



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la función $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$ definida para $x > 0$.

- Estudie sus máximos y sus mínimos, y sus zonas de crecimiento y de decrecimiento. [1 punto]
- ¿Esta función tiene asíntotas? Haga un esbozo de su gráfica. [1 punto]
- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. [0,5 puntos]

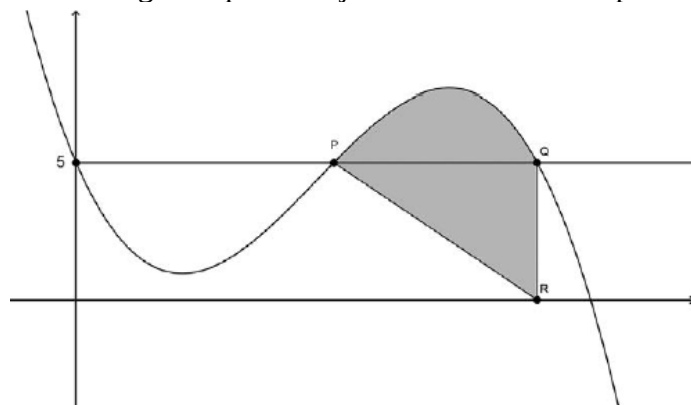
2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

donde k es un parámetro real.

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k , y resuélvalo para $k = 0$. [1 punto]
- Resuelva el sistema para $k = -1$. [0,75 puntos]
- Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema resulte incompatible. Justifique la respuesta. [0,75 puntos]

3. Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

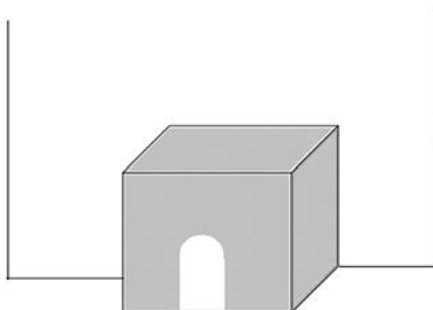
- A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P , Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR . [1,25 puntos]
- Calcule la superficie del terreno. [1,25 puntos]

4. Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa.



- A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una después de otra y sin reemplazo (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda).
 - Calcule la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E. [0,5 puntos]
 - Calcule la probabilidad de que las dos bolas sean diferentes. [0,75 puntos]
- Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de otra, pero ahora con reemplazo (es decir, devolviendo a la bolsa cada bola extraída antes de sacar la siguiente).
 - Calcule la probabilidad de que no haya sacado ninguna A. [0,5 puntos]
 - Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A. [0,75 puntos]

5. Se quiere construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hay que construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, se quiere que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 €.



- Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función $C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, donde x es la profundidad del cobertizo en metros. [1,25 puntos]
- Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste? [1,25 puntos]

6. Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-3, -2, 3)$.

- Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B . Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$. [1 punto]
- Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta. [0,75 puntos]
- Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área. [0,75 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$ definida para $x > 0$.
- a) Estudie sus máximos y sus mínimos, y sus zonas de crecimiento y de decrecimiento. [1 punto]
- b) ¿Esta función tiene asíntotas? Haga un esbozo de su gráfica. [1 punto]
- c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. [0,5 puntos]

a) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = 2 \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = 2 \frac{\frac{1}{x}x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \boxed{x = e}$$

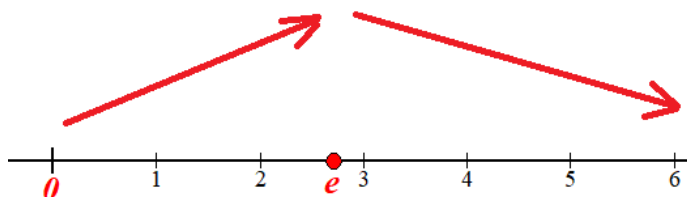
La función tiene un punto crítico en $x = e$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0, e)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2 \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 2 > 0$. La función crece en $(0, e)$.
- En el intervalo $(e, +\infty)$ tomamos $x = e^2$ y la derivada vale

$$f'(e^2) = 2 \frac{1 - \ln e^2}{(e^2)^2} = 2 \frac{-1}{e^4} = \frac{-2}{e^4} < 0. \text{ La función decrece en } (e, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0, e)$ y decrece en $(e, +\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = e$.

b) Esta función es continua en su dominio $(0, +\infty)$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a 0^+ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{1}{x} \ln x = 2(+\infty)(-\infty) = -\infty$$

La función tiene la recta $x = 0$ como asíntota vertical.

Comprobamos si tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} = 2 \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{1}{x} = 2 \frac{1}{+\infty} = 0$$

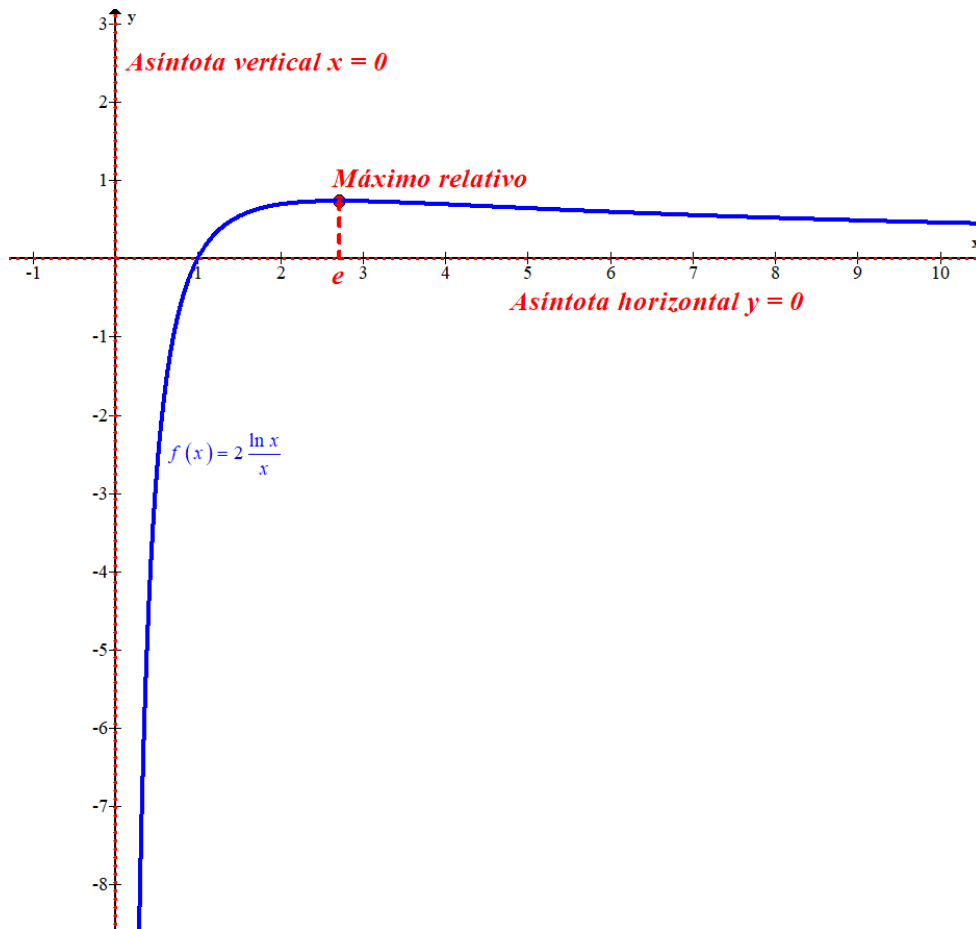
La función tiene la recta $y = 0$ como asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

La función no tiene asíntotas oblicuas.

- c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$ en $x=1$ es $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$\left. \begin{array}{l} y - f(1) = f'(1)(x-1) \\ f(1) = 2 \frac{\ln 1}{1} = 0 \\ f'(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 2 \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 2(x-1) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 2}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$ en $x=1$ es $y = 2x - 2$.



2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

donde k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k , y resuélvalo para $k = 0$. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para $k = -1$. [0,75 puntos]

c) Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema resulte incompatible. Justifique la respuesta. [0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6k - 3 - 3 - 0 - 12k = -6k - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -6k - 6 = 0 \Rightarrow -6k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{-6} = -1$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $k \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 3 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 3 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \\ -3 \quad 3 \quad 3 \quad -9 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 4 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 4 \quad 2 \quad -1 \quad 4 \\ -4 \quad 4 \quad 4 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \\ 0 \quad -6 \quad -3 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{4 \quad 2 \quad -1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $k \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** y para $k = -1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

Resolvemos el sistema para $k = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x = 3 + y \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4(3 + y) + 2y - z = 4 \\ 3(3 + y) + 3y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12 + 4y + 2y - z = 4 \\ 9 + 3y + 3y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y - z = -8 \\ 6y = -8 \rightarrow y = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 \frac{-4}{3} - z = -8 \Rightarrow -8 - z = -8 \Rightarrow \boxed{z = 0} \\ \boxed{x = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}} \end{array} \right.$$

Para $k = 0$ la solución del sistema es $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{-4}{3}$, $z = 0$.

b) Si $k = -1$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 2).

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ 6y + 3z = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ 3z = -8 - 6y \rightarrow z = \frac{-8}{3} - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 2y + \frac{8}{3} + 2y = 4 \Rightarrow 4x = 4 - \frac{8}{3} - 4y \Rightarrow 4x = \frac{4}{3} - 4y \Rightarrow x = \frac{1}{3} - y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{-8}{3} - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $x = \frac{1}{3} - \lambda$; $y = \lambda$; $z = \frac{-8}{3} - 2\lambda$; para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Para $k = -1$ el sistema queda
$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$
. Cambiamos el término independiente de la

tercera ecuación por “a” y utilizamos el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 3 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 3 \quad 3 \quad 0 \quad a \\ -3 \quad 3 \quad 3 \quad -9 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 3 \quad a-9 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

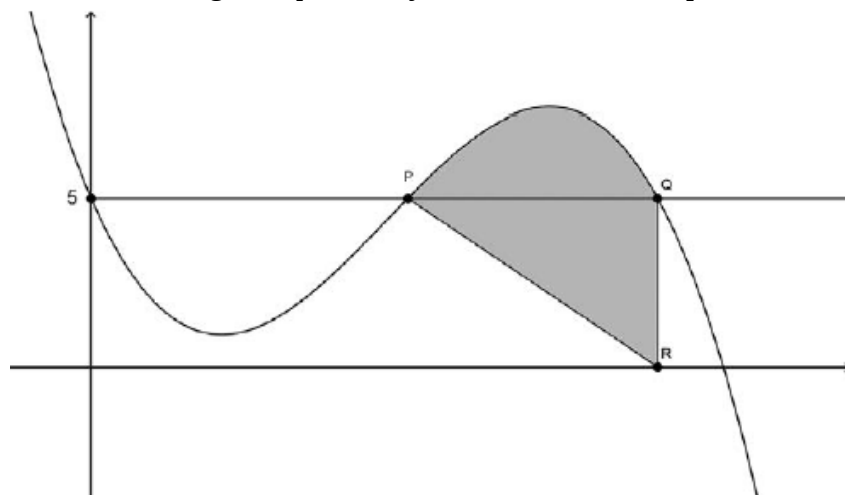
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 4 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 4 \quad 2 \quad -1 \quad 4 \\ -4 \quad 4 \quad 4 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 6 & 3 & a-9 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 6 \quad 3 \quad a-9 \\ 0 \quad -6 \quad -3 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad a-1 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{4 \quad 2 \quad -1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} \quad a-1 \end{pmatrix}$$

Para que sea un sistema incompatible “a” debe tomar cualquier valor distinto de 1, por ejemplo 2.

Un sistema incompatible sería
$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$$
.

3. Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

- a) A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P , Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR . [1,25 puntos]
b) Calcule la superficie del terreno. [1,25 puntos]

- a) La recta horizontal que corta el terreno tiene ecuación $y = 5$, por lo que los puntos P y Q tienen coordenadas $P(p, 5)$ y $Q(q, 5)$.
Los puntos P y Q son los puntos de corte de la recta $y = 5$ con la curva.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 \\ y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \Rightarrow -x^3 + 7x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-x^2 + 7x - 6) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A(0, 5) \\ -x^2 + 7x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-1)(-6)}}{2(-1)} = \\ = \frac{-7 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{-7+5}{-2} = 1 = x \rightarrow \boxed{P(1, 5)} \\ \frac{-7-5}{-2} = 6 = x \rightarrow \boxed{Q(6, 5)} \end{cases} \end{array} \right.$$

El punto P tiene coordenadas $P(1, 5)$ y el punto Q tiene coordenadas $Q(6, 5)$.

El punto R está en la misma vertical que el punto Q por lo que tiene coordenadas $R(6, 0)$.

Hallamos la ecuación de la recta PR .

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PR} = (6, 0) - (1, 5) = (5, -5) \rightarrow m = \frac{-5}{5} = -1 \\ R(6, 0) \in \text{recta } PR \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = -1(x - 6) \Rightarrow \boxed{y = -x + 6}$$

La ecuación de la recta PR es $y = -x + 6$.

- b) La superficie del terreno es el valor de la integral definida entre 1 y 6 de la diferencia entre la curva y la recta.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^6 -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 - (-x + 6) dx = \int_1^6 -x^3 + 7x^2 - 5x - 1 dx = \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - x \right]_1^6 = \left[-\frac{6^4}{4} + 7\frac{6^3}{3} - 5\frac{6^2}{2} - 6 \right] - \left[-\frac{1^4}{4} + 7\frac{1^3}{3} - 5\frac{1^2}{2} - 1 \right] = \\ &= -324 + 504 - 90 - 6 + \frac{1}{4} - \frac{7}{3} + \frac{5}{2} + 1 = \boxed{\frac{1025}{12} \simeq 85.4167 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El terreno tiene una superficie de $\frac{1025}{12} \simeq 85.4167 \text{ u}^2$.

4. Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa.



- a) A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una después de otra y sin reemplazo (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda).
- Calcule la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E. [0,5 puntos]
 - Calcule la probabilidad de que las dos bolas sean diferentes. [0,75 puntos]
- b) Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de otra, pero ahora con reemplazo (es decir, devolviendo a la bolsa cada bola extraída antes de sacar la siguiente).
- Calcule la probabilidad de que no haya sacado ninguna A. [0,5 puntos]
 - Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A. [0,75 puntos]

- a) Hay 9 bolas que puede extraerse en la primera extracción. De estas hay dos A y una E. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E es $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Las únicas bolas repetidas son la A y la S. Llamamos R al suceso “sacar dos bolas repetidas” = “sacar dos A o dos S”. Calculamos la probabilidad del suceso R.

$$P(R) = P(A1)P(A2/A1) + P(S1)P(S2/S1) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

El suceso “sacar dos bolas diferentes” es el suceso complementario del suceso R. Calculamos su probabilidad como la probabilidad de R^C .

$$P(R^C) = 1 - P(R) = 1 - \frac{1}{18} = \boxed{\frac{17}{18}}$$

La probabilidad de que las dos bolas sean diferentes tiene un valor de $\frac{17}{18} \approx 0.9444$.

- b) La probabilidad de sacar A en una extracción es $\frac{2}{9}$ y la de no sacar A es $\frac{7}{9}$. La probabilidad de no sacar ninguna A en 5 extracciones es:

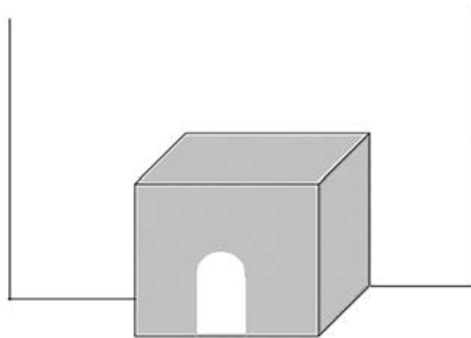
$$\begin{aligned} P(\text{Ninguna A}) &= P(A1^C \cap A2^C \cap A3^C \cap A4^C \cap A5^C) = \\ &= P(A1^C) \cdot P(A2^C) \cdot P(A3^C) \cdot P(A4^C) \cdot P(A5^C) = \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} = \left(\frac{7}{9}\right)^5 \approx 0.2846 \end{aligned}$$

El suceso complementario de B = “sacar al menos dos A en 5 extracciones” es B^C = “sacar 1 o ninguna A en 5 extracciones”. Calculamos la probabilidad de B^C .

$$\begin{aligned}
P(B^C) &= P(\text{sacar 0 veces } A) + P(\text{sacar 1 vez } A) = \\
&= P(\text{sacar 5 veces letra distinta de } A) + P(A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) + \\
&+ P(A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C) + P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5^C) + \\
&+ P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C) + P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5) = \\
&= \left(\frac{7}{9}\right)^5 + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} = \\
&= \left(\frac{7}{9}\right)^5 + 5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^4 \approx \boxed{0.6912}
\end{aligned}$$

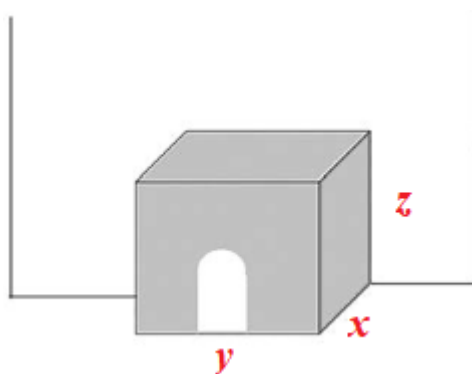
Aplicando la probabilidad del suceso complementario tenemos que la probabilidad de que haya sacado al menos dos A vale $1 - P(B^C) = 1 - 0.6912 = 0.3088$.

5. Se quiere construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hay que construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, se quiere que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 €.



- a) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función $C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, donde x es la profundidad del cobertizo en metros. [1,25 puntos]
- b) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste? [1,25 puntos]

a) Llamamos “ x ” a la profundidad, “ y ” a la anchura y “ z ” a la altura del cobertizo.



El cobertizo mide el triple de anchura que de profundidad $\rightarrow y = 3x$.

El cobertizo de madera tiene 6 m^3 de volumen $\rightarrow xyz = 6 \Rightarrow z = \frac{6}{xy} = \frac{6}{x \cdot 3x} = \frac{2}{x^2}$.

Calculamos la superficie de las tres paredes.

$$\text{Paredes} = 2xz + yz = 2x \frac{2}{x^2} + 3x \frac{2}{x^2} = \frac{4}{x} + \frac{6}{x} = \frac{10}{x}$$

Calculamos la superficie del techo.

$$\text{Techo} = xy = x3x = 3x^2$$

Calculamos el coste total sumando el coste de las paredes más el coste del techo.

Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado $\rightarrow C(x) = 30 \frac{10}{x} + 50 \cdot 3x^2 = \frac{300}{x} + 150x^2$.

Añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 € $\rightarrow C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$.

El coste del cobertizo en función de la profundidad del cobertizo (x) tiene la expresión

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35.$$

b) Derivamos la función coste y buscamos cuando se anula.

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35 \Rightarrow C'(x) = -\frac{300}{x^2} + 300x$$

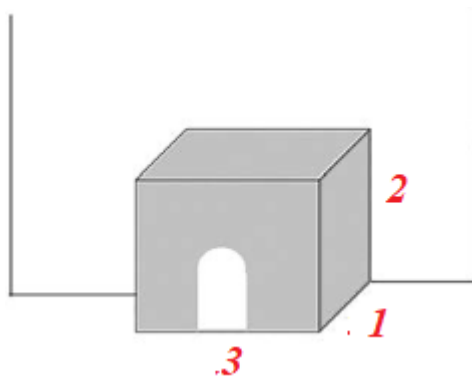
$$C'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{300}{x^2} + 300x = 0 \Rightarrow 300x = \frac{300}{x^2} \Rightarrow 300x^3 = 300 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{1} = 1}$$

Sustituimos $x = 1$ en la segunda derivada para averiguar si en dicho valor la función tiene un máximo o un mínimo.

$$C'(x) = -\frac{300}{x^2} + 300x \Rightarrow C''(x) = 2\frac{300}{x^3} + 300 \Rightarrow C''(1) = 2\frac{300}{1^3} + 300 = 900 > 0$$

Al tener la segunda derivada un valor positivo podemos afirmar que la función coste tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

Las medidas del cobertizo con coste mínimo son 1 metro de profundidad, 3 metros de anchura y $\frac{2}{1^2} = 2$ metros de altura.



Sustituimos $x = 1$ en la función coste y obtenemos el coste mínimo del cobertizo.

$$C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485$$

El coste mínimo tiene un valor de 485 euros.

6. Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-3, -2, 3)$.

a) Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B . Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$. [1 punto]

b) Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta. [0,75 puntos]

c) Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área. [0,75 puntos]

a) El plano π que es perpendicular a la recta AB tiene como vector normal el vector

$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (-4, -4, 0)$. Tomamos como vector normal del plano este vector dividido entre -4 .

Hallamos del punto P punto medio del segmento AB .

$$P = \frac{(1, 2, 3) + (-3, -2, 3)}{2} = (-1, 0, 3)$$

Hallamos la ecuación del plano π como la ecuación del plano que pasa por $P(-1, 0, 3)$ y tiene como vector normal el vector $\frac{1}{-4}\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB}}{-4} = (1, 1, 0) \\ P = (-1, 0, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x + y + D = 0 \\ P = (-1, 0, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y + 1 = 0}$$

El plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B tiene ecuación $\pi : x + y + 1 = 0$.

Comprobamos que los puntos del plano $P = (x, y, z)$ están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x, y, z) \in \pi \\ \pi : x + y + 1 = 0 \Rightarrow \pi : y = -1 - x \end{array} \right\} \Rightarrow P(x, -1 - x, z)$$

$$\overrightarrow{AP} = (x, -1 - x, z) - (1, 2, 3) = (x - 1, -3 - x, z - 3)$$

$$\overrightarrow{BP} = (x, -1 - x, z) - (-3, -2, 3) = (x + 3, 1 - x, z - 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} d(P, A) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-1)^2 + (-3-x)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (3+x)^2 + (z-3)^2} \\ d(P, B) = |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(x+3)^2 + (1-x)^2 + (z-3)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(P, A) = d(P, B)$$

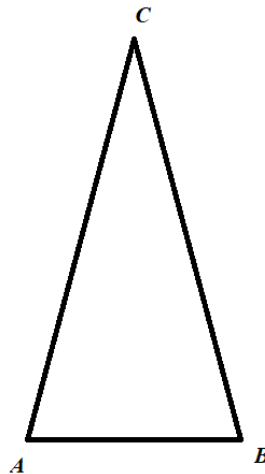
- b) Por lo visto en el apartado anterior todos los puntos del plano están a la misma distancia de los puntos A y B, por lo que el plano pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a la recta AB. Por ello la distancia de A y de B al plano es la misma. Comprobamos que $d(A, \pi) = d(B, \pi)$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + 1 = 0 \\ A(1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|1 + 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + 1 = 0 \\ B(-3, -2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(B, \pi) = \frac{|-3 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow d(A, \pi) = d(B, \pi) = 2\sqrt{2}$$

- c) Para que el triángulo ABC sea isósceles debe tener dos lados iguales y un tercero desigual.



Hallamos la longitud de los lados.

$$\overrightarrow{AC} = (-7, 6, 3) - (1, 2, 3) = (-8, 4, 0) \Rightarrow d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-7, 6, 3) - (-3, -2, 3) = (-4, 8, 0) \Rightarrow d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (-4, -4, 0) \Rightarrow d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

El triángulo ABC tiene dos lados iguales y uno desigual. El triángulo ABC es isósceles. Hallamos el área del triángulo ABC como la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-8, 4, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (-4, -4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 32k + 16k = 48k = (0, 0, 48)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

El triángulo ABC tiene un área de 24 unidades cuadradas.