

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álgebra:

Sexa $A = (a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 2, \\ (-1)^j(i-1) & \text{se } i \neq 2. \end{cases}$ Explique se A e $A + I$ son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota: a_{ij} é o elemento de A que está na fila i e na columna j , e I é a matriz identidade.)

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$$

3. Análise:

De entre tódolos rectángulos situados no primeiro cuadrante que teñen dous lados sobre os eixes de coordenadas e un vértice sobre a recta $x + 2y = 4$, determine os vértices do que ten maior área.

4. Análise:

Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$ calcule a área da rexión encerrada pola gráfica de f e as rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Xeometría:

- Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa polos puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$.
- Calcule o punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Xeometría:

- Ache o valor de a se o plano $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.
- Estude a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función do parámetro m .

7. Estatística e Probabilidade:

- Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcule $P(A)$ sabendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.
- Diga se os sucesos A e B son ou non independentes, se se sabe que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$.

8. Estatística e Probabilidade:

O portador dunha certa enfermidade ten un 10% de probabilidades de contaxiala a quen non estivo exposto a ela. Se entra en contacto con 8 persoas que non estiveron expostas, calcule:

- A probabilidade de que contaxie a un máximo de 2 persoas.
- A probabilidade de que contaxie a 2 persoas polo menos.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2, \\ (-1)^j(i-1) & \text{si } i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j , e I es la matriz identidad.)

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$$

3. Análisis:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

4. Análisis:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Geometría:

- Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.
- Calcule el punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto al plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Geometría:

- Halle el valor de a si el plano $\pi: ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.
- Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m .

7. Estadística y Probabilidad:

- Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.
- Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$.

8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

- La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.
- La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

MATEMÁTICAS II

1. $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$. Ao ter unha fila de ceros, **a matriz A non ten inversa.**

$a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1$, $a_{31} = -2$, $a_{32} = 2$ e $a_{33} = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\det(A + I) = -2 - 2 = -4 \neq 0$, polo que **a matriz $A + I$ si que ten inversa.**

$$(A + I)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & m & m+1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 0 & 0 & m-2 & 0 \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ (m-2)z = 0. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é $z = 0$, $y = \frac{1}{m}$, $x = m - 2y$.

- Se $m = 0$, temos $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3z = 1, \\ -2z = 0. \end{cases}$

O sistema é incompatible, porque as dúas últimas ecuacións non se poden cumprir á vez.

- Se $m = 2$, temos $\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 2y + 3z = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$

O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[z = \lambda, \quad y = \frac{1-3\lambda}{2}, \quad x = 2 - (1-3\lambda) = 1+3\lambda \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array} \right), \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

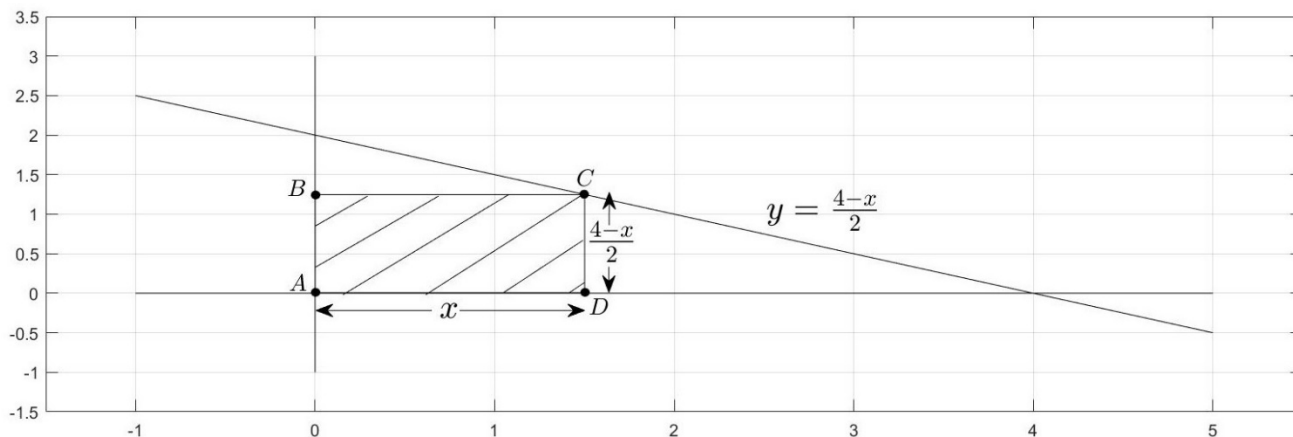
$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) + 6 - 3(m+2) = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m \\ &= m(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.
- **Caso $m = 2$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 - 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.

MATEMÁTICAS II

3.



Corte da recta $x + 2y = 4$ co eixe de abscisas:

$$x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4-x}{2}.$$

$$\frac{4-x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Así pois, hai que achar o máximo de $A(x) = x \left(\frac{4-x}{2} \right)$, $x \in (0,4)$.

$$A(x) = \frac{1}{2}(4x - x^2), \quad A'(x) = \frac{1}{2}(4 - 2x) = 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Hai máximo en $x = 2$ porque $A''(2) = -1 < 0$ (ou porque $y = A(x)$ é a ecuación dunha parábola cóncava con vértice en $x = 2$).

Posto que $\frac{4-2}{2} = 1$, os vértices pedidos son

$$A(0,0), B(0,1), C(2,1), D(2,0).$$

NOTA: como é frecuente facer, neste exercicio sobreentendemos que o vértice que ten que estar sobre a recta $r: x + 2y = 4$ é o C (ver debuxo, arriba), que vai escorregando sobre r . Certamente, tamén se poderían engadir ao estudo os casos nos que

- é o punto $B(0,2)$, fixo, o que está sobre r , e
- é o punto $D(4,0)$, fixo, o que está sobre r ,

e, entón, non hai rectángulo de área máxima. En efecto, consideremos por exemplo o primeiro destes dous casos. Entón, a función pasa a ser $A(x) = 2x$, con $x \in (0, \infty)$ ou, dependendo de interpretacións, $x \in (0, \infty) \setminus \{4\}$. Tanto cun dominio coma co outro, esa función non ten máximo. Esta aproximación ao problema tamén se considerará válida.

MATEMÁTICAS II

4.

$$y = x^2 - x - 1, \quad y' = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad y'' = 2 > 0.$$

Logo $y = x^2 - x - 1$ é unha parábola convexa con vértice en $x = \frac{1}{2}$.

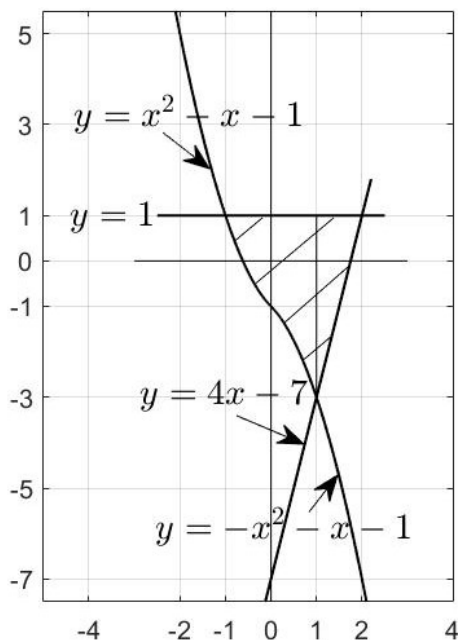
$$y = -x^2 - x - 1, \quad y' = -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad y'' = -2 < 0.$$

Logo $y = -x^2 - x - 1$ é unha parábola cóncava con vértice en $x = -\frac{1}{2}$.

x	$y = x^2 - x - 1$
0	-1
-1	1
-2	5

x	$y = -x^2 - x - 1$
0	-1
1	-3
2	-7

x	$y = 4x - 7$
0	-7
1	-3
2	1



Como vemos, ao buscar puntos para a representación gráfica xa poden saír os puntos de corte. Se non, procédese como segue.

- Corte de $y = 1$ con $y = x^2 - x - 1$:

$$x^2 - x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x \in \{-1, 2\}.$$

Só nos interesa $x = -1$.

- Corte de $y = 1$ con $y = 4x - 7$:

$$4x - 7 = 1 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Corte de $y = 4x - 7$ con $y = -x^2 - x - 1$:

$$-x^2 - x - 1 = 4x - 7 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x \in \{-6, 1\}.$$

Só nos interesa $x = 1$.

A área pedida é

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 [1 - (x^2 - x - 1)] dx + \int_0^1 [1 - (-x^2 - x - 1)] dx + \left[\text{área dun triángulo} \right] \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2 + x + 2) dx + \int_0^1 (x^2 + x + 2) dx + \frac{1 \cdot 4}{2} = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + 2 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) + 2 = 6. \end{aligned}$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Plano π que pasa por $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$:

π pasa por $A(1,0,0)$ e está xerado por $\overrightarrow{AB}(-1,2,0)$ e $\overrightarrow{AC}(-1,0,3)$. Logo $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-1) + 2z + 3y = 6x + 3y + 2z - 6 \Rightarrow \pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

5.b) Punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$:

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(10, -5, 5)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(6, 3, 2), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 10 + 6\lambda, \\ y = -5 + 3\lambda, \\ z = 5 + 2\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$6(10 + 6\lambda) + 3(-5 + 3\lambda) + 2(5 + 2\lambda) - 6 = 60 + 36\lambda - 15 + 9\lambda + 10 + 4\lambda - 6 = 49\lambda + 49 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Logo o punto de corte é $Q(10 - 6, -5 - 3, 5 - 2) = Q(4, -8, 3)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

$$\begin{aligned} \frac{10 + x'}{2} &= 4 \Leftrightarrow 10 + x' = 8 \Leftrightarrow x' = -2, \\ \frac{-5 + y'}{2} &= -8 \Leftrightarrow -5 + y' = -16 \Leftrightarrow y' = -11, \\ \frac{5 + z'}{2} &= 3 \Leftrightarrow 5 + z' = 6 \Leftrightarrow z' = 1. \end{aligned}$$

Tense logo $P'(-2, -11, 1)$.

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Como $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo a $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{n}_\pi(a, 1, 1)$ debe ser perpendicular a $\vec{d}_r(1, 1, 1)$:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = a + 1 + 1 = a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2.$$

6.b) Posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$.

$$\left[\frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{3} \right] \Leftrightarrow m = 3.$$

Como non son o mesmo plano cando $m = 3$,

- Se $m = 3$, son paralelos (non coincidentes),
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, son secantes (córtanse nunha recta).

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$0.8 = P(A) + 2P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 0.8 = 3P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 3P(A) = 0.9 \Leftrightarrow \mathbf{P(A) = 0.3}.$$

7.b) $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$.

$$0.82 = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.82 = 0.18.$$

Como $P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 = P(A \cap B)$, **os sucesos A e B son independentes.**

MATEMÁTICAS II

8. $X =$ “n.º de persoas contaxiadas, de entre as 8”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 8$ e $p = 0.1$ (logo $q = 1 - p = 0.9$).

8.a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ \binom{8}{0} (0.1)^0 (0.9)^8 &+ \binom{8}{1} (0.1)^1 (0.9)^7 + \binom{8}{2} (0.1)^2 (0.9)^6 = \\ (0.9)^8 &+ 8(0.1)(0.9)^7 + 28(0.1)^2 (0.9)^6 = \mathbf{0.9619}. \end{aligned}$$

8.b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - (0.9)^8 - 8(0.1)(0.9)^7 \\ &= \mathbf{0.1869}. \end{aligned}$$