

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

O exame consta de 6 exercicios, **todos coa mesma valoración máxima (3,33 puntos)**, dos que pode realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como queira. Se realiza máis exercicios dos permitidos, **só se corrixirán os tres primeiros realizados**.

EXERCICIO 1. Álgebra. Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule a matriz A^t (sendo A^t a matriz trasposta de A) e calcule a matriz $A \cdot B$.

b) Calcule a matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumpre $A \cdot B \cdot X = C + I$ onde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I a matriz identidade 2×2 .

EXERCICIO 2. Álgebra. Un grupo empresarial desexa crear unha rede de produción formada por plantas de dous tipos: A e B. Cada planta de produción A xeraría uns custos mensuais de 1.000 euros e necesitaría 8 empregados para o seu funcionamento, mentres que cada planta de produción B xeraría uns custos mensuais de 2.000 euros e necesitaría 4 empregados. O número de plantas de produción A non deberá superar ó dobre das de tipo B. Ademais, os custos mensuais desta rede de produción non deben superar os 42.000 euros e tampouco debe supoñer a contratación de máis de 120 empregados.

a) Formule o sistema de inecuacións asociado ó problema. b) Represente graficamente a rexión factible e calcula os seus vértices. c) Se se sabe que cada planta de produción A xeraría uns beneficios mensuais de 24.000 euros e cada planta de produción B de 20.000 euros, cantas plantas de produción de cada tipo deberían formar a rede para que os beneficios mensuais sexan máximos?

EXERCICIO 3. Análise. O volume de auga (en millóns de litros) almacenado nun embalse ao longo dun período de 11 anos en función do tempo t (en anos) vén dado pola función

$$V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000, \quad 0 \leq t \leq 11$$

a) Determine os períodos de crecemento e decrecemento da auga almacenada.

b) Calcule a cantidade de auga almacenada no último ano ($t=11$).

c) Calcule o ano do período no que o volume almacenado foi máximo e o volume máximo que tivo o embalse ao longo dese período.

EXERCICIO 4. Análise. Os beneficios obtidos durante o primeiro ano (en centos de euros) por un establecemento adicado ó reparto de comida a domicilio veñen dados pola función

$$B(t) = t(t - a)^2, \quad 0 \leq t \leq 12$$

onde t é o tempo transcorrido en meses desde a apertura do establecemento.

a) Calcule o valor do parámetro a tendo en conta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

b) Para $a = 9$, cal foi o maior beneficio obtido? En que momento ou momentos se produciu? Xustifique as respostas. c) Para $a = 9$, represente a gráfica da función $B(t)$ tendo en conta a información anterior e o estudo dos seus intervalos de crecemento e decrecemento.

EXERCICIO 5. Estatística e Probabilidade. Nunha cidade, o 70% da poboación recibe publicidade dun establecemento, dos cales un 90% realiza algunha compra en devandito establecemento. Tamén se sabe que dos que non reciben publicidade, un 60% realiza algunha compra en devandito establecemento.

a) Que porcentaxe da poboación da cidade realiza algunha compra nese establecemento?

b) Se eliximos unha persoa ao azar que realizou algunha compra nese establecemento, cal é a probabilidade de que recibise publicidade do mesmo?

c) Son independentes os sucesos “realizar algunha compra nese establecemento” e “recibir publicidade do mesmo”? Xustifique a resposta.

EXERCICIO 6. Estatística e Probabilidade. Nunha mostra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre as visitadas un ano polos inspectores de traballo dunha provincia, sancionouse a 30 delas.

a) Calcule, con un nivel de confianza do 90%, un intervalo de confianza para a proporción de empresas sancionadas pola Inspección de Traballo.

b) Se ignoramos os datos iniciais e cun nivel de confianza do 95%, cal é o tamaño mínimo da mostra necesaria para estimar a proporción de empresas sancionadas cun erro máximo do 2%?

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcule la matriz A^t (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcule la matriz $A \cdot B$.
b) Calcule la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2×2 .

EJERCICIO 2. Álgebra. Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

- a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema. b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices. c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuántas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

EJERCICIO 3. Análisis. El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función $V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$, $0 \leq t \leq 11$

- a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada.
b) Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$).
c) Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

EJERCICIO 4. Análisis. Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t) = t(t - a)^2, \quad 0 \leq t \leq 12$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.

- a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.
b) Para $a = 9$, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas. c) Para $a = 9$, represente la gráfica de la función $B(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una ciudad, el 70% de la población recibe publicidad de un establecimiento, de los cuales un 90% realiza alguna compra en dicho establecimiento. También se sabe que de los que no reciben publicidad, un 60% realiza alguna compra en dicho establecimiento.

- a) ¿Qué porcentaje de la población de la ciudad realiza alguna compra en ese establecimiento?
b) Si elegimos una persona al azar que ha realizado alguna compra en ese establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido publicidad del mismo?
c) ¿Son independientes los sucesos “realizar alguna compra en ese establecimiento” y “recibir publicidad del mismo”? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. En una muestra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre las visitadas un año por los inspectores de trabajo de una provincia, se ha sancionado a 30 de ellas.

- a) Calcule, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo.
b) Si ignoramos los datos iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2%?

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

Criterios de Avaliación

Só puntúan as tres primeiras preguntas respondidas

1. Álgebra.

- a) 1 punto
- b) 2,33 puntos

2. Álgebra.

- a) 1 punto
- b) 1,5 puntos
- c) 0,83 puntos

3. Análise.

- a) 2 puntos
- b) 0,33 puntos
- c) 1 punto

4. Análise.

- a) 1 punto
- b) 2 puntos
- c) 0,33 puntos

5. Estatística e Probabilidade.

- a) 1,33 puntos
- b) 1 punto
- c) 1 punto

6. Estatística e Probabilidade.

- a) 2 puntos
- b) 1,33 puntos

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 1. Álgebra.

Dadas as matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule a matriz A^t (sendo A^t a matriz trasposta de A) e calcule a matriz $A \cdot B$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2+3 & -1+3 \\ 2-1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calcule a matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumpre $A \cdot B \cdot X = C + I$ onde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I a matriz identidade 2×2 .

$$A \cdot B \cdot X = C + I \Rightarrow X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (C + I)$$

$$(C + I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A \cdot B) = -5 \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } X = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ou ben resolvendo o sistema,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2c = 2 \\ 3b + 2d = -2 \\ a - c = 0 \\ b - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/5 \\ b = -2/5 \\ c = 2/5 \\ d = -2/5 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

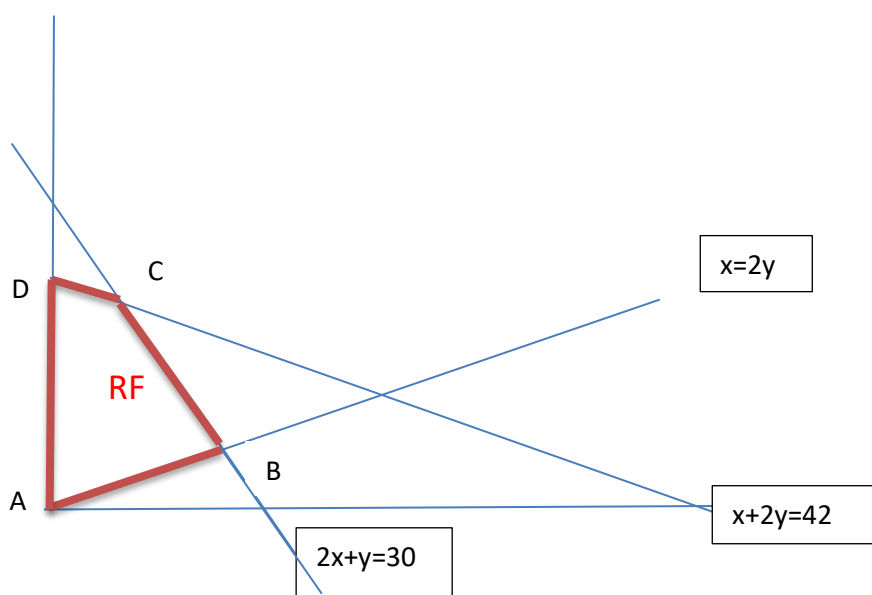
EXERCICIO 2. Álgebra. Un grupo empresarial desexa crear unha rede de produción formada por plantas de dous tipos: A e B. Cada planta de produción A xeraría uns custos mensuais de 1.000 euros e necesitaría 8 empregados para o seu funcionamento, mentres que cada planta de produción B xeraría uns custos mensuais de 2.000 euros e necesitaría 4 empregados. O número de plantas de produción A non deberá superar ó dobre das de tipo B. Ademais, os custos mensuais desta rede de produción non deben superar os 42.000 euros e tampouco debe supoñer a contratación de máis de 120 empregados.

a) **Formule o sistema de inecuacións asociado ó problema.**

x: nº de plantas tipo A ; y: nº de plantas tipo B

$$\text{Restricións: } \begin{cases} 1000x + 2000y \leq 42000 \\ 8x + 4y \leq 120 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 42 \\ 2x + y \leq 30 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

b)



Vértices:

$$\begin{array}{llll} \text{A: } \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=2y \end{array} \right\} \text{A (0,0)} & \text{B: } \left. \begin{array}{l} x=2y \\ 2x+y=30 \end{array} \right\} \text{B (12, 6)} & \text{C: } \left. \begin{array}{l} 2x+y=30 \\ x+2y=42 \end{array} \right\} \text{C (6, 18)} & \text{D: } \left. \begin{array}{l} x+2y=42 \\ x=0 \end{array} \right\} \text{D (0,21)} \end{array}$$

c) Se se sabe que cada planta de produción A xeraría uns beneficios mensuais de 24.000 euros e cada planta de produción B de 20.000 euros, cantas plantas de produción de cada tipo deberían formar a rede para que os beneficios mensuais sexan máximos?

función a optimizar, $f(x, y) = 24000x + 20000y$

$$f(A) = 0$$

$$f(B) = 408000$$

$$f(C) = 504000 \text{ (Máximo)}$$

$$f(D) = 420000$$

f alcanza o seu máximo no vértice C (6, 18)

Deben formarse 6 plantas de tipo A e 18 plantas de tipo B para maximizar os beneficios.

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II**EXERCICIO 3. Análise.**

O volume de auga (en millóns de litros) almacenado nun embalse ao longo dun período de 11 anos en función do tempo t (en anos) vén dado pola función $V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$, $0 \leq t \leq 11$

a) Determine os períodos de crecemento e decrecemento da auga almacenada.

$$V'(t) = 3t^2 - 48t + 180 \rightarrow V'(t) = 0 \rightarrow t = 6 \text{ e } t = 10 \text{ (puntos críticos)}$$

En $(0, 6)$, $V'(t) > 0 \rightarrow V$ crecente

En $(6, 10)$, $V'(t) < 0 \rightarrow V$ decrecente

En $(10, 11)$, $V'(t) > 0 \rightarrow V$ crecente

A auga almacenada crece desde o momento inicial ata transcorridos 6 anos e desde transcorridos 10 anos ata transcorridos 11 anos.

A auga almacenada decrece desde transcorridos 6 anos ata transcorridos 10 anos.

b) Calcule a cantidade de auga almacenada no último ano ($t = 11$).

$$V(11) = 11^3 - 24 \times 11^2 + 180 \times 11 = 8407$$

A cantidade auga almacenada no último ano e de 8407 millóns de litros.

c) Calcule o ano do período no que o volume almacenado foi máximo e o volume máximo que tivo o embalse ao longo dese período.

$t_0 = 6$ e un máximo relativo

$$V(6) = 6^3 - 24 \times 6^2 + 180 \times 6 = 8432$$

$$V(11) = 8407$$

$t_0 = 6$ e un máximo absoluto

O máximo almacenamento de auga prodúcese no sexto ano e ascende a 8432 millóns de litros.

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 4. Análise.

Os beneficios obtidos durante o primeiro ano (en centos de euros) por un establecemento dedicado ó reparto de comida a domicilio veñen dados pola función

$$B(t) = t(t-a)^2, \quad 0 \leq t \leq 12$$

onde t é o tempo transcorrido en meses desde a apertura do establecemento.

a) Calcule o valor do parámetro a tendo en conta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

$$B'(t) = (t-a)^2 + 2t(t-a) = (t-a)(3t-a)$$

$$B''(t) = (3t-a) + 3(t-a) = 6t - 4a; \quad B''(6) = 0 \rightarrow 36 - 4a = 0 \rightarrow a = 9$$

b) Para $a = 9$, cal foi o maior beneficio obtido? En que momento ou momentos se produciu? Xustifique as respostas.

$$B(t) = t(t-9)^2; \quad B'(t) = (t-9)^2 + 2t(t-9) = (t-9)(3t-9); \quad B'(t) = 0 \rightarrow t=9, t=3 \text{ (puntos críticos)}$$

$$\text{En } (0, 3), \quad B'(t) > 0 \rightarrow B \text{ crecente}$$

$$\text{En } (3, 9), \quad B'(t) < 0 \rightarrow B \text{ decrecente}$$

$$\text{En } (9, 12), \quad B'(t) > 0 \rightarrow B \text{ crecente}$$

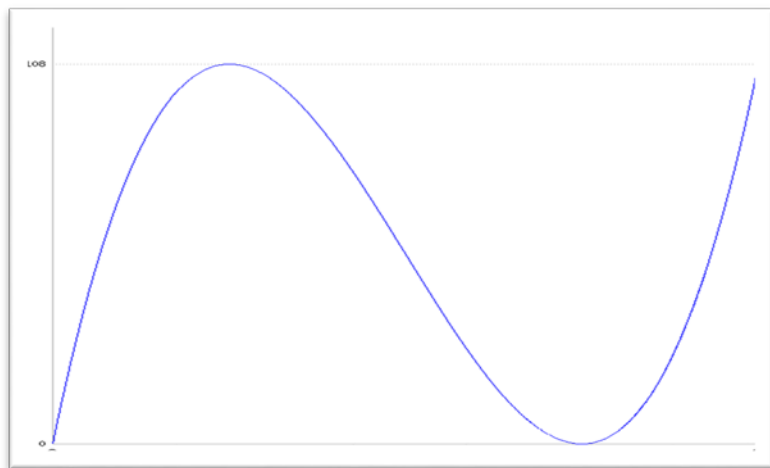
$$t_0 = 3 \text{ e un máximo relativo : } (3, 108) \quad (B(3) = 108)$$

$$t_0 = 9 \text{ e un mínimo relativo : } (9, 0) \quad (B(9) = 0)$$

$$t=0 \rightarrow B(0) = 0; \quad t=12 \rightarrow B(12) = 108$$

O maior beneficio obtido foi de 10800€ e prodúcese transcorridos 3 meses e transcorridos 12 meses desde a apertura do establecemento.

c) Para $a = 9$, represente a gráfica da función $B(t)$ tendo en conta a información anterior e o estudo dos seus intervalos de crecemento e decrecemento.



MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 5. Estatística e Probabilidade.

Nunha cidade, o 70% da poboación recibe publicidade dun establecemento, dos cales un 90% realiza algunha compra en devandito establecemento. Tamén se sabe que dos que non reciben publicidade, un 60% realiza algunha compra en devandito establecemento.

a) Que porcentaxe da poboación da cidade realiza algunha compra nese establecemento?

Sucesos: P= recibe publicidade e C= realiza algunha compra

Datos: $P(P) = 0,7 \rightarrow P(\bar{P}) = 0,3$

$P(C|P) = 0,9$; $P(C|\bar{P}) = 0,6$

$P(C) = P(C|P) \cdot P(P) + P(C|\bar{P}) \cdot P(\bar{P}) = 0,9 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 = 0,81$

O 81% da poboación da cidade realiza algunha compra nese establecemento

b) Se eliximos unha persoa ao azar que realizou algunha compra nese establecemento, cal é a probabilidade de que recibise publicidade do mesmo?

$$P(P|C) = \frac{P(C|P) \cdot P(P)}{P(C)} = \frac{0,9 \cdot 0,7}{0,81} = \frac{7}{9} = 0,777$$

Se eliximos unha persoa ao azar que realizou algunha compra nese establecemento, a probabilidade de que recibise publicidade do mesmo é $0,777 = 7/9$

c) Son independentes os sucesos “realizar algunha compra nese establecemento” e “recibir publicidade do mesmo”? Xustifique a resposta.

Os sucesos P e C son independentes se $P(P \cap C) = P(P) \cdot P(C)$ ou se $P(P|C) = P(P)$ ou se $P(C|P) = P(C)$,.....

Como $P(P \cap C) = P(C|P) \cdot P(P) = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63$

e $P(P) \cdot P(C) = 0,7 \cdot 0,81 \rightarrow P(P \cap C) \neq P(C|P) \cdot P(P)$

Os sucesos “realizar algunha compra nese establecemento” e “recibir publicidade do mesmo” non son sucesos independentes

(Tamén podemos resolver o exercicio a través de unha táboa ou un diagrama de árbore)

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II**EXERCICIO 6. Estatística e Probabilidade.**

Nunha mostra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre as visitadas un ano polos inspectores de traballo dunha provincia, sancionouse a 30 delas.

a) Calcule, con un nivel de confianza do 90%, un intervalo de confianza para a proporción de empresas sancionadas pola Inspección de Traballo.

p = proporción de empresas sancionadas

O intervalo de confianza para p e da forma $(\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})_{1-\alpha}$

$$\hat{p} = \frac{30}{120} = 0,25$$

Nivel de confianza : $90\% \rightarrow 1-\alpha = 0,9 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$

Calculamos o intervalo

$$(0,25 - 1,645 \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{120}} ; 0,25 + 1,645 \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{120}}) = (0,25 - 0,065 ; 0,25 + 0,065) = (0,185 ; 0,315)$$

o I.C ao 90%, para a proporción de empresas sancionadas pola Inspección de Traballo e

$$(0,185 ; 0,315) \Leftrightarrow (18,5\%; 31,5\%)_{90\%}$$

b) Se ignoramos os datos iniciais e cun nivel de confianza do 95%, cal é o tamaño mínimo da mostra necesaria para estimar a proporción de empresas sancionadas cun erro máximo do 2%?

$$e = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0,02$$

Como $\hat{p}$ e descoñecido consideramos $\hat{p} = 0,5$

Nivel de confianza : $95\% \rightarrow 1-\alpha = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$1,96 \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{n}} \leq 0,02 \Rightarrow \frac{1,96 \times 0,5}{0,02} \leq \sqrt{n} \Rightarrow n \geq 2401$$

O tamaño mínimo da mostra para estimar dita proporción cun erro máximo do 2% e un nivel de confianza do 95% debe ser de 2401 empresas.