

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

O exame consta de 6 exercicios, **todos coa mesma valoración máxima (3,33 puntos)**, dos que pode realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como queira. Se realiza máis exercicios dos permitidos, **só se corríxirán os tres primeiros realizados**.

EXERCICIO 1. Álgebra. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule os valores de a para os cales a matriz A ten inversa

b) Para $a=1$, calcule, se é posible, a inversa da matriz A .

c) Exprese en forma matricial o sistema de ecuacións seguinte e resólvao:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

EXERCICIO 2. Álgebra. Un barco pesqueiro dedícase a captura de xurelo e xarda. As normas sobre cotas son: As capturas totais non poden exceder de 30 toneladas(Tm);a cantidade de xurelo como máximo pode triplicar a de xarda e a cantidade de xarda non pode superar as 18 Tm.

Se o prezo o que vende o xurelo é de 5 €/kg e o da xarda é de 6€/kg

a) Formule e resolva o problema que determina as cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar os ingresos, cumprindo as normas.

b) Represente graficamente a rexión factible e indique os seus vértices. A canto ascenden os ingresos máximos?

c) Cumpriría as normas sobre cotas pesqueiras se captura 20 Tm de xurelo e 6 Tm de xarda? Explique a súa resposta.

EXERCICIO 3. Análise. O número de exemplares vendidos dunha revista (en miles de unidades) nos primeiros cinco meses del ano ven dado pola función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & \text{se } 3 < t \leq 5 \end{cases} \quad \text{onde } t \text{ é o tempo transcorrido en meses}$$

a) Estude o crecemento e decrecemento do número de exemplares vendidos. Calcule en que momentos se produciron o máximo e o mínimo número de vendas e a canto ascenderon.

b) Represente graficamente a función $N(t)$. Calcule a area da rexión delimitada pola gráfica da función $N(t)$,o eixe de abscisas e as rectas $t=0$ e $t=5$.

EXERCICIO 4. Análise. Dada a función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$

a) Calcule os valores do parámetro " a " para que $f(x)$ teña un punto crítico en $x_0=3$.

b) Para $a=3$, estude o crecemento e decrecemento da función e os seus máximos e mínimos, se existen. Estude tamén os seus intervalos de concavidade e convexidade e os seus puntos de inflexión, se existen.

EXERCICIO 5. Estatística e Probabilidade. Nunha furna A hai 8 bolas verdes e 6 vermellas e noutra furna B hai 4 verdes e 5 vermellas. Lánzase un dado e se sae un número menor que 3 sácase unha bola da furna A e se sae un número maior ou igual a 3 sácase a bola da furna B. Extraese unha bola o chou,

a) Calcule a probabilidade de que a bola extraída sexa vermella. b) Sabendo que se extraeu unha bola verde, cal é a probabilidade de que saíra da furna A? c) Son independentes os sucesos "extraer bola vermella" e "a bola procede da furna A"?

EXERCICIO 6. Estatística e Probabilidade. O salario(en €) dos traballadores dunha empresa distribúese normalmente con desviación típica $\sigma=300€$. Preguntouse a 36 traballadores elixidos ó chou, e estableceuse que o salario medio dos traballadores da empresa oscila entre 1552€ e 1748€.

a) Cal foi o salario medio dos traballadores da mostra? Con que nivel de confianza se estableceu o intervalo anterior? b) Se o salario medio dos traballadores da empresa é $\mu=1650€$, cal é a probabilidade de que o salario medio de mostras de 36 traballadores sexa superior a 1590€?

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EXERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a=1$, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A .

c) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

EXERCICIO 2. Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: Las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm.

Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6€/kg

a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas.

b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?

c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

EXERCICIO 3. Análisis. El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t - 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & \text{se } 3 < t \leq 5 \end{cases} \quad \text{donde } t \text{ es el tiempo transcurrido en meses}$$

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en que momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden.

b) Represente gráficamente la función $N(t)$. Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $N(t)$, el eje de abscisas y las rectas $t=0$ y $t=5$.

EXERCICIO 4. Análisis. Dada la función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$

a) Calcule los valores del parámetro " a " para que $f(x)$ tenga un punto crítico en $x_0=3$.

b) Para $a=3$, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

EXERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna B hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna B. Se extrae una bola al azar,

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja. b) Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna A? c) ¿Son independientes los sucesos "extraer bola roja" y "la bola procede de la urna A"?

EXERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica $\sigma=300€$. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552€ e 1748€

a) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior? b) Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es $\mu=1650€$, ¿Cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590€?

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

Criterios de Avaliación

Só puntúan as tres primeiras preguntas respondidas

1. Álgebra.

- a) 1 punto
- b) 1 punto
- c) 1,33 puntos

2. Álgebra.

- a) 1,5 puntos
- b) 1,5 puntos
- c) 0,33 puntos

3. Análise.

- a) 1,83 puntos
- b) 1,5 puntos

4. Análise.

- a) 1 punto
- b) 2,33 puntos

5. Estatística e Probabilidade.

- a) 1 punto
- b) 1 punto
- c) 1,33 puntos

6. Estatística e Probabilidade.

- a) 1,83 puntos
- b) 1,5 puntos

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 1. Álgebra. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule os valores de a para os cales a matriz A ten inversa

A matriz A ten inversa $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det(A) = 2 - 3a$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 2/3$$

Polo tanto, a matriz A ten inversa para tódolos valores de a distintos de $2/3$

b) Para $a=1$, calcule, se é posible, a inversa da matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 2 - 3 = -1 \rightarrow \text{Adj}(A) = A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (1/\det(A)) \cdot (A^*)^t \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

c) Exprese en forma matricial o sistema de ecuacións seguinte e resólvao

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (A \cdot X = B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $x=2$, $y=-1$, $z=-1$

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 2. Álgebra. Un barco pesqueiro dedícase a captura de xurelo e xarda. As normas sobre cotas son: As capturas totais non poden exceder de 30 toneladas(Tm); a cantidade de xurelo como máximo pode triplicar a de xarda e a cantidade de xarda non pode superar as 18 Tm.

Se o prezo o que vende o xurelo é de 5 €/kg e o da xarda é de 6€/kg

a) Formule e resolva o problema que determina as cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar os ingresos, cumprindo as normas.

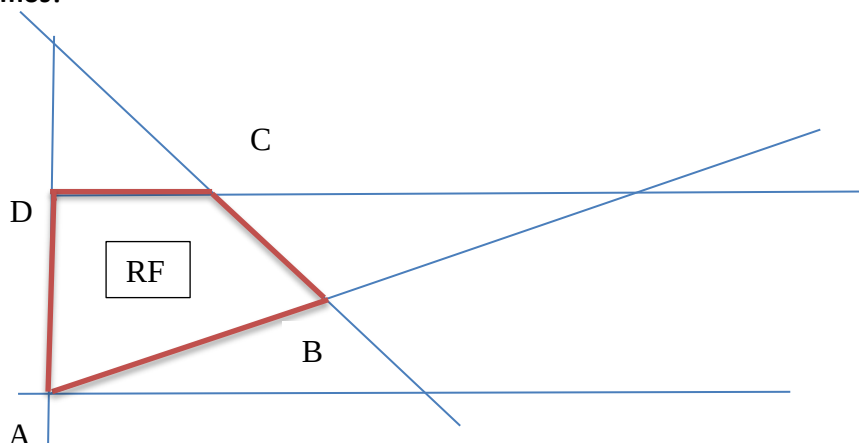
x: nº de Kg de xurelo capturados ; y: nº de Kg de xarda capturados

Restricións:

$$\left. \begin{array}{l} x+y \leq 30000 \\ y \leq 18000 \\ x \leq 3y \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

Función a optimizar, $\max f(x, y) = 5x + 6y$

b) Represente graficamente a rexión factible e indique os seus vértices. A canto ascenden os ingresos máximos?



Vértices:

A: $x=0$ **A (0,0)** B: $x=3y$ **B (22500, 7500)** C: $y=18000$ **C (12000, 18000)**
 $y=0$ $x+y=30000$ $x+y=30000$
D: $x=0$ **D (0, 18000)**
 $y=18000$

$f(A)=0$; $f(B)= 157500$; **$f(C)=168000$ (Máximo)**; $f(D)=420000$

f alcanza o seu máximo no vértice C (12000, 18000)

Os máximos ingresos ascenden a 168000 euros e para elo deben capturar 12000Kg de xurelo e 18000 de xarda.

c) Cumpriría as normas sobre cotas pesqueiras se captura 20 Tm de xurelo e 6 Tm de xarda? Explique a súa resposta.

$x=20000$

$y=6000$ verifican as dúas primeiras restricións pero non verifican a terceira ($x \leq 3y$)

Non cumpriría as normas sobre cotas pesqueiras se captura 20 Tm de xurelo e 6 Tm de xarda

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 3. Análise. O número de exemplares vendidos dunha revista (en miles de unidades) nos primeiros cinco meses del ano ven dado pola función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t - 2) & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & \text{se } 3 < t \leq 5 \end{cases} \quad \text{onde } t \text{ é o tempo transcorrido en meses}$$

a) Estude o crecemento e decrecemento do número de exemplares vendidos. Calcule en que momentos se produciron o máximo e o mínimo número de ventas e a canto ascenderon.

En (0, 3) $N(t) = -t^2 + 2t + 8 \rightarrow N'(t) = -2t + 2 \rightarrow N'(t) = 0 \rightarrow t = 1$ (punto crítico)

En (0, 1), $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ crecente

En (1, 3), $N'(t) < 0 \rightarrow N$ decrecente

En $t_0=1$ máximo relativo: (1, 9) ($N(1)=9$)

En (3, 5) $N'(t) = 2 \rightarrow N'(t) = 0$ non ten solución

En (3, 5), $N'(t) > 0 \Rightarrow N$ crecente

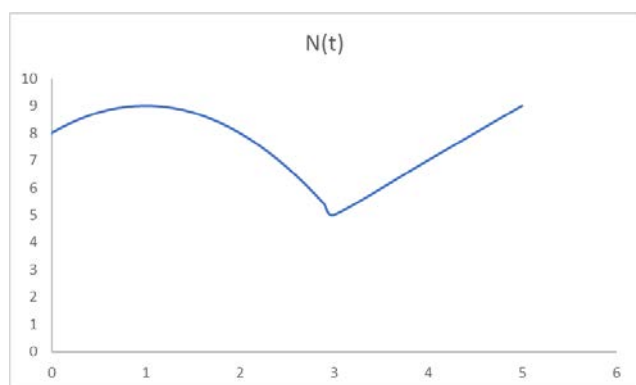
$$N(0)=8, N(3)=5, N(3^+)=5, N(5)=9$$

O número de exemplares vendidos crece desde o momento inicial ata transcorrido 1 mes e desde transcorridos 3 meses ata transcorridos 5 meses

O máximo número de ventas prodúcese transcorrido 1 mes e tamén transcorridos 5 meses e ascende a 9000 exemplares

O número mínimo de ventas prodúcese transcorridos 3 meses e é de 5 000 exemplares

b) Represente graficamente a función $N(t)$. Calcule a area da rexión delimitada pola gráfica da función $N(t)$, o eixe de abscisas e as rectas $t=0$ e $t=5$.



$$\text{Area} = \left| \int_0^3 (-t^2 + 2t + 8) dt \right| + \left| \int_3^5 (2t - 1) dt \right|$$

$$\left| \frac{-t^3}{3} + t^2 + 8t \right|_0^3 + \left| t^2 - t \right|_3^5 = 24 + 14 = 38 \text{ u}^2$$

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 4. Análise. Dada a función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$

a) Calcule os valores do parámetro "a" para que $f(x)$ teña un punto crítico en $x_0=3$.

$$x_0=3, \text{ punto crítico} \Rightarrow f'(3)=0$$

$$f'(x) = 1/a - a/x^2 \rightarrow f'(3) = 1/a - a/9 = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

Os valores do parámetro "a" para os que $f(x)$ ten un punto crítico en $x_0=3$ son $a=3$ e $a=-3$

b) Para $a=3$, estude o crecemento e decrecemento da función e os seus máximos e mínimos, se existen. Estude tamén os seus intervalos de concavidade e convexidade e os seus puntos de inflexión, se existen.

$$f(x) = x/3 + 3/x, x \neq 0$$

$$f'(x) = 1/3 - 3/x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \text{ puntos críticos}$$

$$\text{En } (-\infty, -3), f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ crecente}$$

$$\text{En } (-3, 0), f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ decrecente}$$

$$\text{En } (0, 3), f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ decrecente}$$

$$\text{En } (3, +\infty), f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ crecente}$$

$$x_0=-3 \text{ máximo relativo: } (-3, -2) \quad (f(-3)=-2)$$

$$x_0=3 \text{ mínimo relativo: } (3, 2)$$

$$f''(x) = 6/x^3 \rightarrow f''(x) = 0 \text{ non ten solución}$$

$$\text{En } (-\infty, 0), f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ cóncava}$$

$$\text{En } (0, +\infty), f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ convexa}$$

Non existen puntos de inflexión

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 5. Estatística e Probabilidade.

Nunha furna A hai 8 bolas verdes e 6 vermellas e noutra furna B hai 4 verdes e 5 vermellas. Lánzase un dado e se sae un número menor que 3 sácase unha bola da furna A e se sae un número maior ou igual a 3 sácase a bola da furna B. Extraese unha bola o chou,

a) Calcule a probabilidade de que a bola extraída sexa vermella

Sucesos: A= sacar unha bola da furna A

B= sacar unha bola da furna B

V= bola verde

R= bola vermella

$P(A)=P(\text{menos de 3 no lanzamento do dado})=2/6$

$P(B)=P(3 \text{ ou mais no lanzamento do dado})=4/6$

$P(\text{bola vermella})= P(R)= P(R | A) \cdot P(A) + P(R | B) \cdot P(B) = (6/14) \cdot (2/6) + (5/9) \cdot (4/6) = 97/189$

b) Sabendo que se extraeu unha bola verde, cal é a probabilidade de que saíra da furna A?

$$P(A | V) = \frac{P(V | A) \cdot P(A)}{P(V)} = \frac{P(V | A) \cdot P(A)}{P(V | A) \cdot P(A) + P(V | B) \cdot P(B)} = \frac{(8/14) \cdot (2/6)}{(8/14) \cdot (2/6) + (4/9) \cdot (4/6)} = 9/23$$

c) Son independentes os sucesos “extraer bola vermella” e “a bola procede da furna A” ?

Os sucesos R e A son independentes se $P(R \cap A) = P(R) \cdot P(A)$ ou se $P(R | A) = P(R)$ ou se $P(A | R) = P(A)$,.....

Como $P(R \cap A) = P(R | A) \cdot P(A) = (6/14) \cdot (2/6) = 1/7$

$P(A) = 2/6 = 1/3$

$P(R) = 97/189$

$P(R) \cdot P(A) = (1/3) \cdot (97/189) \neq 1/7 = P(R \cap A)$

Os sucesos “extraer bola vermella” e “a bola procede da furna A” non son sucesos independentes

(Tamén podemos resolver o exercicio a través de unha táboa ou un diagrama de árbore)

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 6. Estatística e Probabilidade.

O salario(en €) dos traballadores dunha empresa distribúese normalmente con desviación típica $\sigma=300$ €. Preguntouse a 36 traballadores elixidos ó chou, e estableceuse que o salario medio dos traballadores da empresa oscila entre 1552€ e 1748€.

a) Cal foi o salario medio dos traballadores da mostra?

X = salario dos traballadores

$\sigma=300$, $n=36$

I.C para μ = salario medio: $(\hat{\mu} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})_{1-\alpha}$

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1552 \text{ e } \left(\bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1748 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1552+1748}{2} = 1650 \text{ €}$$

O salario medio dos traballadores da mostra foi de 1650 €

Con que nivel de confianza se estableceu o intervalo anterior?

$$e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 1748-1552 = z_{\alpha/2} \frac{300}{\sqrt{36}}$$

$$98 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot 50 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow 1 - \alpha = 0,95$$

O nivel de confianza co que se estableceu o intervalo e do 95%

b) Se o salario medio dos traballadores da empresa é $\mu=1650$ €, cal é a probabilidade de que o salario medio de mostras de 36 traballadores sexa superior a 1590€?

$$\bar{X} \rightarrow N(\mu=1650, \sigma=\frac{300}{\sqrt{36}}) = N(1650, 50)$$

$$P(\bar{X} > 1590) = P\left(Z > \frac{1590-1650}{50}\right) = P(Z > -1,2) = P(Z < 1,2) = 0,8849$$

A probabilidade de que o salario medio de mostras de 36 traballadores sexa superior a 1590€ é 0,8849