

## MATEMÁTICAS II

### CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

**Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.**

---

#### A.1.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución correcta del sistema planteado: 1 punto. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

#### A.2.

- a) Planteamiento: 0.25 puntos. Obtención de la ecuación de la recta: 0.25 puntos.
- b) Planteamiento: 0.5 puntos (0.25 puntos por la versión que usa cada teorema). Resolución: 0.5 puntos (0.25 puntos por la versión que usa cada teorema).
- c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de primitivas: 0.25 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

#### A.3.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

#### A.4.

- a) Por cada probabilidad, 0.75 puntos (planteamiento: 0.5 puntos, resolución: 0.25 puntos).
- b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

#### B.1.

- a) Justificación de la existencia de  $B^{-1}$ : 0.5 puntos. Cálculo de  $b$ : 0.75 puntos (0.5 puntos por el planteamiento y 0.25 puntos por la solución correcta).
- b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos

#### B.2.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.75 puntos.
- b) Planteamiento: 1 punto. Solución del límite: 0.25 puntos.

#### B.3.

- a) Planteamiento 0.5 puntos. Obtención de los dos valores de  $a$ : 0.5 puntos. Eliminación de  $a = 15$  y comprobación de que  $a = 3$  es válida: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

#### B.4.

- a) Para cada una de las dos probabilidades: planteamiento, 0.25 puntos; resolución, 0.25 puntos.
- b) Para cada una de las dos probabilidades: planteamiento, 0.5 puntos; resolución, 0.25 puntos.

**MATEMÁTICAS II – SOLUCIONES**  
**(Documento de trabajo orientativo)**

**A.1.**

Si  $x$  es la longitud (en centímetros) de cada listón largo,  $y$  la de los intermedios, y  $z$  la de los cortos, las ecuaciones que se plantean son  $2x + 4y = 3y + 15z$ ,  $x = y + z + 17$  y  $9z + 7 = x + y$ , de manera que  $x, y, z$  son las soluciones al sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 15z &= 0 \\ x - y - z &= 17 \\ x + y - 9z &= 7 \end{cases}.$$

Al resolver el sistema se obtiene que los listones largos miden 107 cm, 71 cm los intermedios, y 19 cm los cortos.

---

**A.2.**

a) Tenemos que  $f(\pi) = 5\pi^4$ . Por otra parte  $f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$ , con lo que  $f'(\pi) = 10\pi^3$ . Así pues, la ecuación de la recta es :  $y = 10\pi^3(x - \pi) + 5\pi^4$ .

b) Se trata de un polinomio, por lo que  $f(x)$  es continua y derivable en  $\mathbb{R}$ . Así, dado que  $f(-\pi) = f(0) = \pi^4$ , el teorema de Rolle asegura que existe algún punto  $c \in (-\pi, 0)$ , tal que  $f'(c) = 0$ . Por otra parte, dado que  $f'(x)$  es continua y derivable en  $\mathbb{R}$  y que  $f'(-\pi) = -2\pi^3$  y  $f'(0) = \pi^3$ , aplicando el teorema de Bolzano a  $f'(x)$  se prueba que existe algún punto  $c \in (-\pi, 0)$ , tal que  $f'(c) = 0$ .

c)  $g(x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$ . Dado que en el intervalo  $[0, \pi]$  se tiene que  $x \geq 0$  y por tanto  $g(x) \leq f(x)$ , el área pedida es  $A = \int_0^\pi (f(x) - g(x)) dx = \int_0^\pi (2\pi x^3 + 2\pi^3 x) dx = \frac{3}{2}\pi^5$ .

---

**A.3.**

a) Sea  $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ . El plano buscado es  $x - y = 0$ , que tiene vector normal  $\overrightarrow{AB} \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0)$  y pasa por  $(0, 0, 1)$ .

b) Los vectores del plano  $x + z = 1$  son de la forma  $(a, b, -a)$ . Sea  $(a, b, -a)$  vector director de  $r_1$ , con  $a$  y  $b$  no ambos nulos. La distancia entre  $r_1$  y  $r_2$  es la distancia entre el punto  $B$  y la recta  $r_1$ :  $d(B, r_1) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times (a, b, -a)\|}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = \frac{|b - a|\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = 1 \Rightarrow b^2 - 2ab = 0 \Rightarrow b = 0$  o bien  $b = 2a$  (en ambos casos  $a \neq 0$ ). Por tanto,  $r_1 : (x, y, z) = (\lambda, 0, 1 - \lambda)$  y  $r_2 = (1 + \lambda, 1, -\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (o bien  $r_1 : (x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, 1 - \lambda)$  y  $r_2 = (1 + \lambda, 1 + 2\lambda, -\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

---

**A.4.**

a)  $P(A) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$ . Además  $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{9}{20} - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{20}$ .

Por otro lado,  $P(A|B) - P(B|A) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}} - \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{24}} = \frac{1}{24} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$ .

b)  $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{14}{25} \Rightarrow \frac{9}{20} + P(C) - \frac{9}{20}P(C) = \frac{14}{25} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{5}$ .

**B.1.**

- a) La matriz  $B$  es igual a  $b \cdot D$  donde  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . La matriz  $D$  es invertible puesto que su determinante es no nulo. Por tanto,  $B$  también es invertible cuando  $b \neq 0$  (y se tiene que  $B^{-1} = b^{-1} \cdot D^{-1}$ ). De este modo,  $BCB^{-1} = DCD^{-1}$ . Dado que  $DC = AD$ , concluimos que para todo  $b \neq 0$  se verifica  $BCB^{-1} = DCD^{-1} = A$ .
- b) El determinante de  $A$  es el mismo que el de  $C$ , que es igual a 12. Así pues, el determinante de  $AA^t$  es 144.
- c) Para  $b = 1 \neq 0$ , el sistema es compatible determinado (y  $B = D$ ). La solución es  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , es decir,  $x = -6$ ,  $y = 2$  y  $z = 5$ .

**B.2.**

- a) Resolvemos por integración por partes:

$$u = \ln x, \quad dv = (x+2)dx, \quad du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \frac{x^2}{2} + 2x.$$

La integral definida será

$$\int_1^e (x+2) \ln x dx = \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) dx = \left[ \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \left( \frac{x^3}{6} + x^2 \right) \right]_1^e = \frac{e^2 + 9}{4}.$$

- b) Dado que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left( \frac{1}{\cos x} \right)} = 1^\infty$  (indeterminación), usamos que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left( \frac{1}{\cos x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)}{\cos x}}$  (si el límite del exponente existe). Ahora bien,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)}{\cos x} = \frac{0}{0} (\text{indet.}) \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})}{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = -1.$$

Por tanto, el límite buscado es  $e^{-1}$ .

**B.3.**

- a) El volumen del tetraedro es  $\frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}) \right|$ .

Como  $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, -1)$ ,  $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 1)$  y  $\overrightarrow{P_1P_4} = (2, a-1, 2)$ , el valor del determinante es  $9 - a$ . Así, hay que resolver  $9 - a = \pm 6$ , que tiene por soluciones  $a = 15$  y  $a = 3$ . Pero el valor  $a = 15$  hace que la arista  $P_1P_4$  mida más de 10. Así  $a = 3$ , valor con el que todas las aristas miden menos de 10.

- b) Los vértices del paralelepípedo pedido son  $P_1, P_2 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2}, P_3 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_3}, P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3}, Q, Q + \overrightarrow{P_1P_2}, Q + \overrightarrow{P_1P_3}, Q + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3}$ . Estos puntos son  $(1, 1, 1), (2, 1, 0), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 3, 3), (4, 3, 2), (3, 5, 4)$  y  $(4, 5, 3)$ .

**B.4.**

- a) Puesto que el resultado de ambos dados es independiente, si escribimos cada posible lanzamiento como  $(a, r)$ , siendo  $a$  el resultado del dado azul y  $r$  el resultado del dado rojo, hay 36 casos posibles, todos equiprobables. Los casos favorables para obtener una puntuación  $p = 10$  son  $\{(2, 4), (4, 3), (5, 5), (6, 2)\}$ , por lo que la probabilidad de ese suceso es  $P(p = 10) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ . Por otra parte,  $P(p \text{ impar}) = P(a \text{ impar} \cap r \text{ par}) = P(a \text{ impar})P(r \text{ par}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

- b) Para calcular la probabilidad de que el dado azul sea par sabiendo que la puntuación final es  $p = 8$ , los casos posibles son  $\{(2, 3), (3, 5), (4, 2), (5, 3), (6, 1)\}$ , y de ellos los casos favorables son  $\{(2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$ . La probabilidad buscada es  $\frac{3}{5}$ .

La otra probabilidad es

$$P(r \text{ impar} | p \text{ par}) = \frac{P(r \text{ impar} \cap p \text{ par})}{P(p \text{ par})}.$$

Notemos ahora que siempre que se da el suceso "dado rojo impar", la puntuación final debe ser par, ya haya sido el dado azul impar o par. Por tanto,  $P(r \text{ impar} \cap p \text{ par}) = P(r \text{ impar})$ . La probabilidad buscada sería entonces

$$\frac{P(r \text{ impar})}{P(a \text{ impar})P(r \text{ impar}) + P(a \text{ par})} = \frac{(1/2)}{(1/2)(1/2) + (1/2)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$