

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra

a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. **Nota:** a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A .

b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números e Álgebra

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análise

a) Obteña as coordenadas dos vértices do triángulo rectángulo cuxa hipotenusa é tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$ e que, ademais, ten un cateto de lonxitude 2 situado sobre o eixe X . Debuxe a gráfica de f , a recta tanxente e o triángulo.

b) Ache os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

4. Análise

Calcule as seguintes integrais:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Xeometría

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Xeometría

Estude a posición relativa da recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e o plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función dos parámetros k e a . Logo, se é posible, diga cando r é perpendicular a π .

7. Estatística e Probabilidade

a) Nunha famosa biblioteca, o 70% dos libros son novelas, o 40% son clásicos anteriores ao século XIX e o 60% dos clásicos son novelas. Se se elixe nesa biblioteca un libro ao azar, calcule a probabilidade de que non sexa unha novela, pero si un clásico, e a probabilidade de que sexa un clásico sabendo que é unha novela.

b) Nun certo país, o 80% dos delitos contra a propiedade quedan sen resolver. Se nunha localidade dese país se cometeron 3 deses delitos, calcule a probabilidade de que se resolva polo menos 1.

8. Estatística e Probabilidade

a) Faise un exame tipo test con 60 preguntas e 4 opcións por pregunta, das que só unha é correcta. Calcule a probabilidade de acertar polo menos 16 preguntas se se responden as 60 ao azar.

b) Se X segue unha distribución normal de media 25 e desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Logo, calcule o valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análisis

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X . Dibuje la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4. Análisis

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Geometría

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

7. Estadística y Probabilidad

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

ABAU 2022
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, pero, nalgúns casos, pode haber outras formas correctas de solucionarlos.

1. Números e Álgebra (2 puntos):

- a) 0.75 puntos: **0.25** por determinar a matriz A , **0.5** por calcular a súa inversa.
- b) 1.25 puntos: **0.25** por deducir que $b_{12} = 0$ a partir da singularidade de B , **0.5** por calcular $A^{-1}B + A$ e **0.5** por deducir da igualdade $\det(A^{-1}B + A) = -1$ que $b_{22} = 2$.

2. Números e Álgebra (2 puntos): **0.5** pola resolución da ecuación $\det A = 0$ (onde A é a matriz de coeficientes), **0.75** polo estudo dos rangos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada, **0.75** = 0.25×3 polas conclusións (tres casos).

3. Análise (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.25** pola ecuación da recta tanxente, **0.5** polo debuxo, **0.25** por especificar as coordenadas dos vértices.
- b) 1 punto: **0.5** pola condición de continuidade, **0.5** pola determinación de a e b .

4. Análise (2 puntos):

- a) **0.5** puntos.
- b) **0.5** puntos.
- c) **0.5** puntos.
- d) 0.5 puntos: **0.25** pola expresión en suma de fraccións simples, **0.25** polo cálculo final.

5. Xeometría (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por especificar os elementos que determinan o plano e **0.5** pola ecuación.
- b) 1 punto: **0.25** pola recta perpendicular, **0.25** polo punto de corte, **0.5** polo punto simétrico.

6. Xeometría (2 puntos): **0.25** por chegar á condición $5a + 2k = 0$, **1.5** $= 0.5 \times 3$ por distinguir os tres casos posibles e **0.25** por deducir a condición de perpendicularidade.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades que se piden.
- b) 1 punto: **0.25** por identificar a distribución binomial e **0.75** polo cálculo da probabilidade pedida.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por chegar a $P(X \geq 16) \approx P(\tilde{X} \geq 15.5)$, con $\tilde{X}$ normal, **0.25** por chegar a $P(Z \geq 0.15)$ e **0.25** polo resultado.
- b) 1 punto: **0.25** por calcular $P(X < 24)$, **0.5** por chegar a $P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) = 0.6064$ e **0.25** pola obtención de α .

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

a) Obteña a matriz antisimétrica A de orde 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Logo, calcule a súa inversa no caso de que exista. **Nota:** a_{ij} é o elemento que está na fila i e na columna j de A .

b) Sexa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, ache os valores de b_{12} e de b_{22} sabendo que B non ten inversa e que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Obteña as coordenadas dos vértices do triángulo rectángulo cuxa hipotenusa é tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$ e que, ademais, ten un cateto de lonxitude 2 situado sobre o eixe X . Debuxar a gráfica de f , a recta tanxente e o triángulo.

b) Ache os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

4. Análise:

Calcule as seguintes integrais:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Xeometría:

Estude a posición relativa da recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e o plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función dos parámetros k e a . Logo, se é posible, diga cando r é perpendicular a π .

7. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha famosa biblioteca, o 70% dos libros son novelas, o 40% son clásicos anteriores ao século XIX e o 60% dos clásicos son novelas. Se se elixe nesa biblioteca un libro ao azar, calcule a probabilidade de que non sexa unha novela, pero si un clásico, e a probabilidade de que sexa un clásico sabendo que é unha novela.

b) Nun certo país, o 80% dos delitos contra a propiedade quedan sen resolver. Se nunha localidade dese país se cometeron 3 deses delitos, calcule a probabilidade de que se resolva polo menos 1.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Faise un exame tipo test con 60 preguntas e 4 opcións por pregunta, das que só unha é correcta. Calcule a probabilidade de acertar polo menos 16 preguntas se se responden as 60 ao azar.

b) Se X segue unha distribución normal de media 25 e desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Logo, calcule o valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota:** a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A .

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

3. Análisis:

a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X . Dibujar la gráfica de f , la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4. Análisis:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$. b) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx$. c) $\int x^2 \sin x \, dx$. d) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

7. Estadística y Probabilidad:

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

8. Estadística y Probabilidad:

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

MATEMÁTICAS II**1.****1.a)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz pedida. Posto que $\det A = 1$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$. Como B non ten inversa, debe ser $\det B = -b_{12} = 0$, de onde $b_{12} = 0$. Logo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

- $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- $A^{-1}B + A = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 - b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Agora de

$$\det(A^{-1}B + A) = 1 - b_{22} = -1,$$

dedúcese que $b_{22} = 2$.

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ 0 & 0 & m-2 & -3 \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m-2)z = -3. \end{cases}$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-3}{m-2}, \quad y = -2 - (m-2)z, \quad x = \frac{-my - z}{m+1}.$$

- Se $m = -1$, temos

$$\begin{cases} -y + z = 0, \\ y - 3z = -2, \\ -3z = -3, \end{cases}$$

e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$[x = \lambda, \quad y = 1, \quad z = 1], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se $m = 2$, o sistema é incompatible, porque a terceira ecuación queda $0 = -3$.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} m+1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & -2 \\ m+1 & m & m-1 & -3 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = m+1$ e $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = m(m-2) - 1$ non se anulan á vez, é seguro que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} m+1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m-2 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} \\ &= (m+1)(m-1) + m(m-2)(m+1) - (m+1) - m(m-2)(m+1) \\ &= (m+1)(m-1) - (m+1) = (m+1)(m-1-1) = (m+1)(m-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = -1$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 4 + 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 2$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 4 = 3 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$.

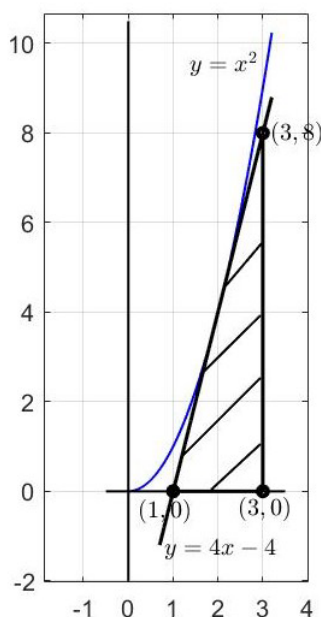
A ecuación da recta tanxente á gráfica de f en $x = 2$ é $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, é dicir, $y - 4 = 4(x - 2)$ ou, equivalentemente,

$$y = 4x - 4.$$

Corte da recta co eixe X : $4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ao ter lonxitude 2 o cateto que está sobre o eixe X , os vértices do triángulo son $A(1, 0)$, $B(3, 0)$ e $C(3, 8)$.

A situación é a do debuxo seguinte:



3.b) Hai que achar a e b que fagan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

Basta facer o estudo en $x = 1$.

Para ser derivable, a función debe ser continua, polo que os límites laterais $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ teñen que existir e valer $f(1)$. Agora observemos que, por unha banda, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ e, pola outra, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx) = a + b$. En consecuencia, ten que ser $b = 1 - a$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1, \\ ax^2 + (1 - a)x & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1, \\ 2ax + 1 - a & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax + 1 - a) = 2a + 1 - a = a + 1,$$

e polo tanto f é derivable se, e só se, $a = -1$ (para que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$) e $b = 1 - a = 2$.

MATEMÁTICAS II

4.

4.a) Facendo o cambio $z = x^2 + 1$ (co cal $dz = 2x \, dx$) vese que

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int \sqrt{z} \, dz = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2 + 1)^3} + C.$$

4.b) Facendo o cambio $z = \cos x$ (co cal $dz = -\sin x \, dx$) vese que

$$\int (\sin x) \sin(\cos x) \, dx = -\int \sin z \, dz = \cos z + C = \cos(\cos x) + C.$$

4.c) Integrando por partes coas eleccións

$$\begin{aligned} u &= x^2 & du &= 2x \, dx \\ dv &= \sin x \, dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

chégase a

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.$$

Aplicando partes de novo coas eleccións

$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx \\ dv &= \cos x \, dx & v &= \sin x \end{aligned}$$

tense finalmente que

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

4.d)

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}.$$

Tense que cumprir que $(A+B)x - 2A - B = 1$, polo que A e B son a solución do sistema

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -2A - B = 1. \end{cases}$$

Sumando as dúas ecuacións vese que

$$-A = 1 \Rightarrow A = -1,$$

conque

$$B = -A = 1.$$

Así pois,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

co cal

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln \frac{|x-2|}{|x-1|} + C.$$

MATEMÁTICAS II

5. a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que contén á recta $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa polo punto $P(0,1,0)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto ao plano $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

5.a) Ecuación implícita do plano π que contén a $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ e pasa por $P(0,1,0)$:

$Q(-1, -2, -3)$ é un punto de r . O plano pedido pasa por $P(0,1,0)$ e é paralelo ao vector director de r , $\vec{d}_r(3,2,1)$, e ao vector $\overrightarrow{QP}(1,3,3)$, polo que a súa ecuación implícita é

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6x + y - 1 + 9z - 2z - 3x - 9(y-1) = 3x - 8y + 7z + 8.$$

$$\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0.$$

5.b) Punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto a $\pi: 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(11, -14, 13)$ e é perpendicular a π :

$$\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(3, -8, 7), \text{ co cal } r: \begin{cases} x = 11 + 3\lambda, \\ y = -14 - 8\lambda, \\ z = 13 + 7\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Corte de r con π :

$$3(11 + 3\lambda) - 8(-14 - 8\lambda) + 7(13 + 7\lambda) + 8 = 33 + 9\lambda + 112 + 64\lambda + 91 + 49\lambda + 8 = 122\lambda + 244 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Logo o punto de corte é $Q(11 - 6, -14 + 16, 13 - 14) = Q(5, 2, -1)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,

$$\begin{aligned} \frac{11 + x'}{2} &= 5 \Leftrightarrow 11 + x' = 10 \Leftrightarrow x' = -1, \\ \frac{-14 + y'}{2} &= 2 \Leftrightarrow -14 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 18, \\ \frac{13 + z'}{2} &= -1 \Leftrightarrow 13 + z' = -2 \Leftrightarrow z' = -15. \end{aligned}$$

Tense logo $P'(-1, 18, -15)$.

MATEMÁTICAS II

6. Posición relativa de r : $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ e π : $ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de k e a :

$\vec{d}_r(1, k, 3)$ é vector director de r , e $\vec{n}_\pi(a, 4, 3a)$ é normal a π .

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = a + 4k + 9a = 10a + 4k = 2(5a + 2k).$$

Se $5a + 2k = 0$, entón $\vec{d}_r$ e $\vec{n}_\pi$ son perpendiculares, conque nese caso ou ben $r \subset \pi$, ou ben $r \parallel \pi$ (entendendo que $r \cap \pi = \emptyset$). Supoñamos $5a + 2k = 0$ e tomemos $P(-1, 1, 0)$, que é un punto de r . É claro que $r \subset \pi$ se, e só se, $P \in \pi$.

$$P \in \pi \Leftrightarrow -a + 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 6.$$

Conclusión:

- Se $a = 6$ e $k = \frac{-5a}{2} = \frac{-30}{2} = -15$, $r \subset \pi$.
- Se $5a + 2k = 0$ e $a \neq 6$, $r \parallel \pi$.
- Se $5a + 2k \neq 0$, r e π córtanse nun punto.

Se é posible, diga cando r é perpendicular a π :

Obsérvese que

$$\vec{d}_r \parallel \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{k}{4} = \frac{3}{3a} \Leftrightarrow ak = 4,$$

polo que r é perpendicular a π se, e só se, $ak = 4$.

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) N = “ser novela”, C = “ser clásico”. Sábese que $P(N) = 0.7$, $P(C) = 0.4$ e $P(N|C) = 0.6$.

	C	$\bar{C}$	
N	$40 \times 0.6 = 24$	46	70
$\bar{N}$	16	14	30
	40	60	100

Segundo a táboa de continxencia,

$$P(\bar{N} \cap C) = \frac{16}{100} = 0.16$$

e

$$P(C|N) = \frac{24}{70} \approx 0.3429.$$

ALTERNATIVA para 7.b):

$$P(N \cap C) = P(N|C)P(C) = 0.6 \times 0.4 = 0.24,$$

$$P(\bar{N} \cap C) = P(C) - P(N \cap C) = 0.4 - 0.24 = 0.16.$$

Por outra banda,

$$P(C|N) = \frac{P(N \cap C)}{P(N)} = \frac{0.24}{0.7} \approx 0.3429.$$

7.b) X = “n.º de delitos que se resolven, de entre os 3”.

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 3$ e $p = 0.2$. Tense logo $q = 1 - p = 0.8$. Pídese $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} p^0 q^3 = (0.8)^3 = 0.512,$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.512 = 0.488.$$

MATEMÁTICAS II

8.

8.a) $X =$ "n.º de preguntas acertadas, de entre as 60".

$X \rightarrow B(n, p)$, con $n = 60$ e $p = 0.25$. Tense logo $q = 1 - p = 0.75$. Pídese $P(X \geq 16)$.

$np = 15$, $nq = 45$, $npq = 11.25$, $\sqrt{npq} \approx 3.3541$. Como $np > 5$ e $nq > 5$, X pode aproximarse por $\tilde{X} \rightarrow N(15, 3.3541)$.

$$Z = \frac{\tilde{X} - 15}{3.3541} \rightarrow N(0, 1).$$

Aplicando a corrección de Yates ou de medio punto,

$$\begin{aligned} P(X \geq 16) &\approx P(\tilde{X} \geq 15.5) = P\left(Z \geq \frac{15.5 - 15}{3.3541}\right) \approx P(Z \geq 0.15) = 1 - P(Z < 0.15) \\ &\approx 1 - 0.5596 = \mathbf{0.4404}. \end{aligned}$$

8.b) $X \rightarrow N(25, 2)$, conque $Z = \frac{X - 25}{2} \rightarrow N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} P(X < 24) &= P\left(Z < \frac{24 - 25}{2}\right) = P(Z < -0.5) = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) \approx 1 - 0.6915 \\ &= \mathbf{0.3085}. \end{aligned}$$

Por outra banda,

$$\begin{aligned} 0.2128 &= P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = P\left(-\frac{\alpha}{2} < Z < \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - \{1 - P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right)\} = 2P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - 1, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} 2P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) &= 1.2128, \\ P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) &= 0.6064, \\ \frac{\alpha}{2} &\approx 0.27, \\ \alpha &\approx \mathbf{0.54}. \end{aligned}$$