{(e^0 - 1)^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^x x - e^x}{2(e^x - 1)e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^x x}{2(e^x - 1)e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2(e^x - 1)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2e^x} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\frac{-b}{3} = \frac{-1}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

Los valores que hacen que la función sea continua y derivable en $x = 0$ son $a = 1$ y $b = \frac{3}{2}$.

b) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ \frac{x}{e^x - 1} + 2, & x > 0 \end{cases}$.

En un entorno de $x = -1$ la función es $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 3}$.

La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$.

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 2(-1) + 9}{(-1)^2 + 3} = \frac{8}{4} = 2$$

$$b = -2 \left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2 - 12x + 6}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{-2(-1)^2 - 12(-1) + 6}{((-1)^2 + 3)^2} = \frac{16}{16} = 1$$

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow y - 2 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x + 1 + 2 \Rightarrow \boxed{y = x + 3}$$

La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = -1$ es $y = x + 3$.

1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x(3-x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €. 2.5 pts

a) Averiguamos donde se cortan las dos gráficas.

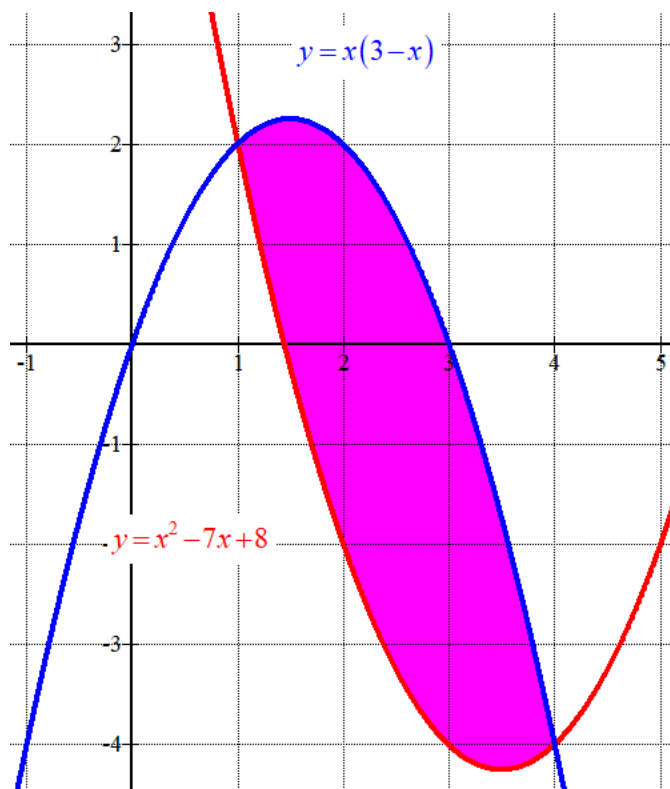
$$x^2 - 7x + 8 = x(3-x) \Rightarrow x^2 - 7x + 8 = 3x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = x \\ \frac{5-3}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores de las dos parábolas y representamos la región encerrada entre ellas.

x	$y = x(3-x)$
1	2
2	2
3	0
4	-4

x	$y = x^2 - 7x + 8$
1	2
2	-2
3	-2
4	-4



Calculamos el área de la base metálica.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^4 3x - x^2 - (x^2 - 7x + 8) dx = \int_1^4 3x - x^2 - x^2 + 7x - 8 dx = \\ &= \int_1^4 10x - 2x^2 - 8 dx = \left[5x^2 - 2\frac{x^3}{3} - 8x \right]_1^4 = \\ &= \left[5 \cdot 4^2 - 2\frac{4^3}{3} - 8 \cdot 4 \right] - \left[5 \cdot 1^2 - 2\frac{1^3}{3} - 8 \cdot 1 \right] = 80 - \frac{128}{3} - 32 - 5 + \frac{2}{3} + 8 = 9 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

El área es de 9 metros cuadrados que al precio de 65 € el metro cuadrado nos supone un coste de $65 \cdot 9 = 585$ €.

2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es $11/5$. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno. 2.5 ptos

Llamamos “x” al dinero de Aythami, “y” al de Besay y “z” al de Chamaida.

“La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y

Besay es $11/5$ ” $\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{11}{5}$.

“La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay” $\Rightarrow x - z = 2y$.

“El doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami” $\Rightarrow 2(y+z) = x+2$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = \frac{11}{5} \\ x-z = 2y \\ 2(y+z) = x+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x+5y = 11x-11y \\ x = 2y+z \\ 2y+2z = x+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16y = 6x \\ x = 2y+z \\ 2y+2z = x+2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16y = 6(2y+z) \\ 2y+2z = 2y+z+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16y = 12y + 6z \rightarrow 4y = 6z \\ z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{12}{4} = 3 \\ x = 6 + 2 = 8 \end{array} \right\}$$

Aythami tiene 8 €, Besay tiene 3 € y Chamaida tiene 2 €.

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

a) Estudiar el rango de la matriz M_k , dependiendo de los valores del parámetro k . 1.25 pts

b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$, y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B$ 1.25 pts

a) La matriz M_k puede tener rango 3, 2 o 1.

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|M_k| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3 + 0 + 0 - k^2(2k-3) - 0 - 0 = k^3 - 2k^3 + 3k^2 = -k^3 + 3k^2$$

$$|M_k| = 0 \Rightarrow -k^3 + 3k^2 = 0 \Rightarrow k^2(-k+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ -k+3=0 \rightarrow k=3 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 3$.

En este caso el determinante de la matriz es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = 0$.

En este caso el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor que 3.

La matriz queda $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Solo existe un término no nulo. El rango de M_0 es 1.

CASO 3. $k = 3$.

En este caso el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor que 3.

La matriz queda $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y

columna tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. El rango de M_3 es 2.

b) La matriz M_1 tiene la expresión $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos las dimensiones de la matriz X .

$$X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B \Rightarrow X \cdot (M_1 + M_1^T) = B$$

$$m \times \boxed{n \cdot 3} \times 3 \longrightarrow m \times 3$$

Para que sea posible el producto debe ser $n = 3$ y para poder obtener la matriz B de dimensiones 2×3 debe ser $m = 2$, es decir, la matriz X es de dimensiones 2×3 .

Si $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ sustituimos en la ecuación matricial.

$$X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B \Rightarrow X (M_1 + M_1^T) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = -4 \rightarrow a = -2 \\ 2b = 2 \rightarrow b = 1 \\ 2c = 0 \rightarrow c = 0 \\ 2d = 0 \rightarrow d = 0 \\ 2e = 0 \rightarrow e = 0 \\ 2f = 4 \rightarrow f = 2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1: \begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases}, \quad r_2: \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores.

1 pto

b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1 .

1.5 ptos

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r_1: \begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y-2z-2 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow 2(3y-2z-2)+y-3z=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y-4z-4+y-3z=3 \Rightarrow 7y-7z=7 \Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=3(1+z)-2z-2=3+3z-2z-2=1+z \Rightarrow r_1: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1=(1,1,1) \\ P_1(1,1,0) \end{cases}$$

$$r_2: \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2} \Rightarrow r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2=(-2,1,-2) \\ Q_2(1,0,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1=(1,1,1) \\ \vec{v}_2=(-2,1,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1=(1,1,1) \\ \vec{v}_2=(-2,1,-2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2}=(1,0,1)-(1,1,0)=(0,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+2-0+2-2=3 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en dos planos paralelos).

b) La recta s perpendicular a ambas rectas tiene como vector director el vector que resulta del producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1=(1,1,1) \\ \vec{v}_2=(-2,1,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2i - 2j + k + 2k + 2j - i = -3i + 3k = (-3, 0, 3)$$

Hallamos la ecuación de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \in s \\ \vec{w}_s = \frac{\vec{u}_1 \times \vec{v}_2}{3} = \frac{(-3, 0, 3)}{3} = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto A de corte de la recta s con la recta r_1 .

$$\begin{array}{l} s: \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \alpha \end{cases} \\ r_1: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = -\alpha \\ 1 + \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha = -\alpha \\ 1 + \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = -1 \rightarrow \alpha = \frac{-1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

El punto A de intersección de la recta s con la recta r_1 tiene coordenadas $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

3B. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que compartan el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ 0.75 pts

b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi: x + 3y + 2z + 3 = 0, \quad r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman. 1.75 pts

a) No es posible pues el producto escalar tiene un valor muy grande.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ |\vec{u}| = 2 \\ |\vec{v}| = 3 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = 2 \cdot 3 \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{8}{6} = 1.333 > 1 \text{ ¡Imposible!!!}$$

b) Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \pi: x + 3y + 2z + 3 = 0 \\ r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ x = -3 - y - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 - y - 2z + 3y + 2z + 3 = 0 \\ 2(-3 - y - 2z) - 3y - z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \\ -6 - 2y - 4z - 3y - z = 4 \Rightarrow -5y - 5z = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow -5z = 10 \Rightarrow \boxed{z = -2} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \boxed{x = -3 - 0 - 2(-2) = 1} \end{aligned}$$

El punto de corte de recta y plano es el punto P(1,0,-2).

Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\pi: x + 3y + 2z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2)$$

$$r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x = -3 - y - 2z \end{cases} \Rightarrow 2(-3 - y - 2z) - 3y - z = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 - 2y - 4z - 3y - z = 4 \Rightarrow -5y - 5z = 10 \Rightarrow y + z = -2 \Rightarrow \boxed{y = -2 - z} \Rightarrow$$

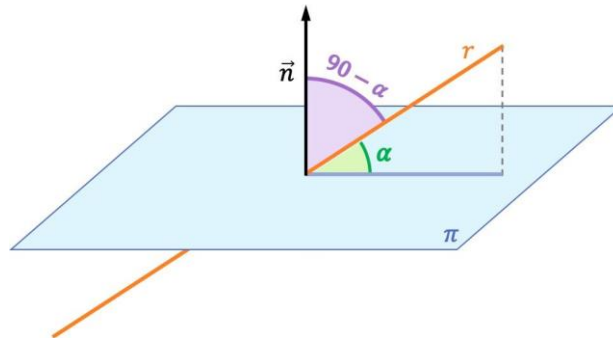
$$\Rightarrow x = -3 + 2 + z - 2z = -1 - z \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, -1, 1) \\ Q_r(-1, -2, 0) \end{cases}$$

Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 3, 2) \\ \vec{v}_r = (-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|} = \frac{|(1, 3, 2) \cdot (-1, -1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{|-1 - 3 + 2|}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{42}} \Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72.02^\circ$$

Si el ángulo entre vector normal del plano y vector director de la recta es 72.02° entonces el ángulo entre recta y plano es $90^\circ - 72.02^\circ = 17.98^\circ$.



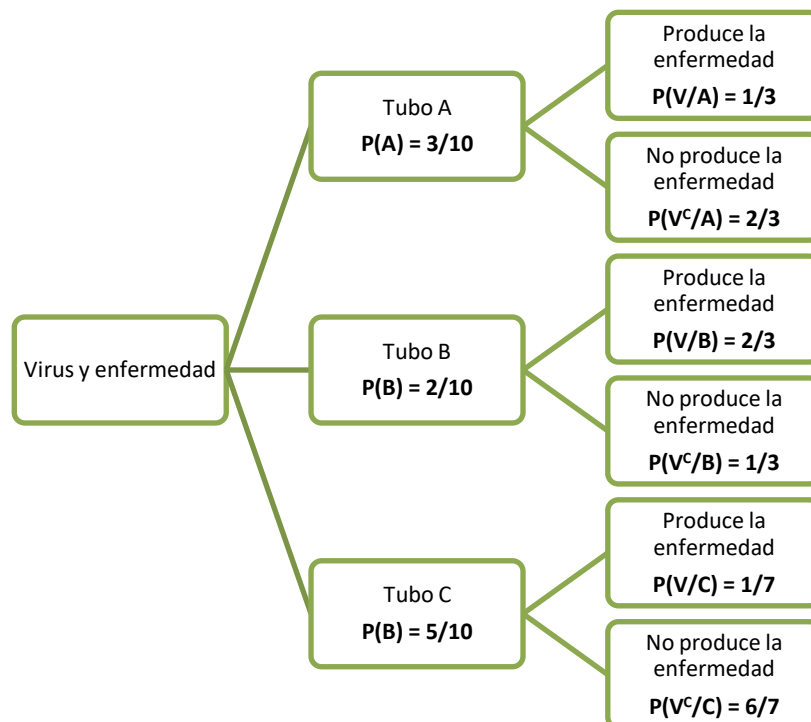
4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $1/3$, que la produzca B es $2/3$ y que la produzca C es $1/7$.

a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocula el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad? 1.5 pto

b) Si se inocula un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C? 1 pto

Llamamos A, B y C a los sucesos “se elige un tubo A, B o C”, respectivamente. Llamamos V al suceso “El virus produce la enfermedad”

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C) =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{7} = \frac{32}{105} \approx 0.3048$$

La probabilidad de que el virus produzca la enfermedad es de $\frac{32}{105} \approx 0.3048$.

b) Nos piden $P(C/V^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/V^c) = \frac{P(C \cap V^c)}{P(V^c)} = \frac{P(C)P(V^c/C)}{1 - P(V)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{6}{7}}{1 - \frac{32}{105}} = \frac{45}{73} \approx 0.616$$

La probabilidad de que se haya inyectado el virus C, sabiendo que no ha producido la enfermedad es de $\frac{45}{73} \approx 0.616$.

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento. 1.25 pts
 b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta. 0.75 pts

c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada. 0.5 pts

a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de goles marcados de 70 lanzamientos. Esta variable es dicotómica (gol o no gol) y cada repetición es independiente de la anterior.

La probabilidad de meter gol en un lanzamiento es $p = \frac{3}{5} = 0.6$.

La variable es una variable binomial. $X = B(70, 0.6)$.

Nos piden calcular $P(40 \leq X \leq 45)$.

Como el número de lanzamientos es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 70 \cdot 0.6 = 42$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{70 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \frac{2\sqrt{105}}{5} \approx 4.0988.$$

$Y = N(42, 4.0988)$

Esta aproximación es buena pues $np = 42 > 5$ y $nq = 28 > 5$

Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso de la aproximación a la normal.

$$P(40 \leq X \leq 45) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(39.5 \leq Y \leq 45.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{39.5 - 42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}} \leq Z \leq \frac{45.5 - 42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}}\right) = P(-0.61 \leq Z \leq 0.85) = P(Z \leq 0.85) - P(Z \leq -0.61) =$$

$$= P(Z \leq 0.85) - P(Z \geq 0.61) = P(Z \leq 0.85) - [1 - P(Z \leq 0.61)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8023 - 1 + 0.7291 = \boxed{0.5314}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.6
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.7
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.8
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.9
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	1
0.6	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	
0.8	0.7894	0.7924	0.7954	0.7983	0.8013	0.8042	
0.9	0.8159	0.8188	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	

La probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento es de 0.5314.

b) Calculamos la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis (35).

$$P(X > 35) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 35.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{35.5 - 42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}}\right) = P(Z \geq -1.59) = P(Z \leq 1.59) = \left\{\begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array}\right\} = \boxed{0.9441}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5949	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

La probabilidad de que marque más de la mitad de los lanzamientos es de 0.9441, es decir, un 94.41 %. Al ser mayor del 90% este jugador será seleccionado.

- c) Llamamos X a la variable que cuenta el número de goles marcados en 450 penaltis. Esta variable es dicotómica (gol o no gol) y cada repetición es independiente de la anterior. La probabilidad de marcar es $p = 0.6$. Esta variable es binomial.
 $X = B(450, 0.6)$.
 Los goles que se espera marcar es la media de la distribución $\rightarrow \mu = np = 450 \cdot 0.6 = 270$.
 Se espera marcar 270 goles en los 450 penaltis.