

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra

Despeixe X da ecuación matricial $AB(X - I) = C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álgebra

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análise

- a) Calcule os límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, onde $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x .
b) Debuxe a gráfica dunha función f continua e non negativa no intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ no intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ no intervalo $(2,3)$ e f é constante no intervalo $(1,2)$.

4. Análise

Obteña a función f , sabendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = 0$ é $y = 3x - 1$.

5. Xeometría

- a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(1, -1, 0)$ e é perpendicular á recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- b) Calcule os dous puntos da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$, cuxa distancia ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é igual a 2.

6. Xeometría

- a) Ache os valores de k e de m que fan que os puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(k, 2, 0)$ estean aliñados.
b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade

- a) Se $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabendo que A e B son sucesos incompatibles. Canto valería $P(A)$ se supuxésemos que A e B son, en lugar de incompatibles, independentes?
b) Nunha certa cidade, o 21% das persoas len ciencia ficción, o 63% len novela negra, e o 17% len tanto ciencia ficción como novela negra. Se se elixe ao azar unha persoa desa cidade, calcule:
• A probabilidade de que lea novela negra sabendo que le ciencia ficción.
• A probabilidade de que non lea nin ciencia ficción nin novela negra.

8. Estatística e Probabilidade

- a) Calcule o valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ se X segue unha distribución normal de media 1 e desviación típica 3.
b) Calcule o valor de α que fai que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ se X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X - I) = C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análisis

a) Calcule los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ en el intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4. Análisis

Obtenga la función f , sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

5. Geometría

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y es perpendicular a

la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule los dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x - 1 = 0$ es igual a 2.

6. Geometría

a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(k, 2, 0)$ estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad

a) Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad

a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

ABAU 2022
CONVOCATORIA ORDINARIA
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

Só puntúan cinco das oito preguntas.

1. **Números e Álgebra** (2 puntos): **0.75** por despxar X , **0.5** por calcular $(AB)^{-1}$, e **0.75** por calcular X .
2. **Números e Álgebra** (2 puntos): **0.5** polo estudo do rango da matriz de coeficientes, **0.5** polo estudo do rango da matriz ampliada, **1** = 0.25×4 polas catro conclusións.
3. **Análise** (2 puntos)
 - a) 1 punto: **0.5** por cada un dos dous límites.
 - b) 1 punto: **0.25** por establecer relacións entre os datos e o debuxo pedido e **0.75** polo debuxo.
4. **Análise** (2 puntos): **1** = $0.5 + 0.5$ polas dúas integrais, **0.5** por ter en conta que $f(0) = -1$ e $f'(0) = 3$, **0.5** pola determinación da función.
5. **Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto: **0.5** polos elementos que determinan o plano, **0.5** pola ecuación pedida.
 - b) 1 punto: **0.25** por coñecer a fórmula da distancia, **0.75** polos dous puntos pedidos.
6. **Xeometría** (2 puntos)
 - a) 1 punto: **0.25** pola formulación do problema, **0.75** pola determinación de k e de m .
 - b) 1 punto: **0.5** pola posición relativa, **0.5** polo punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.5** por cada un dos dous casos.
- b) 1 punto: **0.5** por cada unha das dúas probabilidades pedidas.

8. Estatística e Probabilidade (2 puntos)

- a) 1 punto: **0.25** pola tipificación, **0.25** por chegar a $P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$ e **0.5** por chegar á solución.
- b) 1 punto: **0.25** pola tipificación, **0.25** por chegar a $P(Z \leq \alpha/4) - P(Z \leq -\alpha/4) = 0.8064$, **0.25** por chegar a $P(Z \leq \alpha/4) = 0.9032$ e **0.25** pola obtención do valor de α .

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álgebra:

Despexe X da ecuación matricial $AB(X - I) = C$, onde I é a matriz identidade (asuma que o produto AB ten inversa). Logo, calcule X se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álgebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análise:

a) Calcule os límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, onde $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x .

b) Debuxe a gráfica dunha función f continua e non negativa no intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ no intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ no intervalo $(2,3)$ e f é constante no intervalo $(1,2)$.

4. Análise:

Obteña a función f , sabendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ e que a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = 0$ é $y = 3x - 1$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(1, -1, 0)$ e é perpendicular á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule os dous puntos da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuxa distancia ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é igual a 2.

6. Xeometría:

a) Ache os valores de k e de m que fan que os puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(k, 2, 0)$ estean aliñados.

b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Se $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabendo que A e B son sucesos incompatibles. Canto valería $P(A)$ se supuxésemos que A e B son, en lugar de incompatibles, independentes?

b) Nunha certa cidade, o 21% das persoas len ciencia ficción, o 63% len novela negra, e o 17% len tanto ciencia ficción como novela negra. Se se elixe ao azar unha persoa desa cidade, calcule:

- A probabilidade de que lea novela negra sabendo que le ciencia ficción.
- A probabilidade de que non lea nin ciencia ficción nin novela negra.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule o valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ se X segue unha distribución normal de media 1 e desviación típica 3.

b) Calcule o valor de α que fai que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ se X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Despeje X de la ecuación matricial $AB(X - I) = C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el sistema
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2 - m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

3. Análisis:

- a) Calcule los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .
- b) Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que: $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ en el intervalo $(0,1)$, $f'' < 0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4. Análisis:

Obtenga la función f , sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

5. Geometría:

- a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y es perpendicular a

la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- b) Calcule los dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x - 1 = 0$ es igual a 2.

6. Geometría:

- a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(k, 2, 0)$ estén alineados.
- b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

- a) Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?
- b) En una cierta ciudad, el 21% de las personas leen ciencia ficción, el 63% leen novela negra, y el 17% leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:
- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.
 - La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8. Estadística y Probabilidad:

- a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.
- b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

MATEMÁTICAS II

1.

$$AB(X - I) = C \Leftrightarrow X - I = (AB)^{-1}C \Leftrightarrow X = I + (AB)^{-1}C.$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

•

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det(AB) = 8 - 6 = 2.$$

•

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -8 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

•

$$(AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$X = I + (AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2. A notación F_i indicará «fila i ». Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 3-m & m^2-m & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 0 & 2(m^2-m) & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 0 & 0 & m^2-m & 0 \end{array} \right).$$

Sistema triangular equivalente:
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ (m^2-m)z = 0. \end{cases}$$

$$m^2 - m = m(m-1) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,1\} \quad \text{e} \quad m-3 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Discusión:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$, o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = 0, \quad y = \frac{1}{m-3}, \quad x = 0.$$

- Se $m \in \{0, 1\}$, temos
$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:

$$\left[z = \lambda, \quad y = \frac{1}{m-3}, \quad x = -m\lambda \right], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Se $m = 3$, temos
$$\begin{cases} x + 3z = 1, \\ 6z = 1, \\ 6z = 0. \end{cases}$$

O sistema é incompatible, porque a segunda e a terceira ecuación non se poden cumprir á vez.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA – EXERCICIO 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{pmatrix}, \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & m-3 \\ 0 & m-3 \end{vmatrix} = m-3$ e $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m^2-m \end{vmatrix} = m^2-m$ non se anulan á vez, tense que $\text{rank } A \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\text{rank } A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\begin{aligned} \det A &= m^2(m-3) + (m-3)(m^2-m) - m(m-3) = (m-3)(m^2 + m^2 - m - m) \\ &= (m-3)(2m^2 - 2m) = 2m(m-1)(m-3) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0, 1, 3\}. \end{aligned}$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$:** $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = 0$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 1$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2 = \text{rank } A < 3 = \text{n.º de incógnitas}$, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.
- **Caso $m = 3$:** $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 6 - 9 = -12 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = 1,$$

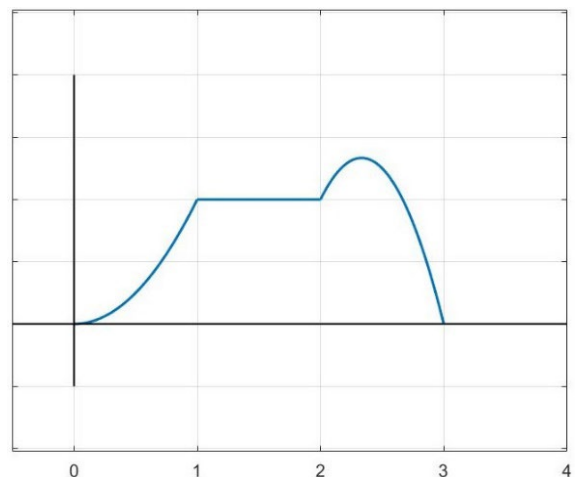
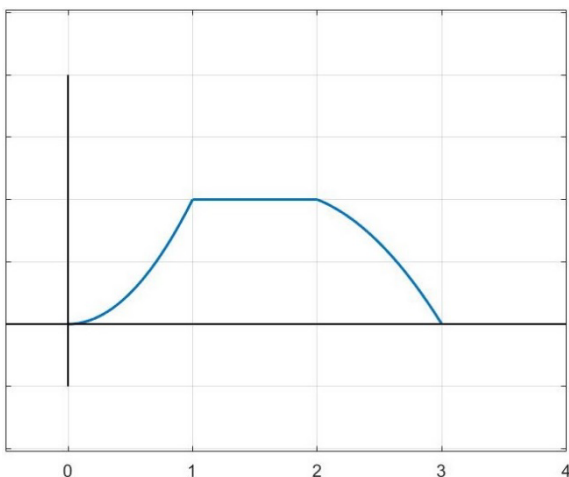
onde L'H indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$. Falando con rigor, o que asegura a regra de L'Hôpital é que o primeiro límite existe e vale 1 porque o último existe e vale 1.

Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

onde L'H indica o uso da regra de L'Hôpital para tratar unha indeterminación do tipo $\frac{-\infty}{\infty}$.

3.b) A función f é convexa no intervalo $(0,1)$ e cóncava no intervalo $(2,3)$. Posto que ten que ser continua e non negativa no intervalo $[0,3]$, e ademais cumprir $f(0) = f(3) = 0$ e ser constante no intervalo $(1,2)$, a súa gráfica debe seguir algún dos seguintes patróns:



MATEMÁTICAS II**4.**

Integrando $f''(x) = 2x - e^{-x}$ obtense

$$f'(x) = x^2 + e^{-x} + C_1,$$

e, integrando esta última,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + C_1x + C_2 \quad (C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes}).$$

Posto que a tanxente á gráfica de f en $(0, f(0))$ é $y = 3x - 1$, téñense que cumprir

$$f(0) = y(0) = -1, \quad f'(0) = y' = 3.$$

De $f(0) = -1 + C_2 = -1$ e $f'(0) = 1 + C_1 = 3$ obtéñense os valores $C_1 = 2$ e $C_2 = 0$, co cal

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) π pasa polo punto $P(1, -1, 0)$ e é normal a $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(1, 0, 0)$. Logo

$$\pi: x - 1 = 0.$$

5.b) Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, a distancia de P a π é

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Entón a distancia dun punto xenérico da recta $r: \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$, ao plano $\pi: x - 1 = 0$ é

$$d(P(\lambda, \lambda, \lambda), \pi) = |\lambda - 1|.$$

Como

$$|\lambda - 1| = 2 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 3\},$$

os dous puntos buscados son

$$P(-1, -1, -1) \text{ e } Q(3, 3, 3).$$

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Os puntos $A(k, 3, m)$, $B(2, 0, 2)$ e $C(k, 2, 0)$ están aliñados se, e só se, $\overrightarrow{AB}(2-k, -3, 2-m)$ e $\overrightarrow{AC}(0, -1, -m)$ son proporcionais.

De $2-k=0$ dedúcese que $k=2$, e de $\frac{-3}{-1} = \frac{2-m}{-m}$ dedúcese que $3m = m-2$, é dicir, $m = -1$.

6.b) Posición relativa das rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ e $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$.

- Como $\vec{d}_r(2, 3, 2)$ e $\vec{d}_s(3, 2, 3)$ non son proporcionais ($\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$), non son nin paralelas nin coincidentes, polo que ou ben se cortan, ou ben se cruzan.
- $[P(1, -1, 2) \in r, Q(-2, -3, -1) \in s] \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(-3, -2, -3)$.

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (dúas columnas iguais)} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{d}_r \text{ e } \vec{d}_s \text{ son coplanarios} \\ \Rightarrow r \text{ e } s \text{ córtanse.}$$

- Punto de corte:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = -1 + 3\lambda, \\ z = 2 + 2\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}; \quad s: \begin{cases} x = -2 + 3\mu, \\ y = -3 + 2\mu, \\ z = -1 + 3\mu, \end{cases} \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = -2 + 3\mu \\ -1 + 3\lambda = -3 + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 3\mu = -3 \\ 3\lambda - 2\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda - 6\mu = -6 \\ 9\lambda - 6\mu = -6 \end{cases} \Rightarrow 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Logo o punto de corte é

$$R(1 + 2 \cdot 0, -1 + 3 \cdot 0, 2 + 2 \cdot 0) = R(1, -1, 2).$$

MATEMÁTICAS II

7.

7.a)

- Se A e B son incompatibles, $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} = \mathbf{0.08\bar{3}}.$$

- Se A e B son independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}P(A)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(A) \Leftrightarrow \frac{3}{4}P(A) = \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow P(A) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{9} = \mathbf{0.\bar{1}}.$$

7.b) CF = “ler ciencia ficción”, NN = “ler novela negra”.

$$P(\text{CF}) = 0.21, \quad P(\text{NN}) = 0.63, \quad P(\text{CF} \cap \text{NN}) = 0.17.$$

•

$$P(\text{NN}|\text{CF}) = \frac{P(\text{NN} \cap \text{CF})}{P(\text{CF})} = \frac{0.17}{0.21} \approx \mathbf{0.8095}.$$

•

$$P(\overline{\text{CF}} \cap \overline{\text{NN}}) = P(\overline{\text{CF} \cup \text{NN}}) = 1 - P(\text{CF} \cup \text{NN}).$$

$$P(\text{CF} \cup \text{NN}) = P(\text{CF}) + P(\text{NN}) - P(\text{CF} \cap \text{NN}) = 0.21 + 0.63 - 0.17 = 0.67.$$

$$P(\overline{\text{CF}} \cap \overline{\text{NN}}) = 1 - 0.67 = \mathbf{0.33}.$$

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA – EJERCICIO 7.b):

Vese na táboa de continxencia

	CF	$\overline{CF}$	Totais
NN	17	46	63
$\overline{NN}$	4	33	37
Totais	21	46	100

que

$$P(NN|CF) = \frac{17}{21} \approx 0.8095$$

e

$$P(\overline{CF} \cap \overline{NN}) = 0.33.$$

MATEMÁTICAS II

8.

8.a)

$$X \rightarrow N(1,3) \Rightarrow Z = \frac{X-1}{3} \rightarrow N(0,1).$$

$$\begin{aligned} P(-2 \leq X \leq 7) &= P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - \{1 - P(Z \leq 1)\} \\ &= P(Z \leq 2) + P(Z \leq 1) - 1 \approx 0.9772 + 0.8413 - 1 = \mathbf{0.8185}. \end{aligned}$$

8.b)

$$X \rightarrow N(\mu, 4) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{4} \rightarrow N(0,1).$$

$$\begin{aligned} 0.8064 &= P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = P\left(-\frac{\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{4}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - \left\{1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right)\right\} = 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1. \end{aligned}$$

Logo

$$2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 1.8064 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 0.9032,$$

conque, segundo a táboa,

$$\frac{\alpha}{4} \approx 1.3 \Leftrightarrow \alpha \approx \mathbf{5.2}.$$