

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

O exame consta de 6 exercicios, **todos coa mesma valoración máxima (3,33 puntos)**, dos que pode realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como queira. Se realiza máis exercicios dos permitidos, **só se corruxirán os tres primeiros realizados**.

EXERCICIO 1. Álgebra. Dadas as matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Determine para que valores de m existe a matriz inversa de A .
b) Despexe a matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ e calcúlea para $m=1$.

EXERCICIO 2. Álgebra. Consideramos o seguinte sistema de inecuacións:

$$y \leq x + 2 \quad x + y \leq 6 \quad x \leq 5 \quad y \geq 0$$

- a) Represente graficamente a rexión factible e calcule os seus vértices.
b) Determine o punto ou puntos desa rexión onde a función $f(x, y) = x - y$ alcanza os seus valores máximo e mínimo. c) Determine eses valores máximo e mínimo.

EXERCICIO 3. Análise. A cantidade de CO_2 (en millóns de toneladas) emitida á atmosfera por unha determinada rexión ó longo do ano 2020, vén dada pola función

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \quad \text{sendo } t \text{ é o tempo transcorrido en meses desde comezo do ano.}$$

- a) Estudie en que períodos se produciu un aumento/diminución da cantidade de CO_2 emitida á atmosfera.
b) Cales son as cantidades máxima e mínima de CO_2 emitidas á atmosfera ó longo do ano 2020? En que momentos se produciron?
c) Represente a gráfica da función $C(t)$ tendo en conta o estudo realizado nos apartados anteriores.

EXERCICIO 4. Análise. Un fabricante de automóbiles fai un estudo sobre os beneficios, en miles de euros, ao longo dos dez últimos anos, e comproba que estes se axustan á función $B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ se $0 \leq t \leq 10$, (t en anos)

- a) Que beneficios obtivo a empresa o último ano do estudo?
b) Determine os períodos de crecemento e decrecemento dos beneficios.
c) En que anos se producen os beneficios máximos e mínimos e a canto ascenden? d) Calcule $\int_1^2 B(t) dt$.

EXERCICIO 5. Estatística e Probabilidade. Nunha poboación o 45 % son homes. O 27% desa poboación resulta ser home e lector de prensa deportiva, mentres que un 38.5% é muller e non lectora desa prensa.

- a) Das mulleres, que porcentaxe le prensa deportiva? b) Que porcentaxe é muller ou le prensa deportiva? c) Dos lectores de prensa deportiva, que porcentaxe son homes? d) Son incompatibles os sucesos ser home e non ler prensa deportiva? Xustifique a resposta.

EXERCICIO 6. Estatística e Probabilidade. Unha compañía de seguros quere determinar que proporción dos seus clientes estaría disposta a aceptar unha subida de tarifas a cambio dun incremento nas súas prestacións. Unha enquisa previa indica que esta proporción está en torno ao 15%.

- a) De que tamaño mínimo debería ser a mostra se se quere estimar dita proporción cun erro inferior a 0,08 e un nivel de confianza do 95%?

Finalmente, realízase o estudo cunha mostra de 196 clientes, dos que 37 manifestaron a súa conformidade coa proposta. b) Calcule un intervalo de confianza, ao 92%, para a proporción de clientes da compañía que aceptaría dita proposta. Cal é o erro máximo cometido?

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A .
- Despeje la matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ y calcúlela para $m=1$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \leq x + 2 \qquad x + y \leq 6 \qquad x \leq 5 \qquad y \geq 0$$

- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x,y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. **c)** Determine esos valores máximo y mínimo.

EJERCICIO 3. Análisis. La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitida a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.}$$

- Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.
- ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?
- Represente la gráfica de la función $C(t)$ teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

EJERCICIO 4. Análisis. Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{si } 0 \leq t \leq 10, \quad (t \text{ en años})$$

- ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?
- Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios
- ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
- Calcule $\int_1^2 B(t) dt$.

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. **a)** De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? **b)** ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? **c)** De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? **d)** ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.

- ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95%?

Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

ABAU 2021 CONVOCATORIA ORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS APLICADAS AS CC SOCIAIS II
(Cód. 40)

1. Álgebra.

- a) 1 punto
- b) 2,33 puntos

2. Álgebra.

- a) 1,5 puntos
- b) 1,5 puntos
- c) 0,33 puntos

3. Análise.

- a) 1,2 5 puntos
- b) 1,25 puntos
- c) 0,83 puntos

4. Análise.

- a) 0,5 puntos
- b) 0,75 puntos
- c) 1,25 puntos
- d) 0,83 puntos

5. Estatística e Probabilidade.

- a) 0, 75 puntos
- b) 1 punto
- c) 0,75 puntos
- d) 0,83 puntos

6. Estatística e Probabilidade.

- a) 1, 5 puntos
- b) 1, 83 puntos

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 1. Álgebra.

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determine para que valores de m existe a matriz inversa de A.

A matriz A ten inversa se determinante de A distinto de cero

$$\det(A) = 2m \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$$

Existe inversa da matriz A para todo $m \neq 0$

b) Despexa a matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ e calcúlea para $m=1$.

$$X \cdot A + B = C \Rightarrow X \cdot A = C - B \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - B) \cdot A^{-1}$$

$$X = (C - B) \cdot A^{-1}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^*)^t; \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(Podese calcular a matriz inversa de A utilizando Gauss)

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 2. Álgebra.

Consideramos o seguinte sistema de inecuacións:

$$y \leq x + 2$$

$$x + y \leq 6$$

$$x \leq 5$$

$$y \geq 0$$

a) Represente graficamente a rexión factible e calcule os seus vértices.

b) Determine o punto ou puntos desa rexión onde a función $f(x, y) = x - y$ alcanza os seus valores máximo e mínimo. **c)** Determine eses valores máximo e mínimo.

a) Inecuacións:

$$y \leq x + 2$$

$$x + y \leq 6$$

$$x \leq 5$$

$$y \geq 0$$

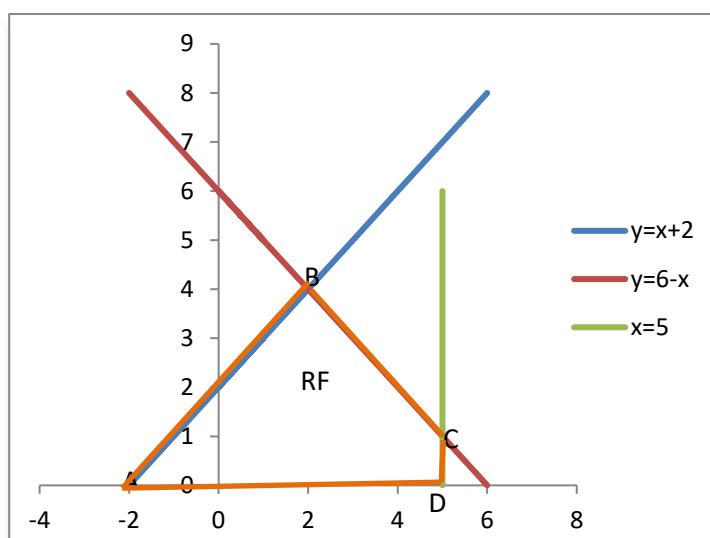
Vértices

$$A: \begin{cases} y = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \left\{ A(-2, 0) \right.$$

$$B: \begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \left\{ B(2, 4) \right.$$

$$C: \begin{cases} x = 5 \\ x + y = 6 \end{cases} \left\{ C(5, 1) \right.$$

$$D: \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \left\{ D(5, 0) \right.$$



b) $f(x, y) = x - y$

Avaliamos a función $f(x, y)$ nos vértices

$$f(A) = f(-2, 0) = -2$$

$$f(B) = f(2, 4) = -2$$

$$f(C) = f(5, 1) = 4$$

$$f(D) = f(5, 0) = 5$$

A función $f(x, y)$ alcanza un **mínimo** en tódolos puntos do **segmento que une os vértices A(-2,0) e B(2,4)** e alcanza un **máximo** no **vértice D(5,0)**.

c) Min $f(x, y) = f(-2, 0) = -2$

$$\text{Máx } f(x, y) = f(5, 0) = 5$$

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 3. Análise.

A cantidade de CO₂ (en millóns de toneladas) emitida á atmosfera por unha determinada rexión ó longo do ano 2020, vén dada pola función

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \quad \text{sendo } t \text{ é o tempo transcorrido en meses desde comezo do}$$

ano.

a) Estudie en que períodos se produciu un aumento/diminución da cantidade de CO₂ emitida á atmosfera.

Estudiamos a monotonía da función $C(t)$

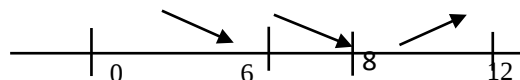
➤ En $(0,6)$: $C(t) = 5 - \frac{t}{3}$

$$C'(t) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \text{C decrecente no intervalo } (0,6)$$

➤ En $(6,12)$: $C(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18$

$$C'(t) = \frac{1}{2}t - 4; C'(t) = 0 \Rightarrow t = 8 (\text{punto crítico})$$

En $(6,8)$ $C'(t) < 0 \Rightarrow \text{C decrecente no intervalo } (6,8)$



En $(8,12)$ $C'(t) > 0 \Rightarrow \text{C crecente no intervalo } (8,12)$

$t=8$ mínimo relativo, $C(8)=2 \Rightarrow \text{Min}(8,2)$

$C(0)=5$; $C(6^-)=3$; $C(6)=3$; $C(12)=6$ máximo valor de $C(t)$ en $[0, 12]$

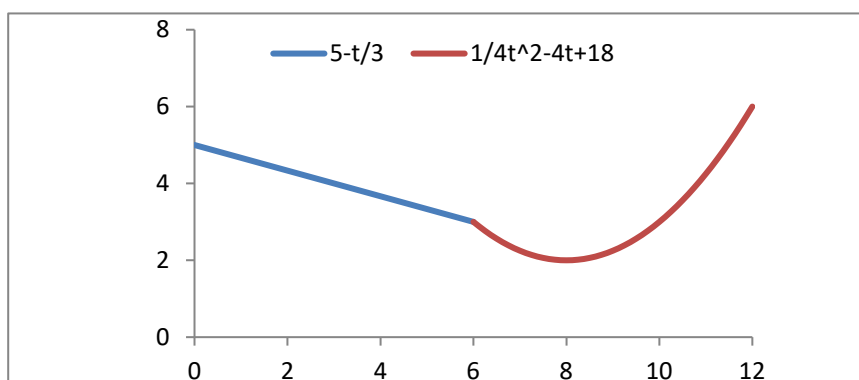
A cantidade de CO₂ emitida a atmosfera diminúe desde o momento inicial ata transcorridos 8 meses e diminúe desde ese instante ata finalizar o ano(mes 12)

b) Cales son as cantidades máxima e mínima de CO₂ emitidas á atmosfera ó longo do ano 2020? En que momentos se produciron?

A cantidade máxima de CO₂ emitida e de **6 millóns de toneladas** que se producen **o finalizar o ano (mes 12)**

A cantidade mínima de CO₂ emitida e de **2 millóns de toneladas** que se producen **transcorridos 8 meses.**

c) Represente a gráfica da función $C(t)$ tendo en conta o estudo realizado nos apartados anteriores.



MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 4. Análise. Un fabricante de automóbiles fai un estudo sobre os beneficios, en miles de euros, ao longo dos dez últimos anos, e comproba que estes se axustan á función

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \text{ se } 0 \leq t \leq 10, (t \text{ en anos})$$

a) Que beneficios obtivo a empresa o último ano do estudo?

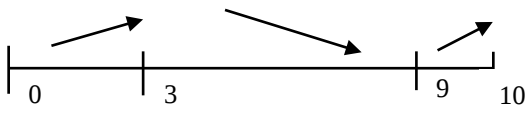
$$B(10) = 10^3 - 18 \times 10^2 + 81 \times 10 - 3 = 7$$

O último ano (t=10) obtivo 7000€ de beneficios.

b) Determine os períodos de crecemento e decrecemento dos beneficios.

$$B'(t) = 3t^2 - 36t + 81; B'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} \Rightarrow t = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{matrix} 9 \\ 3 \end{matrix} \quad (9 \text{ e } 3 \text{ puntos críticos})$$



Signo $B'(t)$

Os beneficios **aumentan** entre o inicio e o terceiro ano
(0,3) e entre os anos 9 e 10 (9,10), **diminúen** entre o
terceiro e noveno ano (3,9).

c) En que anos se producen os beneficios máximos e mínimos e a canto ascenden?

$$B(t) \text{ ten un máximo en } t=3; B(3)=105$$

Os **beneficios máximos** ascenden a **105.000€** no **terceiro ano** ($t=3$)

$$B(t) \text{ ten un mínimo en } t=9; B(9)=-3; B(0)=-3$$

Os **beneficios mínimos** (perdas neste caso) son de **-3000€** o **inicio** ($t=0$) e no **noveno ano** ($t=9$)

d) Calcule $\int_1^2 B(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_1^2 B(t) dt &= \int_1^2 (t^3 - 18t^2 + 81t - 3) dt = \left[\frac{t^4}{4} - 6t^3 + \frac{81}{2}t^2 - 3t \right]_1^2 \\ &= (4 - 48 + 162 - 6) - \left(\frac{1}{4} - 6 + \frac{81}{2} - 3 \right) = 121 - \frac{163}{4} = \frac{321}{4} = \mathbf{80,25} \end{aligned}$$

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 5. Estatística e Probabilidade. Nunha poboación o 45 % son homes. O 27% desa poboación resulta ser home e lector de prensa deportiva, mentres que un 38.5% é muller e non lectora desa prensa.

a) Das mulleres, que porcentaxe le prensa deportiva?

Sexan os sucesos

H ="home"; M ="muller"; D ="lector prensa deportiva" ; $\bar{D}$ ="non lector prensa deportiva"

Datos: $P(H)=0,45$; $P(H \cap D)=0,27$; $P(M \cap \bar{D})=0,385$

Entón tamén podemos calcular $P(M)=1-P(H)=0,55$; $P(D \cap M)=P(M)-P(M \cap \bar{D})=0,55-0,385=0,165$; $P(D)=P(D \cap H)+P(D \cap M)=0,27+0,165=0,435$

Para responder o apartado a) debemos calcular $P(D|M)=\frac{P(D \cap M)}{P(M)}=\frac{0,165}{0,55}=0,3$

Polo tanto o **30% das mulleres le prensa deportiva**

b) Que porcentaxe é muller ou le prensa deportiva?

Calculamos $P(M \cup D)=P(M)+P(D)-P(M \cap D)=0,55+0,435-0,165=0,82$

O **82% é muller ou le prensa deportiva**

c) Dos lectores de prensa deportiva, que porcentaxe son homes?

$P(H|D)=\frac{P(H \cap D)}{P(D)}=\frac{0,27}{0,435}=0,6206$

Dos lectores de prensa deportiva o 62,06% son homes

d) Son incompatibles os sucesos ser home e non ler prensa deportiva? Xustifique a resposta.

Os sucesos ser home e non ler prensa deportiva son incompatibles se $H \cap \bar{D}=\emptyset$, entón $P(H \cap \bar{D})=0$

Calculamos $P(H \cap \bar{D})=P(H)-P(H \cap D)=0,45-0,27=0,18 \neq 0$

Entón os sucesos ser home e non ler prensa deportiva **NON son incompatibles**

Tamén podemos resolver o exercicio a través de unha táboa:

	D	$\bar{D}$	
H	0,27	0,18	0,45
M	0,165	0,385	0,55
	0,435	0,565	1

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 6. Estatística e Probabilidade. Unha compañía de seguros quere determinar que proporción dos seus clientes estaría disposta a aceptar unha subida de tarifas a cambio dun incremento nas súas prestacións. Unha enquisa previa indica que esta proporción está en torno ao 15%.

- a) De que tamaño mínimo debería ser a mostra se se quere estimar dita proporción cun erro inferior a 0,08 e un nivel de confianza do 95%?

p = proporción de clientes disposta a aceptar unha subida

$$e = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < 0,08$$

$$\hat{p} = 0,15$$

Nivel de confianza : 95% $\rightarrow 1-\alpha = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$1,96 \sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{n}} < 0,08 \Rightarrow \frac{1,96 \times 0,36}{0,08} < \sqrt{n} \Rightarrow n > 76,53$$

O **tamaño mínimo** da mostra para estimar dita proporción cun erro inferior a 0,08 e un nivel de confianza do 95% debe ser de **77 clientes**.

Finalmente, realízase o estudo cunha mostra de 196 clientes, dos que 37 manifestaron a súa conformidade coa proposta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, ao 92%, para a proporción de clientes da compañía que aceptaría dita proposta. Cal é o erro máximo cometido?

O intervalo de confianza para p é da forma $(\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})_{1-\alpha}$

$$\hat{p} = \frac{37}{196} = 0,1887 \approx 0,19$$

Nivel de confianza : 92% $\rightarrow 1-\alpha = 0,92 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$

Calculamos o intervalo

$$(0,19 - 1,75 \sqrt{\frac{0,19 \times 0,81}{196}}; 0,19 + 1,75 \sqrt{\frac{0,19 \times 0,81}{196}}) = (0,19 - 0,049; 0,19 + 0,049) = (0,141; 0,239)$$

o I.C ao 92%, para a proporción de clientes que aceptaría a proposta **(0,141; 0,239)** $\Leftrightarrow$

(14,1%; 23,9%) $_{92\%}$

$$\text{O erro máximo cometido } e = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,049 \approx 5\%$$