



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- e) Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x)$$

Halla a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- b) **[1 punto]** Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

- a) **[1 punto]** Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.
- b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de dicho recinto.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- [1,25 puntos]** Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
- [1,25 puntos]** Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1 .

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

- [1,25 puntos]** ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
- [1,25 puntos]** Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

- [1 punto]** Estudia la posición relativa de π y r .
- [1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = a + b \cos(x) + c \operatorname{sen}(x)$$

Halla a , b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Si la recta $y = 1$ es recta tangente en $x = \frac{\pi}{2}$ significa que la función vale 1 para ese valor $\rightarrow$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y la pendiente de la recta tangente (recta horizontal $\rightarrow$ pendiente = 0) es el valor

de la derivada para $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a + b \cos(x) + c \operatorname{sen}(x) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{1 = a + c}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -b \operatorname{sen}(x) + c \cdot \cos(x) \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -b \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 = -b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ por lo que el valor de la función para $x = 0$ es $y = 0 - 1 = -1 \rightarrow f(0) = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a + b \cos(x) + c \operatorname{sen}(x) \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = a + b \cos(0) + c \operatorname{sen}(0) \Rightarrow \boxed{-1 = a + b}$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + c = 1 \\ \boxed{b = 0} \\ a + b = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = 1 \\ a + 0 = -1 \rightarrow \boxed{a = -1} \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 0$ y $c = 2$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

- a) **[1,5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
 b) **[1 punto]** Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x) = (1)e^{-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2} + (-2x^2 + x)e^{-x^2} = (-2x^2 + x + 1)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (-2x^2 + x + 1)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(1)}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-4} = \frac{-1}{2} = x \\ \frac{-1-3}{-4} = 1 = x \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos: $x = \frac{-1}{2}$ y $x = 1$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1/2)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = (-2(-1)^2 - 1 + 1)e^{-(-1)^2} = -2e^{-1} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1/2).$$

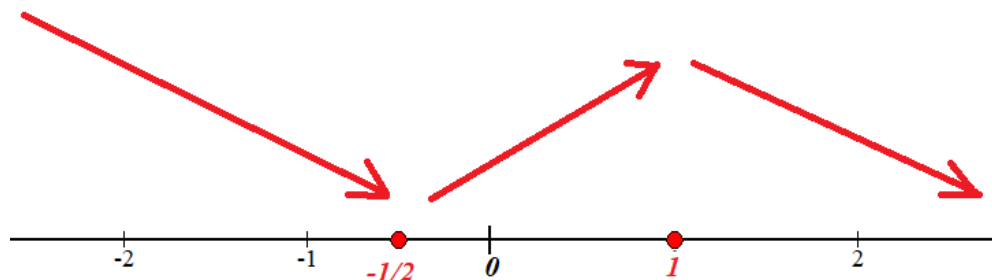
- En el intervalo $(-1/2, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = (-2(0)^2 + 0 + 1)e^{-0^2} = 1 > 0. \text{ La función crece en } (-1/2, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = (-2 \cdot 2^2 + 2 + 1)e^{-2^2} = -5e^{-4} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ y crece en $\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$.

- b) Observando el esquema anterior sabemos que la función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{-1}{2}$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Para estos valores determinamos el valor de la función.

$$x = \frac{-1}{2} \rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{-(0.5)^2} = -e^{-0.25} \simeq -0.7788$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)e^{-1^2} = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} \simeq 0.1839$$

Calculamos los límites de la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$ para determinar si son máximos y mínimos absolutos.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

El mínimo absoluto de la función es $-e^{-0.25} \simeq -0.7788$ y se alcanza en $x = \frac{-1}{2}$.

El máximo absoluto de la función es $\frac{1}{2e} \simeq 0.1839$ y se alcanza en $x = 1$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

- a) [1 punto] Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.
 b) [1,5 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

a) Hallamos los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 7 \\ g(x) = |x^2 - 1| \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 7 = |x^2 - 1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + 7 = x^2 - 1 \rightarrow 8 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2} \rightarrow \begin{cases} f(-2) = -(-2)^2 + 7 = 3 \\ f(2) = -(2)^2 + 7 = 3 \end{cases} \\ -x^2 + 7 = -x^2 + 1 \rightarrow 7 = 1 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{array} \right.$$

Los puntos de corte de ambas gráficas son $A(-2, 3)$ y $B(2, 3)$.

La gráfica de la función f es una parábola. Hallamos su vértice.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Hallamos la expresión de la función g como una función a trozos.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

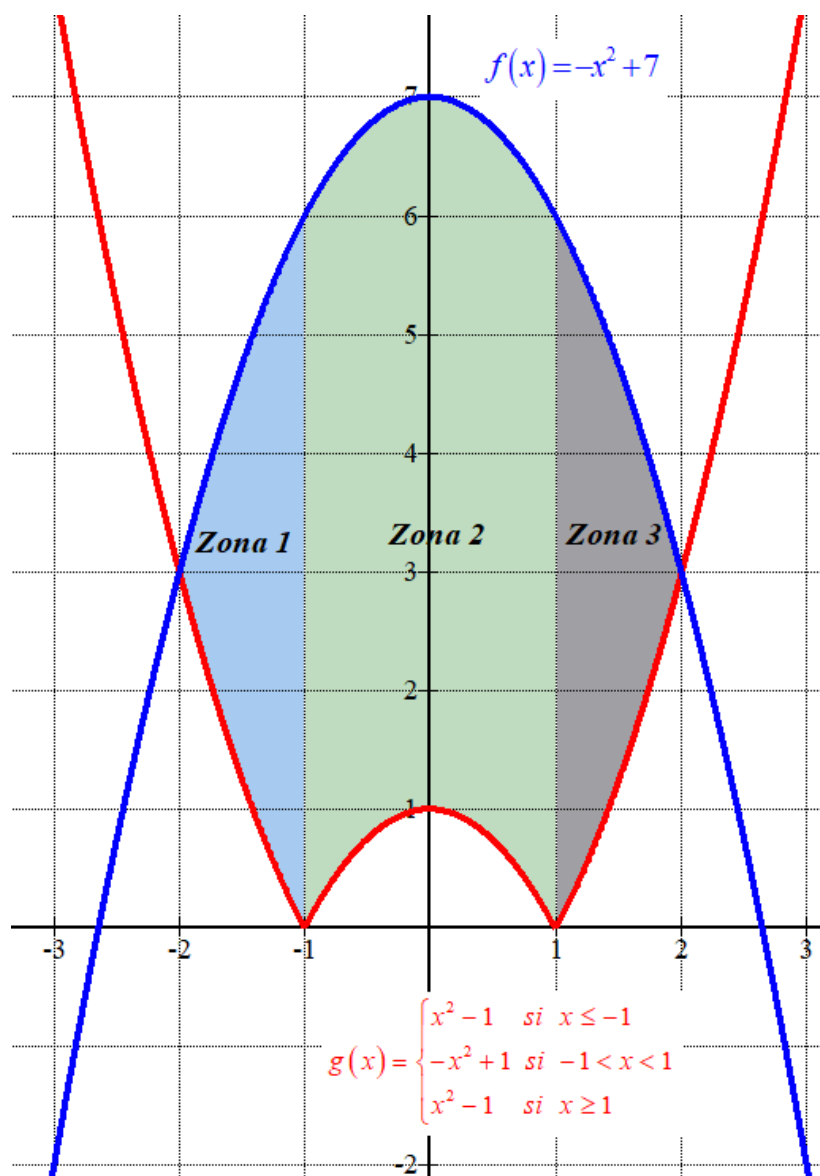
$$g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos el recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

$$f(x) = -x^2 + 7 \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

x	$y = -x^2 + 7$
-2	3
-1	6
0	7
1	6
2	3

x	$y = g(x)$
-2	3
-1	0
0	1
1	0
2	3



b) Hallamos el área pedida obteniendo por separado el área de cada zona.

Área de zona 1.

$$\int_{-2}^{-1} -x^2 + 7 - (x^2 - 1) dx = \int_{-2}^{-1} -2x^2 + 8 dx = \left[-2 \frac{x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^{-1} =$$

$$= \left[-2 \frac{(-1)^3}{3} + 8(-1) \right] - \left[-2 \frac{(-2)^3}{3} + 8(-2) \right] = \frac{2}{3} - 8 - \frac{16}{3} + 16 = \frac{10}{3}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de $\frac{10}{3}$ unidades cuadradas.

Área de zona 2.

$$\int_{-1}^1 -x^2 + 7 - (-x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 6 dx = [6x]_{-1}^1 = 6 - 6(-1) = 12$$

El área de la zona 2 tiene un valor de 12 unidades cuadradas.

Área de zona 3.

$$\begin{aligned}\int_1^2 -x^2 + 7 - (x^2 - 1) dx &= \int_1^2 -2x^2 + 8 dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 8x \right]_1^2 = \\ &= \left[-2\frac{2^3}{3} + 8 \cdot 2 \right] - \left[-2\frac{1^3}{3} + 8 \cdot 1 \right] = -\frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

El área de la zona 3 tiene un valor de $\frac{10}{3}$ unidades cuadradas.

El área del recinto acotado y limitado por las gráficas de f y g es la suma de las áreas obtenidas: $\frac{10}{3} + 12 + \frac{10}{3} = \frac{56}{3} \approx 18.667$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$.

Calculamos la integral indefinida.

$$\int e^x \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \cos(x) \rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos(x) - \int -\operatorname{sen}(x) e^x dx =$$

$$= e^x \cos(x) + \int \operatorname{sen}(x) e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \operatorname{sen}(x) \rightarrow du = \cos(x) \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= e^x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) e^x - \int \cos(x) e^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos(x) dx = e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) - \int \cos(x) e^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \Rightarrow \int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx = \left[\frac{e^x}{2} (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right] - \left[\frac{e^0}{2} (\cos(0) + \operatorname{sen}(0)) \right] = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}}$$

Hemos obtenido que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
- b) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1 .

a) La matriz X es una matriz 2×2 . Consideramos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Debe cumplirse $XA = -AX^t$.

$$XA = -AX^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a = a \rightarrow \boxed{a=0} \\ b = c \\ -c = -b \\ d = -d \rightarrow \boxed{d=0} \end{cases}$$

La matriz X queda $X = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$. También debe cumplirse $X^2 = I$.

$$X^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Las matrices X que cumple lo pedido son $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Consideramos $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

La suma de los elementos de su diagonal principal es cero $\rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$.

La matriz queda $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Debe cumplir $YA = AY$.

$$YA = AY \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & -a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -b \rightarrow \boxed{b=0} \\ c = -c \rightarrow \boxed{c=0} \end{cases}$$

La matriz queda $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. Su determinante es -1 .

$$|Y| = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $Y_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
- b) **[1,25 puntos]** Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

- a) Llamamos “x” al precio de una unidad de perfume A, “y” al precio de una de B y “z” al precio de una de C.

“Una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros” $\rightarrow 20x + 30y + 15z = 2200$.

“En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros” $\rightarrow 15x + 10y + 10z = 1250$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y obtenemos sus soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 30y + 15z = 2200 \\ 15x + 10y + 10z = 1250 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \times 3 \rightarrow 12x + 18y + 9z = 1320 \\ \times (-4) \rightarrow -12x - 8y - 8z = -1000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$10y + z = 320 \Rightarrow \boxed{z = 320 - 10y} \Rightarrow 3x + 2y + 2(320 - 10y) = 250 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 2y + 640 - 20y = 250 \Rightarrow 3x - 18y = -390 \Rightarrow x - 6y = -130 \Rightarrow \boxed{x = 6y - 130}$$

Veamos cuanto se pagaría por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C.

$$\left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ z = 320 - 10y \end{array} \right\} \Rightarrow 25x + 10y + 16z = 25(6y - 130) + 10y + 16(320 - 10y) =$$

$$= \cancel{150y} - 3250 + \cancel{10y} + 5120 - \cancel{160y} = \boxed{1870}$$

Tendremos que pagar 1870 euros por el tercer pedido.

- b) Añadimos al sistema la ecuación que nos proporciona el dato: “el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A” $\rightarrow z = \frac{2}{5}x$.

Dado que hemos resuelto el sistema con las dos ecuaciones añadimos esta tercera ecuación a las soluciones obtenidas y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ z = 320 - 10y \\ z = \frac{2}{5}x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ \frac{2}{5}x = 320 - 10y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ 2x = 1600 - 50y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6y - 130 \\ x = 800 - 25y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y - 130 = 800 - 25y \Rightarrow 31y = 930 \Rightarrow \boxed{y = \frac{930}{31} = 30} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 6 \cdot 30 - 130 = 50} \\ \boxed{z = 320 - 10 \cdot 30 = 20} \end{cases}$$

Una unidad del perfume A cuesta 50 €, una de B cuesta 30 € y una de C cuesta 20 €.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de π y r .
 b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

- a) Hallamos un vector normal del plano y un vector director de la recta.

$$\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 1)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 0) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases}$$

Comprobamos si los vectores $\vec{n}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares.

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, -2, 1) \cdot (2, 1, 0) = 2 - 2 + 0 = 0$$

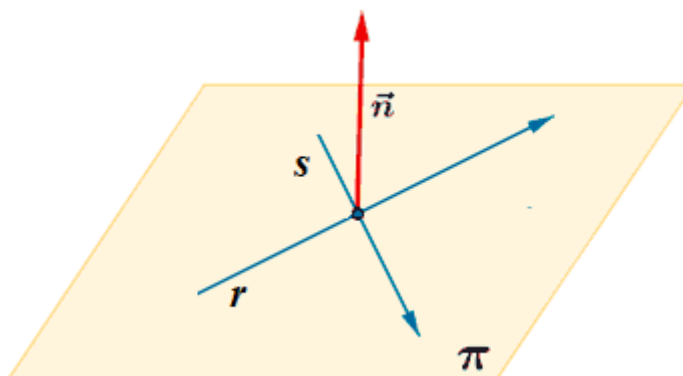
Como el producto escalar es nulo los vectores son perpendiculares, por lo que plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Comprobamos si el punto $P_r(1, 0, 1)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0 \\ \text{¿} P_r(1, 0, 1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 - 2 \cdot 0 + 1 - 2 = 0?$$

La igualdad es cierta y la recta está contenida en el plano.

- b) La recta s contenida en π que es perpendicular a r es perpendicular también al vector normal del plano. Por lo que nos sirve como vector director de dicha recta el producto vectorial de $\vec{n}$ y $\vec{v}_r$.



Hallamos la expresión del vector director de la recta s .

$$\vec{u}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j + k + 4k - i = -i + 2j + 5k = (-1, 2, 5)$$

Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y tiene vector director $\vec{u}_s = (-1, 2, 5)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-1, 2, 5) \\ P(2, -1, -2) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

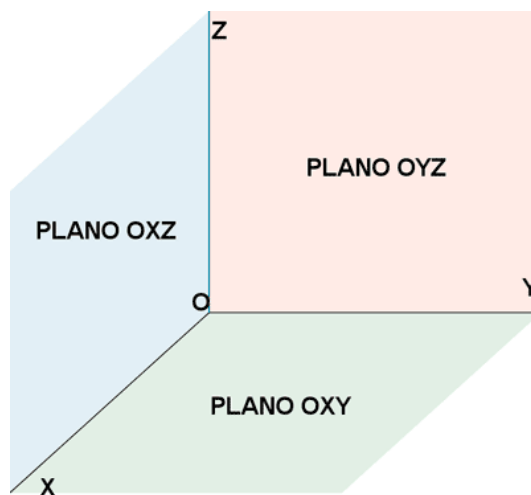
La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es

perpendicular a r es $s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

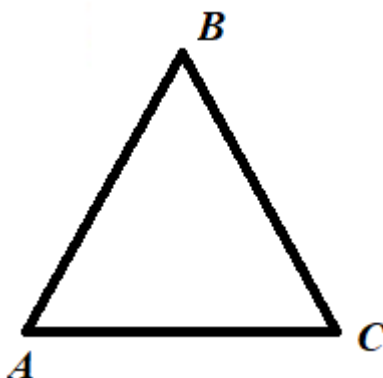
EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(4,0,0)$ y $B(0,2,0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

a) El plano OXZ tiene ecuación $y = 0$.



Un punto C del plano OXZ tiene coordenadas $C(a,0,c)$.



El triángulo ABC debe ser equilátero y para ello las distancias entre sus vértices debe ser la misma. Obtenemos la distancia del punto A al punto B.

$$\left. \begin{array}{l} A(4,0,0) \\ B(0,2,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0,2,0) - (4,0,0) = (-4,2,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

Obtenemos la expresión de la distancia del punto A al punto C y la del punto B al punto C.

$$\left. \begin{array}{l} A(4,0,0) \\ C(a,0,c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (a,0,c) - (4,0,0) = (a-4,0,c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A,C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(a-4)^2 + 0^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + 16 - 8a + c^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} B(0, 2, 0) \\ C(a, 0, c) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (a, 0, c) - (0, 2, 0) = (a, -2, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{a^2 + 2^2 + c^2} = \sqrt{4 + a^2 + c^2}$$

Igualemos estas distancias a $\sqrt{20}$ y resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} d(B, C) = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{4 + a^2 + c^2} = \sqrt{20} \Rightarrow 4 + a^2 + c^2 = 20 \\ d(A, C) = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 16 - 8a + c^2} = \sqrt{20} \Rightarrow a^2 + 16 - 8a + c^2 = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + c^2 = 16 \\ a^2 + c^2 - 8a = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 16 - 8a = 4 \Rightarrow -8a = -12 \Rightarrow \boxed{a = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + c^2 = 16 \Rightarrow \frac{9}{4} + c^2 = 16 \Rightarrow 9 + 4c^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c^2 = 55 \Rightarrow c^2 = \frac{55}{4} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{55}{4}} = \pm \frac{\sqrt{55}}{2}}$$

Los puntos buscados son $C_1\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$ y $C_2\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$.