



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la función $f(x) = -2 + 10(x-1)\ln x$, definida para $x > 0$.

- Compruebe que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $[1, 1,5]$ y busque un intervalo de una décima de longitud que también contenga esta misma raíz. [0,75 puntos]
- Sin calcular los puntos críticos, justifique que $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. ¿Qué máximos y mínimos tiene esta función? [1 punto]
- Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, y haga un esbozo de la gráfica de esta función. [0,75 puntos]

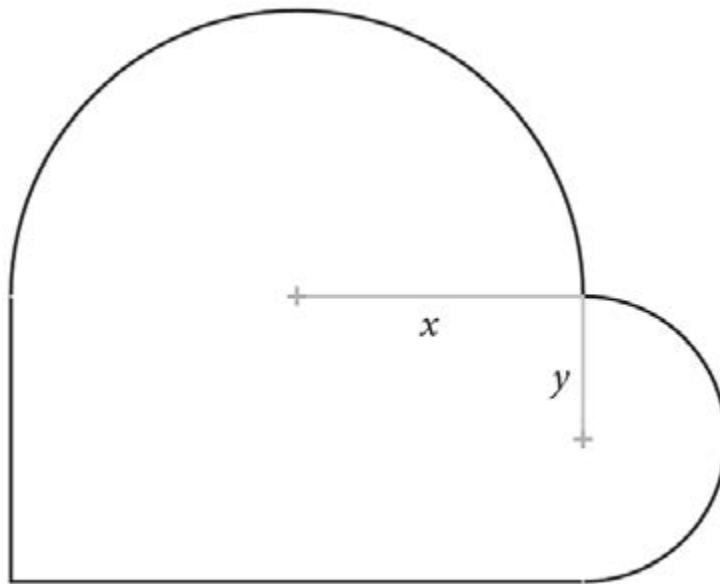
2. Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Decida si la matriz P es invertible y, en caso de serlo, calcule su inversa. Explique detalladamente el procedimiento seguido. [1,25 puntos]
- Calcule una matriz X de 3 filas y 3 columnas que cumpla $PX + Q = 2R$. [1,25 puntos]

3. Considere las parábolas $y = f_a(x)$, con $f_a(x) = ax^2 + 2x + 5 - a$, donde a es un parámetro real.

- Determine el valor del parámetro a para el que la recta tangente a $y = f_a(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ pasa por el punto $(2, 13)$. [1 punto]
- Calcule los puntos de corte de las parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$. [0,5 puntos]
- Calcule el área de la región situada entre las dos parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$. [1 punto]

4. Rut usa el siguiente método para hacer los problemas de matemáticas: tira un dado equilibrado y, si el resultado es como máximo 4, piensa y resuelve el problema ella misma; si el resultado es 5 o 6, busca la solución del problema por Internet y la copia. Cuando es ella quien ha pensado la solución, la respuesta es correcta en el 75 % de los casos; cuando copia la solución de Internet, la respuesta es correcta solamente en el 40 % de los casos.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la solución de un problema respondido siguiendo este método sea correcta? [0,75 puntos]
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un problema haya sido resuelto por Rut si se sabe que la solución es correcta? [0,75 puntos]
- c) Mañana Rut tiene que entregar 5 problemas de matemáticas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 sean correctos? [1 punto]
5. Carles quiere construir un decorado para la obra de teatro de final de curso en forma de un rectángulo y dos semicírculos, tal como se muestra en la siguiente figura:



- a) Determine el perímetro y el área del decorado a construir en función de x y de y . [1 punto]
- b) Para revestir el perímetro del decorado, Carles tiene material para cubrir hasta 10 m. Si lo quiere gastar todo, ¿cuáles serán las medidas del decorado de área máxima que podrá construir? ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]
6. Considere las rectas $r: \frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases}$.
- a) ¿Cuál es su posición relativa? Calcule la ecuación implícita de un plano π que sea paralelo a las dos rectas y que pase por el origen de coordenadas. [1,25 puntos]
- b) Calcule la ecuación de la recta t que corta las dos rectas r y s perpendicularmente. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función $f(x) = -2 + 10(x-1)\ln x$ definida para $x > 0$.
- a) Compruebe que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $[1, 1.5]$ y busque un intervalo de una décima de longitud que también contenga esta misma raíz. [0,75 puntos]
- b) Sin calcular los puntos críticos, justifique que $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. ¿Qué máximos y mínimos tiene esta función? [1 punto]
- c) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, y haga un esbozo de la gráfica de esta función. [0,75 puntos]

- a) La función es continua en el intervalo $[1, 1.5]$. La función toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo:

$$f(1) = -2 + 10(1-1)\ln 1 = -2 \quad f(1.5) = -2 + 10(1.5-1)\ln 1.5 = 0.02 > 0.$$

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (1, 1.5)$ tal que $f(c) = 0$.

Para reducir la amplitud del intervalo vamos probando el signo de la función en 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

$$f(1.1) = -2 + 10(1.1-1)\ln 1.1 = -1.904 < 0 \rightarrow \text{¡No nos sirve!}$$

$$f(1.4) = -2 + 10(1.4-1)\ln 1.4 = -0.65 < 0 \rightarrow \text{¡Nos sirve!}$$

Si consideramos el intervalo $[1.4, 1.5]$ la función toma signo negativo en $x = 1.4$ y signo positivo en $x = 1.5$, por lo que podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (1.4, 1.5)$ tal que $f(c) = 0$

- b) Calculamos la derivada de la función.

$$f'(x) = 10\ln x + 10(x-1)\frac{1}{x} = 10\left(\ln x + \frac{x-1}{x}\right) = 10\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Si } x \in (0, 1) \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln x < 0 \\ \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 10\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right) < 0.$$

$$\text{Si } x \in (1, +\infty) \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln x > 0 \\ \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 10\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x}\right) > 0.$$

La función es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.

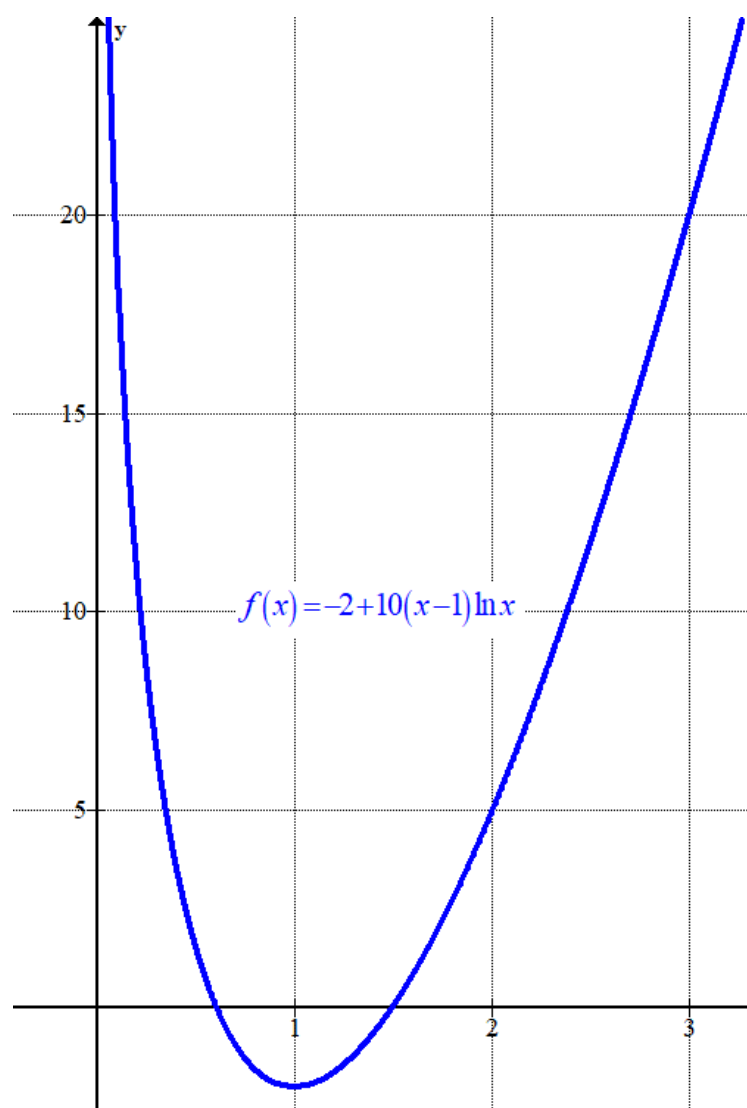
Como el signo de la derivada no cambia en ningún otro momento la función solo tiene un mínimo relativo en $x = 1$. La función no tiene máximo relativo.

- c) Calculamos los límites pedidos.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 + 10(x-1)\ln x = -2 + 10(0-1)\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -2 - 10(-\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + 10(x-1)\ln x = -2 + 10(+\infty-1)\ln(+\infty) = -2 + \infty = \boxed{+\infty}$$

Representamos la gráfica de la función.



2. Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Decida si la matriz P es invertible y, en caso de serlo, calcule su inversa. Explique detalladamente el procedimiento seguido. [1,25 puntos]
 b) Calcule una matriz X de 3 filas y 3 columnas que cumpla $PX + Q = 2R$. [1,25 puntos]

a) Para que la matriz sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 0 + 1 - 2 - 0 = 1 \neq 0$$

Existe la matriz inversa de P . La calculamos.

$$P^{-1} = \frac{\text{Adj}(P^T)}{|P|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$PX + Q = 2R \Rightarrow PX = 2R - Q \Rightarrow X = P^{-1}(2R - Q)$$

Sustituimos las matrices y realizamos las operaciones para obtener la matriz X .

$$2R - Q = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = P^{-1}(2R - Q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2+2 & 4 \\ -8 & -4-4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Considere las parábolas $y = f_a(x)$, con $f_a(x) = ax^2 + 2x + 5 - a$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor del parámetro a para el que la recta tangente a $y = f_a(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ pasa por el punto $(2, 13)$. [1 punto]

b) Calcule los puntos de corte de las parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$. [0,5 puntos]

c) Calcule el área de la región situada entre las dos parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$. [1 punto]

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f_a(x) = ax^2 + 2x + 5 - a$ en $x = 1$ es $y - f_a(1) = f'_a(1)(x - 1)$.

$$\left. \begin{aligned} f_a(1) &= a \cdot 1^2 + 2 + 5 - a = 7 \\ f'_a(x) &= 2ax + 2 \rightarrow f'_a(1) = 2a + 2 \\ y - f_a(1) &= f'_a(1)(x - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 7 = (2a + 2)(x - 1)$$

Aplicamos que la recta tangente pasa por el punto $(2, 13)$.

$$\left. \begin{aligned} y - 7 &= (2a + 2)(x - 1) \\ \text{Pasa por } (2, 13) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 13 - 7 = (2a + 2)(2 - 1) \Rightarrow 6 = 2a + 2 \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Para $a = 2$ se cumple lo pedido.

b) Obtenemos los puntos de corte de las parábolas.

$$\left. \begin{aligned} y &= f_1(x) = x^2 + 2x + 5 - 1 = x^2 + 2x + 4 \\ y &= f_3(x) = 3x^2 + 2x + 5 - 3 = 3x^2 + 2x + 2 \\ f_3(x) &= f_1(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_1(1) &= 1^2 + 2 + 4 = 7 \rightarrow \boxed{A(1, 7)} \\ f_1(-1) &= (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3 \rightarrow \boxed{B(-1, 3)} \end{aligned} \right.$$

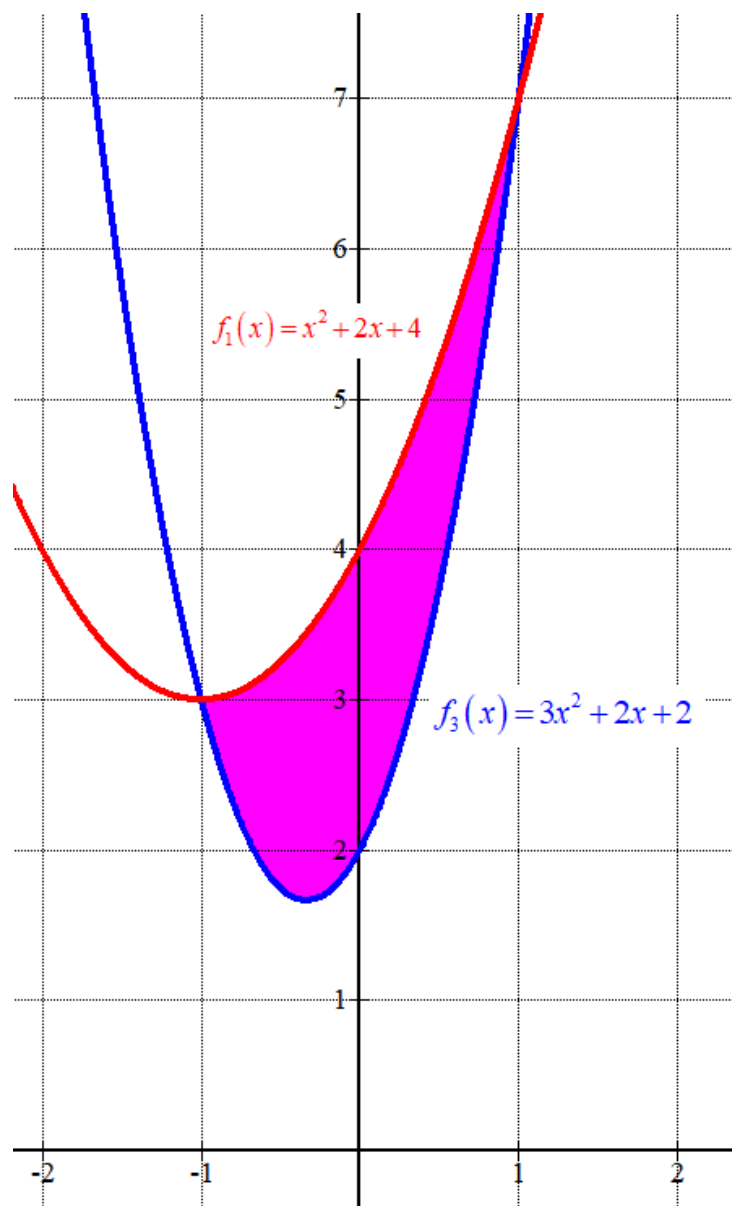
Los puntos de corte de ambas gráficas son $A(1, 7)$ y $B(-1, 3)$.

c) El área de la región situada entre las dos parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$ es el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + 2x + 4 \\ f_3(x) &= 3x^2 + 2x + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{-1}^1 3x^2 + 2x + 2 - (x^2 + 2x + 4) dx = \int_{-1}^1 2x^2 - 2 dx =$$

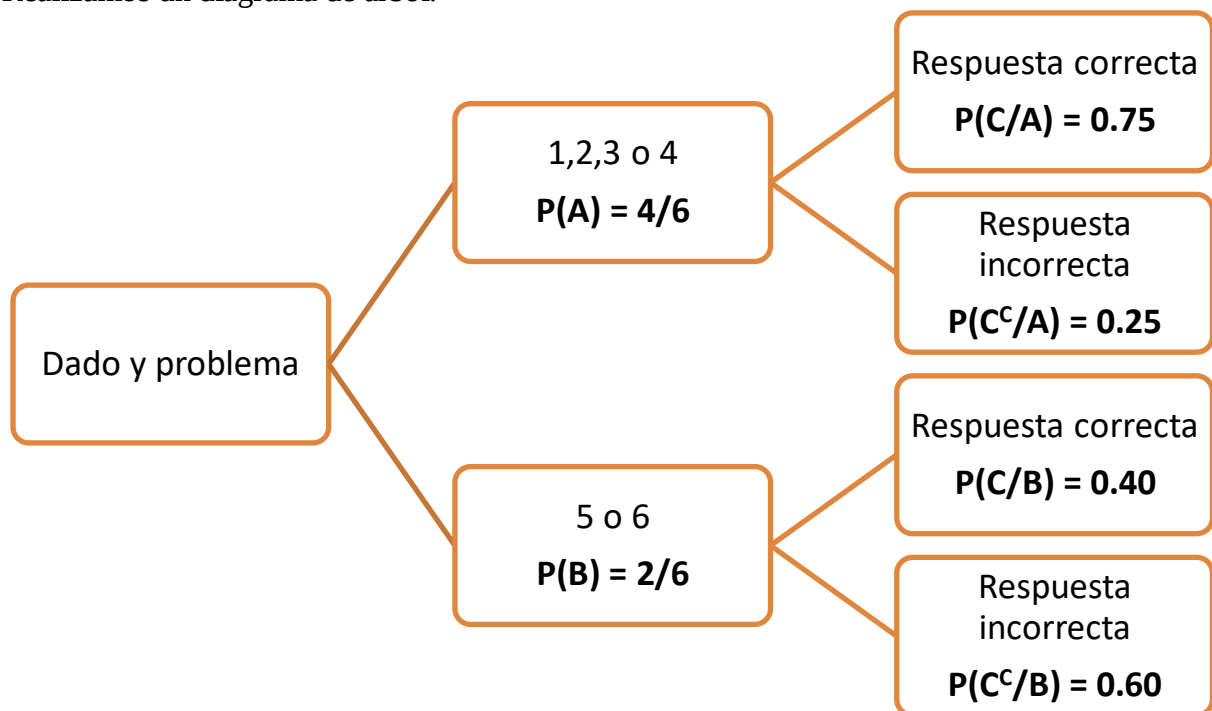
$$= \left[2 \frac{x^3}{3} - 2x \right]_{-1}^1 = \left[2 \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 \right] - \left[2 \frac{(-1)^3}{3} - 2(-1) \right] = \frac{2}{3} - 2 + \frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$$

El área de la región situada entre las dos parábolas $y = f_1(x)$ e $y = f_3(x)$ tiene un valor de $\frac{8}{3} \approx 2.667$ unidades cuadradas.



4. Rut usa el siguiente método para hacer los problemas de matemáticas: tira un dado equilibrado y, si el resultado es como máximo 4, piensa y resuelve el problema ella misma; si el resultado es 5 o 6, busca la solución del problema por Internet y la copia. Cuando es ella quien ha pensado la solución, la respuesta es correcta en el 75 % de los casos; cuando copia la solución de Internet, la respuesta es correcta solamente en el 40 % de los casos.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la solución de un problema respondido siguiendo este método sea correcta? [0,75 puntos]
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un problema haya sido resuelto por Rut si se sabe que la solución es correcta? [0,75 puntos]
- c) Mañana Rut tiene que entregar 5 problemas de matemáticas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 sean correctos? [1 punto]

Realizamos un diagrama de árbol.



Respondemos a las preguntas planteadas.

- a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P(B)P(C/B) = \frac{4}{6} \cdot 0.75 + \frac{2}{6} \cdot 0.4 = \frac{19}{30} \approx 0.633$$

- b) Nos piden calcular $P(A/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C/A)}{P(C)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot 0.75}{\frac{19}{30}} = \frac{15}{19} \approx 0.7895$$

- c) La probabilidad de que al menos 4 sean correctos es la de que sean 4 correctos y 1 incorrecto o bien los 5 correctos. Llamamos D al suceso "Al menos 4 de los 5 ejercicios son correctos".

$$\begin{aligned}
P(D) &= P(C1^c \cap C2 \cap C3 \cap C4 \cap C5) + P(C1 \cap C2^c \cap C3 \cap C4 \cap C5) + \\
&+ P(C1 \cap C2 \cap C3^c \cap C4 \cap C5) + P(C1 \cap C2 \cap C3 \cap C4^c \cap C5) + \\
&+ P(C1 \cap C2 \cap C3 \cap C4 \cap C5^c) + P(C1 \cap C2 \cap C3 \cap C4 \cap C5) = \\
&= 5 \cdot \frac{11}{30} \cdot \frac{19}{30} \cdot \frac{19}{30} \cdot \frac{19}{30} \cdot \frac{19}{30} + \frac{19}{30} \cdot \frac{19}{30} \cdot \frac{19}{30} \cdot \frac{19}{30} \cdot \frac{19}{30} \approx \boxed{0.3969}
\end{aligned}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

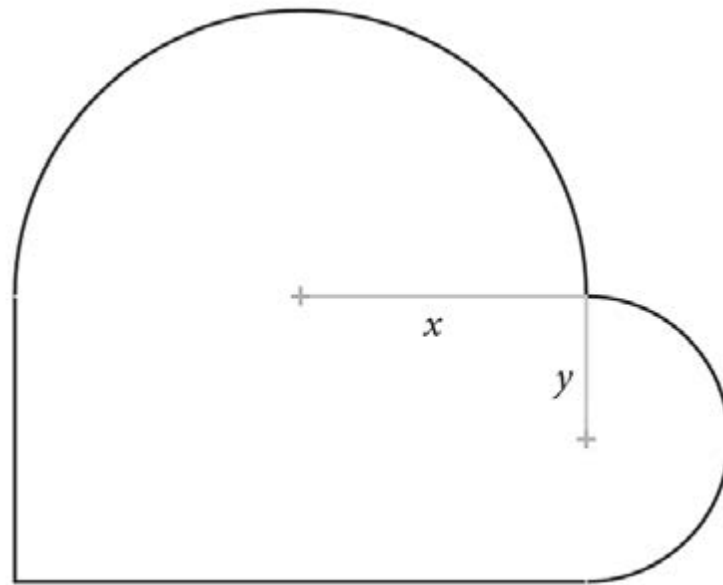
Sea X la variable que cuenta el número de ejercicios resueltos correctamente de un grupo de 5. La probabilidad de éxito (ejercicio correcto) es $19/30$. El número de repeticiones es 5.

La variable X es una variable binomial. $X = B\left(5, \frac{19}{30}\right)$.

Nos piden calcular $P(X \geq 4)$.

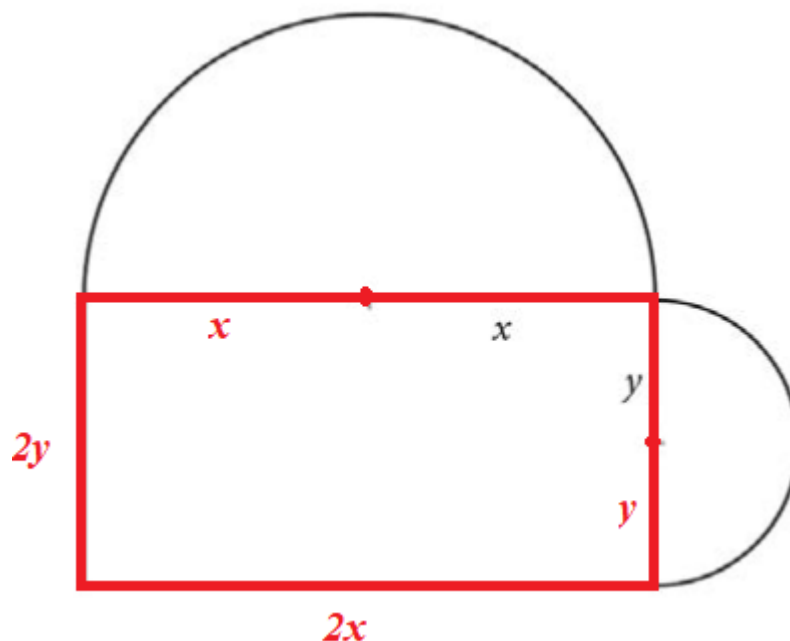
$$\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} \left(\frac{19}{30}\right)^4 \left(\frac{11}{30}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{19}{30}\right)^5 \left(\frac{11}{30}\right)^0 = \\
&= \frac{5!}{4! \cdot 1!} \left(\frac{19}{30}\right)^4 \left(\frac{11}{30}\right) + \left(\frac{19}{30}\right)^5 = 5 \left(\frac{19}{30}\right)^4 \left(\frac{11}{30}\right) + \left(\frac{19}{30}\right)^5 = \frac{5 \cdot 19^4 \cdot 11 + 19^5}{30^5} \approx 0.396
\end{aligned}$$

5. Carles quiere construir un decorado para la obra de teatro de final de curso en forma de un rectángulo y dos semicírculos, tal como se muestra en la siguiente figura:



- a) Determine el perímetro y el área del decorado a construir en función de x y de y . [1 punto]
 b) Para revestir el perímetro del decorado, Carles tiene material para cubrir hasta 10 m. Si lo quiere gastar todo, ¿cuáles serán las medidas del decorado de área máxima que podrá construir? ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]

Completamos la información del dibujo.



- a) El perímetro total es la suma de los lados del rectángulo ($2x + 2y$), la de la semicircunferencia pequeña (πy) y la de la semicircunferencia grande (πx).

$$P(x, y) = 2x + 2y + \pi y + \pi x = (2 + \pi)(x + y)$$

El área es la suma del área del rectángulo ($2x \cdot 2y = 4xy$), el área del semicírculo pequeño ($\frac{\pi y^2}{2}$) y el área del semicírculo grande ($\frac{\pi x^2}{2}$).

$$A(x, y) = 4xy + \frac{\pi y^2}{2} + \frac{\pi x^2}{2} = 4xy + \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)$$

b) Carles tiene material para cubrir hasta 10 m. Si lo quiere gastar todo $\rightarrow P(x, y) = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x, y) = 10 \\ P(x, y) = (2 + \pi)(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow (2 + \pi)(x + y) = 10 \Rightarrow x + y = \frac{10}{2 + \pi} \Rightarrow y = \frac{10}{2 + \pi} - x$$

Obtenemos la función Área añadiéndole esta nueva condición.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = 4xy + \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2) \\ y = \frac{10}{2 + \pi} - x \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = 4x \left(\frac{10}{2 + \pi} - x \right) + \frac{\pi}{2} \left(x^2 + \left(\frac{10}{2 + \pi} - x \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{40}{2 + \pi} x - 4x^2 + \frac{\pi}{2} \left(x^2 + \frac{100}{(2 + \pi)^2} + x^2 - \frac{20}{2 + \pi} x \right) =$$

$$= \frac{40}{2 + \pi} x - 4x^2 + \frac{\pi}{2} \left(2x^2 + \frac{100}{(2 + \pi)^2} - \frac{20}{2 + \pi} x \right) =$$

$$= \frac{40}{2 + \pi} x - 4x^2 + \pi x^2 + \frac{50\pi}{(2 + \pi)^2} - \frac{10\pi}{2 + \pi} x = (\pi - 4)x^2 + \frac{40 - 10\pi}{2 + \pi} x + \frac{50\pi}{(2 + \pi)^2}$$

Calculamos la derivada de la función Área y buscamos cuando se anula.

$$A(x) = (\pi - 4)x^2 + \frac{40 - 10\pi}{2 + \pi} x + \frac{50\pi}{(2 + \pi)^2} \Rightarrow A'(x) = 2(\pi - 4)x + \frac{40 - 10\pi}{2 + \pi}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 2(\pi - 4)x + \frac{40 - 10\pi}{2 + \pi} = 0 \Rightarrow 2(\pi - 4)x = \frac{10\pi - 40}{2 + \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{10\pi - 40}{2 + \pi}}{2(\pi - 4)} = \frac{10\pi - 40}{2(\pi - 4)(2 + \pi)} = \frac{10(\cancel{\pi - 4})}{2(\cancel{\pi - 4})(2 + \pi)} = \boxed{\frac{5}{2 + \pi} \approx 0.972}$$

Este valor del punto crítico lo sustituimos en la segunda derivada.

$$A''(x) = 2(\pi - 4) \Rightarrow A''(0.972) = 2(\pi - 4) \approx -1.7 < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función área es máxima para $x = \frac{5}{2 + \pi} \approx 0.972$.

Obtenemos el valor de “y”.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{2+\pi} - x \\ x = \frac{5}{2+\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{10}{2+\pi} - \frac{5}{2+\pi} = \frac{5}{2+\pi} \simeq 0.972$$

Calculamos el valor del área máxima.

$$\begin{aligned} A\left(\frac{5}{2+\pi}\right) &= (\pi-4)\left(\frac{5}{2+\pi}\right)^2 + \frac{40-10\pi}{2+\pi}\left(\frac{5}{2+\pi}\right) + \frac{50\pi}{(2+\pi)^2} = \\ &= \frac{25\pi-100}{(2+\pi)^2} + \frac{200-50\pi}{(2+\pi)^2} + \frac{50\pi}{(2+\pi)^2} = \frac{100+25\pi}{(2+\pi)^2} \simeq 6.75 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Las medidas para obtener un área máxima son $x = y = \frac{5}{2+\pi} \simeq 0.972$ metros.

El área máxima tiene un valor aproximado de 6.75 metros cuadrados.

6. Considere las rectas $r: \frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases}$.

- a) ¿Cuál es su posición relativa? Calcule la ecuación implícita de un plano π que sea paralelo a las dos rectas y que pase por el origen de coordenadas. [1,25 puntos]
 b) Calcule la ecuación de la recta t que corta las dos rectas r y s perpendicularmente. [1,25 puntos]

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(5, 4, 3) \\ \vec{u}_r = (4, 3, -1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(4, 3, -1) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 0) \end{cases}$$

Los vectores directores $\vec{u}_r = (4, 3, -1)$ y $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$ no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{2} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

Hallamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (4, 3, -1) - (5, 4, 3) = (-1, -1, -4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 0) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, -1, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 0 + 2 - 1 + 24 - 0 = 9 \neq 0$$

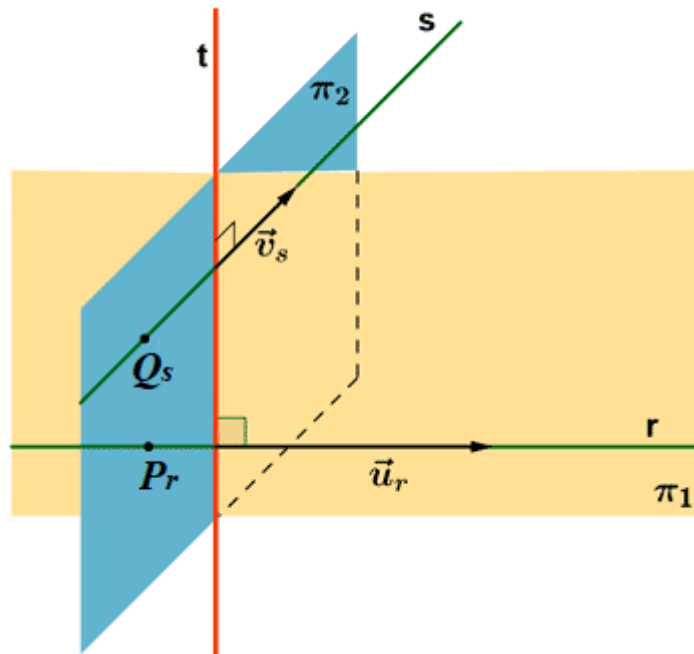
Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).

El plano π que sea paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas. Además, pasa por el punto $(0, 0, 0)$. Hallamos la ecuación implícita de este plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (4, 3, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (2, 1, 0) \\ O = (0, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2y + 4z - 6z + x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - 2y - 2z = 0}$$

El plano π que es paralelo a las dos rectas y que pasa por el origen de coordenadas tiene la ecuación implícita siguiente: $\pi : x - 2y - 2z = 0$.

- b) La recta t que corta las dos rectas r y s perpendicularmente es la recta del dibujo.



Hallamos un vector director de la recta t que será el producto vectorial $\vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s$.

$$\vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + 4k - 6k + i = i - 2j - 2k = (1, -2, -2)$$

Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y tiene como uno de sus vectores directores $\vec{w}_t = (1, -2, -2)$. Los vectores directores del plano son $\vec{w}_t = (1, -2, -2)$ y $\vec{u}_r = (4, 3, -1)$, y pasa por el punto $P_r(5, 4, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (1, -2, -2) \\ \vec{v} = \vec{u}_r = (4, 3, -1) \\ P_r(5, 4, 3) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-5) - 8(y-4) + 3(z-3) + 8(z-3) + y - 4 + 6(x-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(x-5) - 7(y-4) + 11(z-3) = 0 \Rightarrow 8x - 40 - 7y + 28 + 11z - 33 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 : 8x - 7y + 11z - 45 = 0}$$

Hallamos la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta s y tiene como vector director $\vec{w}_t = (1, -2, -2)$. Los vectores directores del plano son $\vec{w}_t = (1, -2, -2)$ y $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$, y pasa por el punto $Q_s(4, 3, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (1, -2, -2) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (2, 1, 0) \\ Q_s(4, 3, -1) \in \pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(y-3) + z+1 + 4(z+1) + 2(x-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y + 12 + z + 1 + 4z + 4 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_2: 2x - 4y + 5z + 9 = 0}$$

La recta t es la intersección de ambos planos, por lo que su ecuación es:

$$t: \begin{cases} 8x - 7y + 11z - 45 = 0 \\ 2x - 4y + 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Hallamos un punto A de la recta r y un punto B de la recta s tal que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a ambas rectas. Este vector tiene que tener producto escalar nulo con los vectores directores de las rectas.

$$r: \frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(5, 4, 3) \\ \vec{u}_r = (4, 3, -1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 5 + 4\alpha \\ y = 4 + 3\alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \Rightarrow A(5 + 4\alpha, 4 + 3\alpha, 3 - \alpha)$$

$$s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(4, 3, -1) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow B(4 + 2k, 3 + k, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4 + 2k, 3 + k, -1) - (5 + 4\alpha, 4 + 3\alpha, 3 - \alpha) = (-1 + 2k - 4\alpha, -1 + k - 3\alpha, -4 + \alpha)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow (-1 + 2k - 4\alpha, -1 + k - 3\alpha, -4 + \alpha) \cdot (4, 3, -1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 + 8k - 16\alpha - 3 + 3k - 9\alpha + 4 - \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{11k - 26\alpha = 3}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (-1 + 2k - 4\alpha, -1 + k - 3\alpha, -4 + \alpha) \cdot (2, 1, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + 4k - 8\alpha - 1 + k - 3\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{5k - 11\alpha = 3}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 11k - 26\alpha = 3 \\ 5k - 11\alpha = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \times(-5) \rightarrow -55k + 130\alpha = -15 \\ \times(11) \rightarrow 55k - 121\alpha = 33 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{9\alpha = 18} \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5k - 22 = 3 \Rightarrow 5k = 25 \Rightarrow k = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ A(5 + 4\alpha, 4 + 3\alpha, 3 - \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow A(13, 10, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} k = 5 \\ B(4 + 2k, 3 + k, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow B(14, 8, -1)$$

La recta t buscada es la recta que pasa por los puntos A y B.

$$\left. \begin{array}{l} A(13, 10, 1) \in t \\ B(14, 8, -1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(13, 10, 1) \in t \\ \overrightarrow{w_t} = \overrightarrow{AB} = (14, 8, -1) - (13, 10, 1) = (1, -2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: \begin{cases} x = 13 + \lambda \\ y = 10 - 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta t es la intersección de ambos planos, por lo que su ecuación es:

$$t: \begin{cases} x = 13 + \lambda \\ y = 10 - 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$