

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álgebra:

Despeixe X na ecuación matricial $B(X - I) = A$, onde I é a matriz identidade e A e B son matrices cadradas, con B invertible. Logo, calcule X se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:
$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Enuncie o teorema de Bolzano.

b) Obteña os valores de a , b e c que fan que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpra $f(0) = 1$ e teña extremos relativos en $x = \pm 1$. Dicar logo se os extremos son máximos ou mínimos.

4. Análise:

a) Enuncie o teorema de Rolle.

b) Calcule a área da rexión encerrada polas gráficas de $f(x) = x + 6$ e $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0, \\ x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita do plano π con ecuacións paramétricas $\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

b) Calcule o valor de m para que os seguintes puntos sexan coplanares: $A(0, m, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 4, 3)$ e $D(2, 0, 2)$. Obteña a ecuación implícita do plano π que os contén.

6. Xeometría:

Calcule o punto simétrico de $P(1, 1, 2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

7. Estatística e Probabilidade:

Nunha determinada cidade, o 8% da poboación practica ioga, o 20% ten mascota e o 3% practica ioga e ten mascota. Se nesa cidade se elixe unha persoa ao azar, calcule:

a) A probabilidade de que non practique ioga e á vez teña mascota.

b) A probabilidade de que teña mascota sabendo que practica ioga.

8. Estatística e Probabilidade:

O grosor das pranchas de aceiro que se producen nunha certa fábrica segue unha distribución normal de media 8 mm e desviación típica 0.5 mm. Calcule a probabilidade de que unha prancha elixida ao azar teña un grosor comprendido entre 7.6 mm e 8.2 mm.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:

Despeje X en la ecuación matricial $B(X - I) = A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a , b y c que hacen que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

4. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas $\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0, m, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 4, 3)$ y $D(2, 0, 2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de $P(1, 1, 2)$ con respecto al plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

7. Estadística y Probabilidad:

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.

b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

8. Estadística y Probabilidad:

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

MATEMÁTICAS II

1.

$$B(X - I) = A \Leftrightarrow X - I = B^{-1}A \Leftrightarrow X = I + B^{-1}A.$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$X = I + B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & m & 1 & 1-m \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ my = 1 - 2m, \\ z = m. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = m, \quad y = \frac{1-2m}{m}, \quad x = \frac{2m-y-z}{m}.$$

- Se $m = 0$, o sistema é incompatible, porque a segunda ecuación queda $0 = 1$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m - 1 = -m$ e $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - m - 1 = 1 - m$ non se anulan á vez, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2m^2 + 2m + m + m^2 + m - m^2 - m - 2m - m^2 - m = m^2 = 0 \\ \Leftrightarrow m = 0.$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.^\circ$ de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado.

- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

Teorema de Bolzano:

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

3.b) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$, $f(0) = 1$, e f ten extremos relativos en $x = \pm 1$.

•

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{c = 1}.$$

•

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx - 3, \\ f'(-1) &= 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - 3 = 0, \\ f'(1) &= 0 \Leftrightarrow 3a + 2b - 3 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3a - 2b - 3 = 0 \\ 3a + 2b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a = 1},$$

$$3 + 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b = 0}.$$

•

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x.$$

$$[f'(-1) = 0, \quad f''(-1) = -6 < 0] \Rightarrow \mathbf{m\acute{a}ximo en } x = -1,$$

$$[f'(1) = 0, \quad f''(1) = 6 > 0] \Rightarrow \mathbf{m\acute{i}nimo en } x = 1.$$

MATEMÁTICAS II

4.

4.a)

Teorema de Rolle:

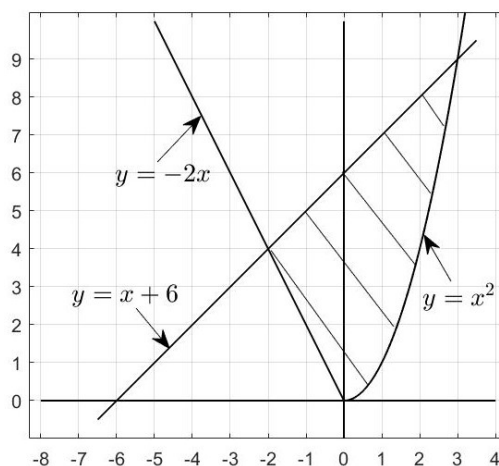
Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e $f(a) = f(b)$, entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

4.b)

- $x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x \in \{-2, 3\}.$

Só nos interesa $x = 3$.

- $-2x = x + 6 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2.$



$$A = \left[\begin{array}{l} \text{área dun triángulo} \\ \text{de base 6 e altura 2} \end{array} \right] + \int_0^3 (x + 6 - x^2) dx.$$

$$\int_0^3 (-x^2 + x + 6) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^3 = -9 + \frac{9}{2} + 18 = \frac{-18 + 9 + 36}{2} = \frac{27}{2}.$$

$$A = 6 + \frac{27}{2} = \frac{12 + 27}{2} = \frac{39}{2} = 19.5.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Ecuación implícita de π : $\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

π pasa por $P(1,2,1)$ e está xerado por $\vec{u}(-1,0,1)$ e $\vec{v}(0,1,2)$. Logo π : $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -z + 1 - x + 1 + 2y - 4 = -x + 2y - z - 2.$$

$$\pi: -x + 2y - z - 2 = 0.$$

5.b) Valor de m para que $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ e $D(2,0,2)$ sexan coplanarios. Ecuación implícita do plano π que os contén.

$\vec{BC}(1,2,1)$ e $\vec{BD}(2,-2,0)$ son linealmente independentes, polo que os puntos B, C e D determinan

o plano que pasa por B e está xerado por $\vec{BC}$ e $\vec{BD}$. Logo π : $\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2y - 4 - 2z + 4 - 4z + 8 - 2x = 2x + 2y - 6z + 8,$$

de onde $\pi: x + y - 3z + 4 = 0$. Finalmente, $A \in \pi \Leftrightarrow m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

5.b) SOLUCIÓN ALTERNATIVA: $\vec{BA}(0, m-2, -2), \vec{BC}(1,2,1), \vec{BD}(2,-2,0)$. Ao ser $\vec{BC}$ e $\vec{BD}$ linealmente independentes, a condición para ser coplanarios é $\text{rank } M = 2$, sendo $M = (\vec{BA} | \vec{BC} | \vec{BD})$.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } M \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } M = 2 \Leftrightarrow \det M = 0]$.

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 2m - 4 + 8 = 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4.$$

Por último, habería que calcular a ecuación que contén aos catro puntos, por exemplo como se fixo arriba.

MATEMÁTICAS II

6. Punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(1,1,2)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(2, -1, 1), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 1 - \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$2(1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + 2 + \lambda + 3 = 2 + 4\lambda - 1 + \lambda + 5 + \lambda = 6\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Logo o punto de corte é $Q(1 - 2, 1 + 1, 2 - 1) = Q(-1, 2, 1)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

$$\frac{1 + x'}{2} = -1 \Leftrightarrow 1 + x' = -2 \Leftrightarrow x' = -3,$$

$$\frac{1 + y'}{2} = 2 \Leftrightarrow 1 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 3,$$

$$\frac{2 + z'}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 + z' = 2 \Leftrightarrow z' = 0.$$

Tense logo **$P'(-3, 3, 0)$** .

MATEMÁTICAS II

7. I = “practicar ioga”, M = “ter mascota”.

$$P(I) = 0.08, \quad P(M) = 0.20, \quad P(I \cap M) = 0.03.$$

	M	$\bar{M}$	
I	$100 \cdot 0.03 = 3$		$100 \cdot 0.08 = 8$
$\bar{I}$	17		
	$100 \cdot 0.20 = 20$		100

7.a) Pola táboa de continxencia:

$$P(\bar{I} \cap M) = \frac{17}{100} = 0.17.$$

7.a) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$P(M) = P(I \cap M) + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow 0.20 = 0.03 + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow P(\bar{I} \cap M) = 0.17.$$

7.b) Pola táboa de continxencia:

$$P(M|I) = \frac{3}{8} = 0.375.$$

7.b) SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$P(M|I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0.03}{0.08} = 0.375.$$

MATEMÁTICAS II

8. X = “grosor en mm dunha prancha de aceiro”.

$$X \rightarrow N(8,0.5) \Rightarrow Z = \frac{X - 8}{0.5} \rightarrow N(0,1).$$

$$\begin{aligned} P(7.6 \leq X \leq 8.2) &= P\left(-\frac{0.4}{0.5} \leq Z \leq \frac{0.2}{0.5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.8) \\ &= P(Z \leq 0.4) - P(Z \geq 0.8) = P(Z \leq 0.4) - \{1 - P(Z \leq 0.8)\} = P(Z \leq 0.4) + P(Z \leq 0.8) - 1 = \\ &0.6554 + 0.7881 - 1 = \mathbf{0.4435}. \end{aligned}$$