

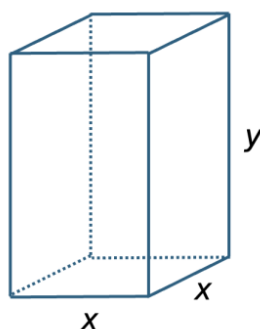
**Evaluación para el Acceso a la Universidad**  
**Curso 2023/2024**



**Materia: MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:** El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde  $a \in \mathbb{R}$  :
- $$\left. \begin{aligned} ax + 2y + z &= 1 \\ 2x + ay + z &= a \\ 5x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$
- a) [1'5 puntos] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de  $a$ , e identifica el número de soluciones en cada caso.
- b) [1 punto] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para  $a = 1$ .
2. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de  $1 \text{ dm}^3$  (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



- a) [1 punto] Determina la función de la superficie del envase en función de  $x$  (incluidas las dos bases).
- b) [1 punto] Calcula, razonadamente, los valores de  $x$  e  $y$ , para que la superficie sea mínima.
- c) [0,5 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el  $\text{dm}^2$ .
3. Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas  $A(2,-1,3)$  y  $B(-2,4,5)$ .
- a) [1 punto] Determina la ecuación de la recta que representa la viga.
- b) [0,5 puntos] ¿Cuál es la longitud de la viga?
- c) [1 punto] Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C(0,0,1)$ . Determina el área de la placa triangular.

4.

- a) Calcula el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 3}$ .

- b) Estudia el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  en función de los valores de  $a \in \mathbb{R}$ .

5. a) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral  $\int x\sqrt{2x+3}dx$ . Puedes utilizar el cambio de variable  $t = \sqrt{2x+3}$ .

b) **[1,5 puntos]** Sean los vectores  $\vec{u} = (1, a, a)$  y  $\vec{v} = (-1, 0, 2)$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Determina el valor de  $a$  para que el ángulo entre los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sea de  $60^\circ$ .

6.

a) **[1 punto]** Calcula los coeficientes  $a, b, c \in \mathbb{R}$  de la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 2$  y un punto de inflexión en  $P(1, 2)$ . Justifica tu respuesta.

b) Sean dos sucesos  $A$  y  $B$  tales que  $P(A) = 0,2$ ;  $P(A \cap B) = 0,1$  y  $P(A \cup B) = 0,3$ . Calcula:

b.1) **[0,75 puntos]**  $P(B)$  y  $P(A \cap \bar{B})$ , con  $\bar{B}$  el suceso complementario de  $B$ .

b.2) **[0,75 puntos]**  $P(A/B)$  y  $P(B/A)$ .

7.

a) **[1,25 puntos]** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . ¿Existe algún valor de  $a$  para el que la matriz  $A$  y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto  $A(1, 0, 0)$  y que es perpendicular a los vectores  $\vec{u} = (1, 2, 1)$  y  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ .

8.

a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

| z    | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.50 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.60 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.70 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.80 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.90 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.00 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.10 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.20 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.30 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |

**SOLUCIONES**

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde  $a \in \mathbb{R}$  :
- $$\left. \begin{aligned} ax + 2y + z &= 1 \\ 2x + ay + z &= a \\ 5x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$
- a) [1'5 puntos] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de  $a$ , e identifica el número de soluciones en cada caso.
- b) [1 punto] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para  $a = 1$ .

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 10 + 4 - 5a - 4 - 2a = a^2 - 7a + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5=a} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

**CASO 1.**  $a \neq 2$  y  $a \neq 5$ .

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

**CASO 2.**  $a = 2$ .

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \\ -10 \quad -10 \quad -5 \quad -5 \\ \hline 0 \quad -6 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \left( \begin{array}{c|ccc} & \overbrace{2 & 2 & 1 & 1}^{A/B} \\ \hline 0 & -6 & -3 & -3 \\ \hline \underbrace{0 & 0 & 0 & 1}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

### CASO 3. $a = 5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \left( \begin{array}{cccc} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 5 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -5 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 25 \quad 5 \quad 25 \\ -10 \quad -4 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 21 \quad 3 \quad 23 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{c|ccc} & \overbrace{5 & 2 & 1 & 1}^{A/B} \\ \hline 0 & 21 & 3 & 23 \\ \hline \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El **sistema es compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

**Resumiendo:** Si  $a \neq 2$  y  $a \neq 5$  el sistema es compatible determinado, si  $a = 2$  el sistema es incompatible y si  $a = 5$  el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $a = 1$  el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5x \quad +2y \quad +z \quad = 1 \\ -5x \quad -10y \quad -5z \quad = -5 \\ \hline -8y \quad -4z \quad = -4 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x \quad -y \quad +z \quad = 1 \\ -2x \quad -4y \quad -2z \quad = -2 \\ \hline -5y \quad -z \quad = -1 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ -8y - 4z = -4 \Rightarrow \\ -5y - z = -1 \end{array} \right.$$

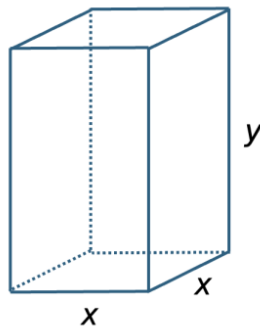
$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ -5y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 5 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ -10y - 2z = -2 \\ 10y + 5z = 5 \\ \hline 3z = 3 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ 3z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ \boxed{z = \frac{3}{3} = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 1 = 1 \\ 2y + 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 2y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La solución del sistema es  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$ .

2. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de  $1 \text{ dm}^3$  (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



- a) **[1 punto]** Determina la función de la superficie del envase en función de  $x$  (incluidas las dos bases).  
 b) **[1 punto]** Calcula, razonadamente, los valores de  $x$  e  $y$ , para que la superficie sea mínima.  
 c) **[0,5 puntos]** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el  $\text{dm}^2$

- a) El volumen debe ser  $1 \text{ dm}^3$ , por lo que  $x^2 y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$ .

La superficie del envase es la suma de las dos bases y el lateral.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Base} \rightarrow x^2 \\ \text{Lateral} \rightarrow 4x \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 4xy \Rightarrow \left\{ y = \frac{1}{x^2} \right\} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 4x \frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

La superficie del prisma tiene la expresión  $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$ .

- b) Utilizamos la derivada de la función  $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$  para encontrar sus puntos críticos.

$$S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x} \Rightarrow S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{4}{x^2} \Rightarrow 4x^3 = 4 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{1} = 1}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = 4x - 4x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 4 + 8x^{-3} = 4 + \frac{8}{x^3} \Rightarrow S''(1) = 4 + \frac{8}{1^3} = 12 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función superficie tiene un mínimo para  $x = 1$ .

La superficie es mínima para  $x = 1 \text{ dm}$  e  $y = \frac{1}{1^2} = 1 \text{ dm}$ .

- c) La superficie mínima tiene un valor de  $S(1) = 2 \cdot 1^2 + \frac{4}{1} = 6 \text{ dm}^2$ . Como cuesta 5 euros el  $\text{dm}^2$  el coste del envase será de  $6 \cdot 5 = 30$  euros.

- 3.** Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas  $A(2,-1,3)$  y  $B(-2,4,5)$ .
- a) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.
- b) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la longitud de la viga?
- c) **[1 punto]** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C(0,0,1)$ . Determina el área de la placa triangular.

a) Hallamos la ecuación de la recta  $r$  que pasa por  $A$  y  $B$ .

$$\left. \begin{array}{l} A(2,-1,3) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-2, 4, 5) - (2, -1, 3) = (-4, 5, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) La longitud de la viga es la distancia de  $A$  a  $B$ , es decir, el módulo del vector  $\overrightarrow{AB}$ .

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 5, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{45} \simeq 6.7 \text{ unidades}$$

La longitud de la viga es de  $\sqrt{45} \simeq 6.7 \text{ unidades}$

c) El área del triángulo  $ABC$  es la mitad del módulo del producto vectorial  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-4, 5, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (2, -1, 3) = (-2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -10i - 4j - 4k + 10k - 8j - 2i = -12i - 12j + 6k = (-12, -12, 6)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-12)^2 + 6^2} = 18$$

El área de la placa triangular tiene un valor de 9 unidades cuadradas.

**4.**

a) Calcula el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 3}$ .

b) Estudia el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  en función de los valores de  $a \in \mathbb{R}$ .

a) Calculamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{e^{+\infty}}{2} = \boxed{+\infty}$$

b) La matriz A es de dimensiones  $3 \times 4$ . Su rango es 1, 2 o 3.

Consideramos el menor que resulta de quitar la primera columna  $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0.$$

El rango de A es 3 para cualquier valor de  $a$ .



5. a) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral  $\int x\sqrt{2x+3}dx$ . Puedes utilizar el cambio de variable  $t = \sqrt{2x+3}$ .
- b) **[1,5 puntos]** Sean los vectores  $\vec{u} = (1, a, a)$  y  $\vec{v} = (-1, 0, 2)$  con  $a \in \mathbb{R}$ . Determina el valor de  $a$  para que el ángulo entre los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sea de  $60^\circ$ .

a) Calculamos la integral usando el cambio de variable sugerido.

$$\int x\sqrt{2x+3}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \sqrt{2x+3} \rightarrow t^2 = 2x+3 \\ 2tdt = 2dx \rightarrow dx = tdt \\ t^2 - 3 = 2x \rightarrow \frac{t^2 - 3}{2} = x \end{array} \right\} = \int \frac{t^2 - 3}{2} \cdot t \cdot tdt = \frac{1}{2} \int t^2 (t^2 - 3) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int t^4 - 3t^2 dt = \frac{1}{2} \left( \frac{t^5}{5} - 3 \frac{t^3}{3} \right) = \frac{1}{10} t^5 - \frac{1}{2} t^3 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ t = \sqrt{2x+3} \end{array} \right\} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{10} (\sqrt{2x+3})^5 - \frac{1}{2} (\sqrt{2x+3})^3 + K}$$

b) Utilizamos la fórmula del producto escalar para obtener el ángulo.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{(1, a, a) \cdot (-1, 0, 2)}{\sqrt{1^2 + a^2 + a^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{-1 + 2a}{\sqrt{1 + 2a^2} \sqrt{5}}$$

El ángulo debe ser de  $60^\circ$ .

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-1 + 2a}{\sqrt{1 + 2a^2} \sqrt{5}} \\ \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1 + 2a}{\sqrt{1 + 2a^2} \sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 + 4a = \sqrt{5} \sqrt{1 + 2a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 + 4a)^2 = 5(1 + 2a^2) \Rightarrow 4 + 16a^2 - 16a = 5 + 10a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a^2 - 16a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(6)(-1)}}{2(6)} = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(6)(-1)}}{12} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{70}}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{8 + \sqrt{70}}{6} \approx 2.72 \rightarrow -1 + 2(2.72) > 0 \rightarrow \text{¡Es válido!} \\ \frac{8 - \sqrt{70}}{6} \approx -0.06 \rightarrow -1 + 2(-0.06) < 0 \rightarrow \text{coseno negativo ¡No es válido!} \end{array} \right.$$

El único valor que hace que  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$  es  $a = \frac{8 + \sqrt{70}}{6} \approx 2.72$ .

**6.**

- a) **[1 punto]** Calcula los coeficientes  $a, b, c \in \mathbb{R}$  de la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 2$  y un punto de inflexión en  $P(1,2)$ . Justifica tu respuesta.
- b) Sean dos sucesos  $A$  y  $B$  tales que  $P(A) = 0,2$ ;  $P(A \cap B) = 0,1$  y  $P(A \cup B) = 0,3$ . Calcula:
- b.1) **[0,75 puntos]**  $P(B)$  y  $P(A \cap \bar{B})$ , con  $\bar{B}$  el suceso complementario de  $B$ .
- b.2) **[0,75 puntos]**  $P(A/B)$  y  $P(B/A)$ .

- a) Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 2$  la derivada se anula para este valor:  $f'(2) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = 12 + 4a + b}$$

Si la función tiene un punto de inflexión en  $P(1,2)$  se debe cumplir que la función pase por ese punto:  $f(1) = 2$  y que la derivada segunda se anule para  $x = 1$ :  $f''(1) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = 1^3 + a + b + c \Rightarrow \boxed{a + b + c = 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 6 + 2a \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-6}{2} = -3}$$

Utilizamos todo lo obtenido y hallamos el valor del resto de parámetros.

$$\left. \begin{array}{l} 12 + 4a + b = 0 \\ a + b + c = 1 \\ \boxed{a = -3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12 + 4(-3) + b = 0 \\ -3 + b + c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{b = 0} \\ b + c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

Los valores buscados son  $a = -3$ ,  $b = 0$  y  $c = 4$ .

b)

b.1) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.3 = 0.2 + P(B) - 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.3 - 0.2 + 0.1 = P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.2}$$

Calculamos  $P(A \cap \bar{B})$ .

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0.2 = 0.1 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \boxed{P(A \cap \bar{B}) = 0.1}$$

b.2) Calculamos  $P(A/B)$ .

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.2} = \boxed{0.5}$$

Calculamos  $P(B/A)$ .

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.2} = \boxed{0.5}$$

7.

- a) [1,25 puntos] Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . ¿Existe algún valor de  $a$  para el que la matriz  $A$  y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.
- b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto  $A(1,0,0)$  y que es perpendicular a los vectores  $\vec{u} = (1,2,1)$  y  $\vec{v} = (1,0,0)$ .

- a) Si la matriz y su inversa son iguales debe cumplirse que  $A \cdot A = I$ .

$$A \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+1=1 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

Para que la matriz  $A$  y su inversa sean iguales debe ser  $a = 0$ .

- b) Si la recta  $r$  buscada es perpendicular a los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  su vector director es el producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{v}_r = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = j - 2k = (0, 1, -2)$$

La recta  $r$  que cumple lo pedido es la recta que pasa por  $A$  y tiene como vector director  $\vec{v}_r = (0, 1, -2)$ . Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{matrix} A(1,0,0) \in r \\ \vec{v}_r = (0,1,-2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

**8.**

a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

a) Llamamos T a “el socio juega al tenis”, N a “el socio practica natación”, G a “el socio practica golf” y A a “el socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales”.

Sabemos que  $P(T) = 0.6$ ,  $P(N) = 0.25$ ,  $P(G) = 0.15$ ,  $P(A/T) = 0.21$ ,  $P(A/N) = 0.3$  y  $P(A/G) = 0.12$ .

a.1) Nos piden calcular  $P(A)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(T)P(A/T) + P(N)P(A/N) + P(G)P(A/G) =$$

$$= 0.6 \cdot 0.21 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.15 \cdot 0.12 = \boxed{0.219}$$

La probabilidad de que el socio elegido al azar haya obtenido algún premio es de 0.219.

a.2) Nos piden calcular  $P(N/A)$ . Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N/A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{P(N)P(A/N)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.3}{0.219} = \boxed{\frac{25}{73} \approx 0.3425}$$

La probabilidad de que elegido al azar un socio que ha obtenido premio esté sea de natación es de  $\frac{25}{73} \approx 0.3425$ .

b) X = El tiempo (en minutos) que una persona sana invierte en recorrer 5 km.  $X = N(60, 8)$ .

b.1) Nos piden calcular  $P(X < 50)$ .

$$P(X < 50) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{50 - 60}{8}\right) = P(Z < -1.25) = P(Z > 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

| z    | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.50 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 |
| 0.60 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 |
| 0.70 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 |
| 0.80 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 |
| 0.90 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 |
| 1.00 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 |
| 1.10 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 |
| 1.20 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8906 | 0.8925 | 0.8944 |
| 1.30 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 |

La probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos en recorrer 5 km es de 0.1056.

b.2) Nos piden calcular  $P(50 \leq X \leq 66)$ .

$$P(50 \leq X \leq 66) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{50-60}{8} \leq Z \leq \frac{66-60}{8}\right) = P(-1.25 \leq Z \leq 0.75) =$$

$$= P(Z \leq 0.75) - P(Z \leq -1.25) = P(Z \leq 0.75) - [1 - P(Z \leq 1.25)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7734 - (1 - 0.8944) = 0.6678$$

| z    | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.  |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| 0.50 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7 |
| 0.60 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7 |
| 0.70 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7 |
| 0.80 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8 |

La probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos en recorrer 5 km es de 0.6678.