



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA
EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE
ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Dada la función

$$f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$$

- a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.
- b) (0.75 puntos) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.
- c) (1 punto) Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- a) (0.75 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.
- b) (0.75 puntos) Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
- c) (1 punto) Represente la región del plano limitada por la gráfica de f , las rectas $x=3$, $x=5$ y el eje de abscisas. Calcule su área.

BLOQUE C**EJERCICIO 5**

El 7% de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36% tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28% no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad.

- a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.
- b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.
- c) **(0.5 puntos)** Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?
- d) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos “tener coche” y “no tener moto”? ¿Son incompatibles?

EJERCICIO 6

Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86% de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:

- a) **(1.5 puntos)** Opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.
- b) **(1 punto)** No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

BLOQUE D**EJERCICIO 7**

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.

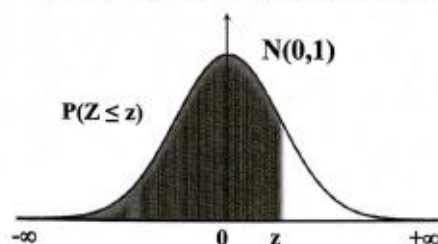
- a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?
- b) **(0.5 puntos)** ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas?
- c) **(1 punto)** Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.

- a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota.
- b) **(1.25 puntos)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2%?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984
2,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994
3,0	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,3	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,4	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,6	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

(2.5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^2 \cdot X + A^4 = A \Rightarrow A^2 \cdot X = A - A^4 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot A \cdot A^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot X = I - A^3 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I - A^{-1} \cdot A \cdot A^2 \Rightarrow X = A^{-1} - A^2$$

Hallamos la A^{-1} , A^2 y determinamos la expresión de la matriz X.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 8 + 0 - 0 - 0 - 0 = -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-9} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & -4/9 \\ 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 2-2+0 & 0+4+0 \\ 0+0-4 & 0+1+0 & 0-2+2 \\ -2+0-2 & -4+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} - A^2 = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & -4/9 \\ 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/9 & 2/9 & -40/9 \\ 40/9 & -10/9 & 2/9 \\ 38/9 & 40/9 & -8/9 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -8/9 & 2/9 & -40/9 \\ 40/9 & -10/9 & 2/9 \\ 38/9 & 40/9 & -8/9 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

Llamamos x = “número de anuncios por radio”, y = “número de anuncios por televisión”.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Coste	Audiencia
Número de anuncios por radio (x)	$2400x$	$34000x$
Número de anuncios por televisión (y)	$3600y$	$72000y$
TOTALES	$2400x + 3600y$	$34000x + 72000y$

Deseamos maximizar la audiencia que viene expresada como $P(x, y) = 34000x + 72000y$.

Las restricciones del problema son:

“Una empresa tiene un presupuesto de 78000 €” $\rightarrow 2400x + 3600y \leq 78000$.

“La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10” $\rightarrow x - y \leq 10; y - x \leq 10$.

“que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total” $\rightarrow x + y \geq 10$.

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

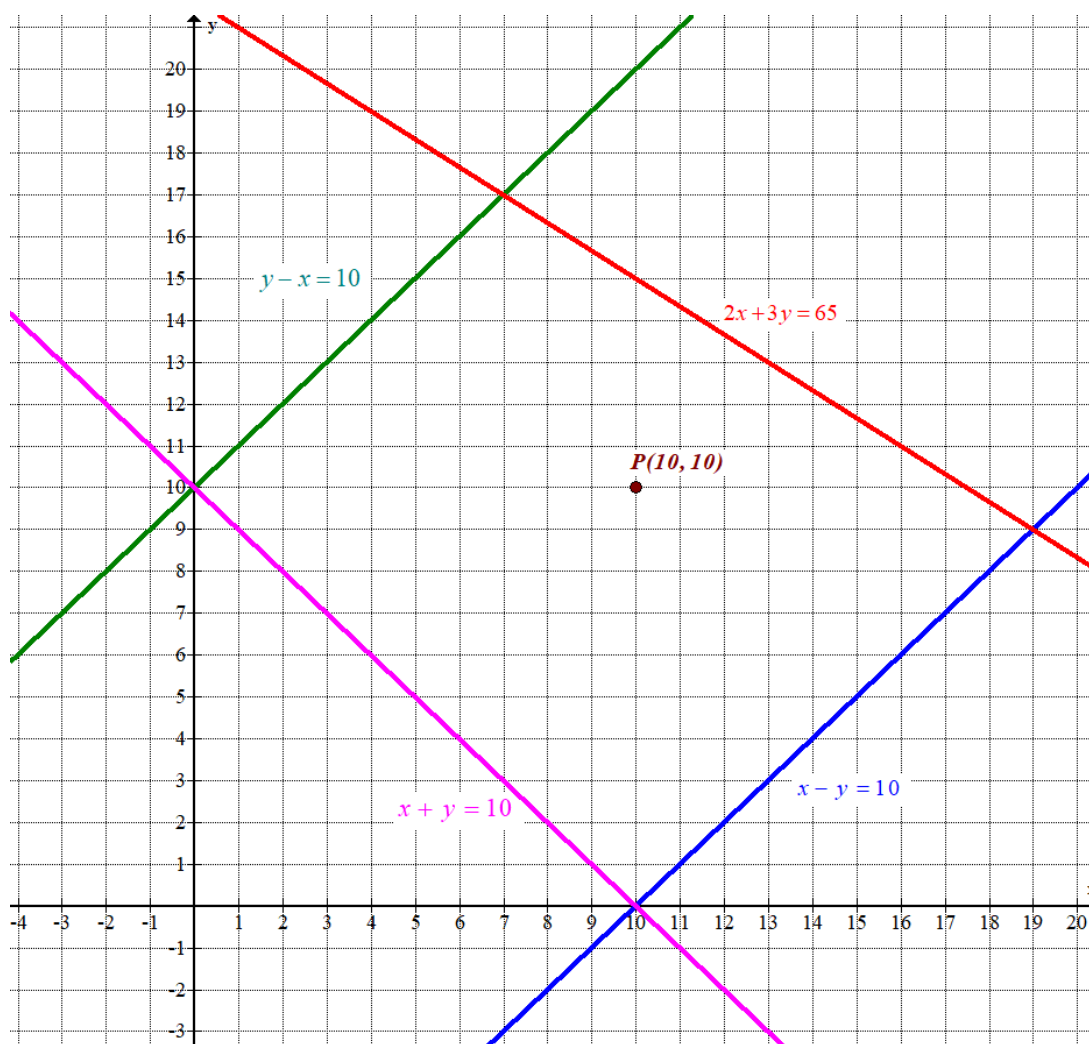
Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2400x + 3600y \leq 78000 \\ x - y \leq 10 \\ y - x \leq 10 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 24x + 36y \leq 780 \\ x - y \leq 10 \\ y - x \leq 10 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 65 \\ x - y \leq 10 \\ y - x \leq 10 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 65 \\ x - y = 10 \\ y - x = 10 \\ x + y = 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}$$

x	$y = \frac{65-2x}{3}$	x	$y = x - 10$	x	$y = 10 + x$	x	$y = 10 - x$	
0	$65/3$	10	0	0	10	0	10	Primer cuadrante
7	17	19	9	7	17	10	0	
19	9							



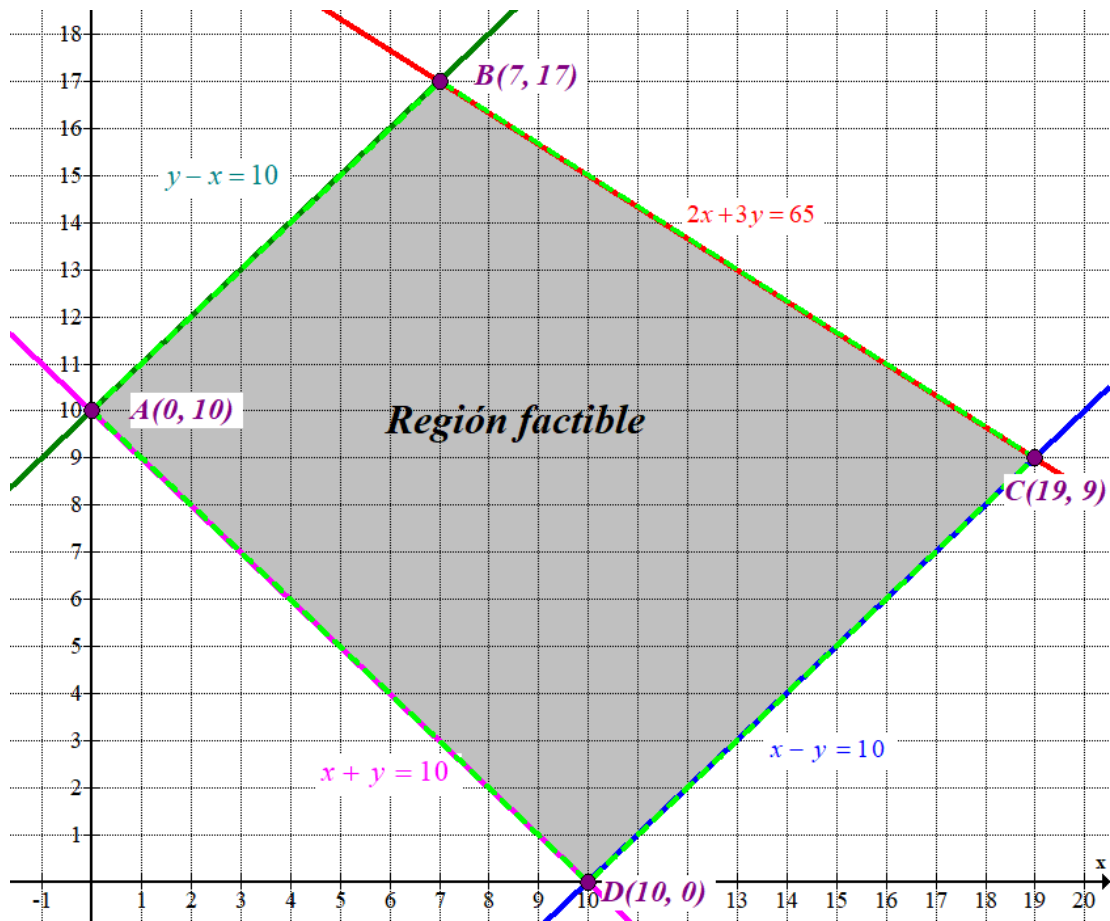
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 6y \leq 130 \\ x - y \leq 10 \\ y - x \leq 10 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer}$$

cuadrante situada por debajo de las rectas **verde** y **roja** y por encima de las rectas **rosa** y **azul**. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 40 + 60 \leq 130 \\ 10 - 10 \leq 10 \\ 10 - 10 \leq 10 \\ 10 + 10 \geq 10 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la audiencia $P(x, y) = 34000x + 72000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow P(0, 10) = 34000 \cdot 0 + 72000 \cdot 10 = 720000$$

$$B(7, 17) \rightarrow P(7, 17) = 34000 \cdot 7 + 72000 \cdot 17 = 1462000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(19, 9) \rightarrow P(19, 9) = 34000 \cdot 19 + 72000 \cdot 9 = 1294000$$

$$D(10, 0) \rightarrow P(10, 0) = 34000 \cdot 10 + 72000 \cdot 0 = 340000$$

La máxima audiencia es de 1 462 000 personas y se consigue en el vértice $B(7, 17)$, que significa contratar 7 anuncios por radio y 17 por televisión.

EJERCICIO 3

Dada la función

$$f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$$

- a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.
 b) **(0.75 puntos)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.
 c) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

- a) La función existe para todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{2\}.$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$. Como no es continua en $x = 2$ tampoco es derivable en dicho valor.

Asíntota vertical. $x = a$.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-6}{2-x} = \frac{2 \cdot 2 - 6}{2 - 2} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-6}{2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{6}{x}}{\frac{2}{x} - \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{6}{x}}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{2 - \frac{6}{\infty}}{\frac{2}{\infty} - 1} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2$$

$y = -2$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Al existir asíntota horizontal no existe asíntota oblicua.

- b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = \frac{2(2-x) - (-1)(2x-6)}{(2-x)^2} = \frac{4-2x+2x-6}{(2-x)^2} = \frac{-2}{(2-x)^2}$$

Esta expresión de la derivada no se anula para ningún valor. Además, siempre es negativa, por lo que la función siempre decrece.

La función decrece en $\mathbb{R} - \{2\}$. La función no tiene extremos relativos.

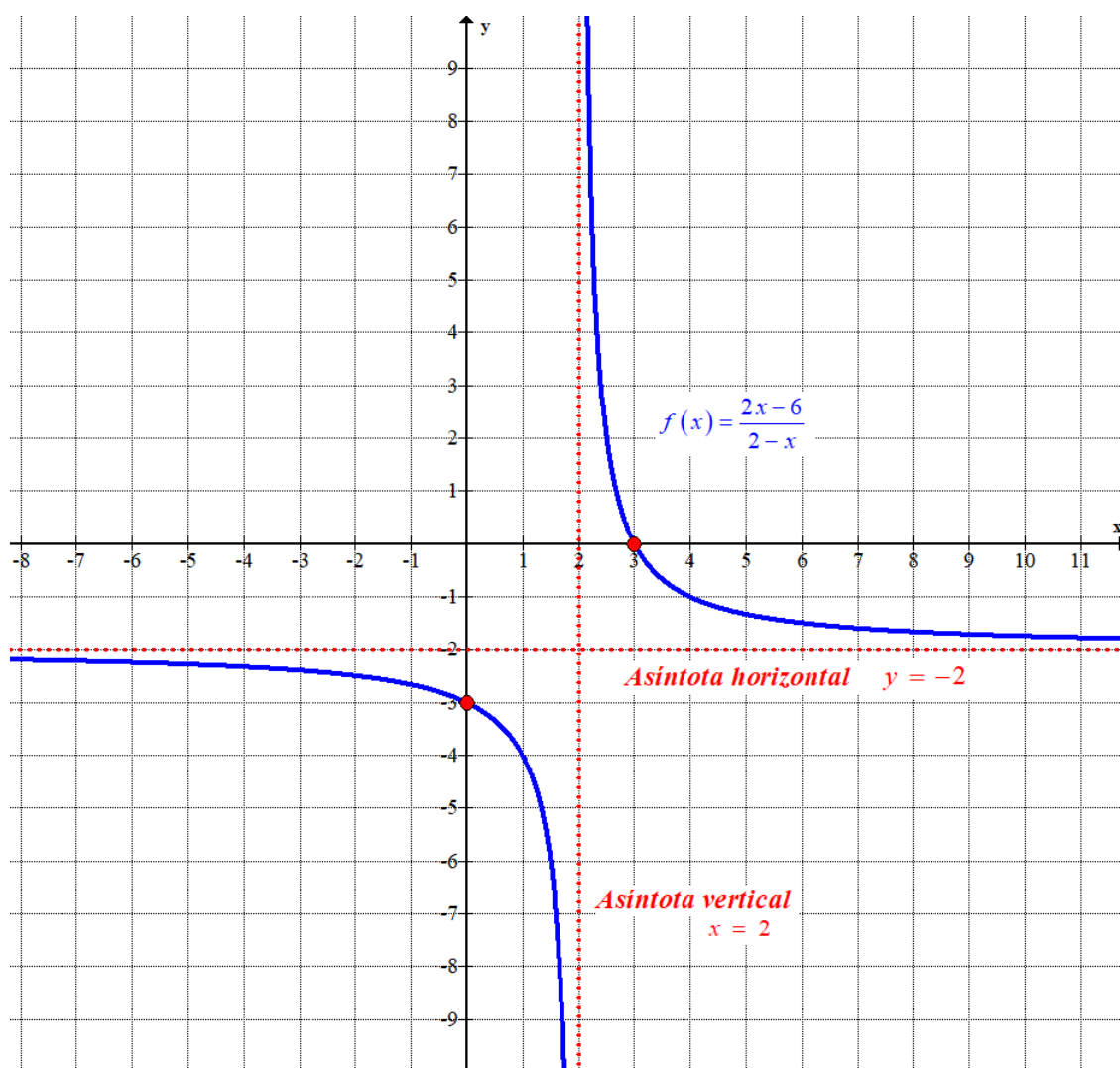
- c) Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{2x-6}{2-x} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0-6}{2-0} = -3 \Rightarrow \boxed{A(0, -3)}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{2x-6}{2-x} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2x-6}{2-x} = 0 \Rightarrow 2x-6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \boxed{B(3, 0)}$$

Obtenemos una tabla de valores de la función y la representamos gráficamente.

x	$f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$
0	-3
1	-4
1.5	-6
2.5	2
3	0
4	-1



EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- a) **(0.75 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
 b) **(0.75 puntos)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
 c) **(1 punto)** Represente la región del plano limitada por la gráfica de f , las rectas $x = 3$, $x = 5$ y el eje de abscisas. Calcule su área.

a) La función en el intervalo $(-\infty, 4)$ tiene la expresión $f(x) = -x^2 + 4x + 3$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $f'(x) = -2x + 4$.

La función en el intervalo $(4, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = 2x - 5$, es una función polinómica, por lo que es continua y derivable con derivada $f'(x) = 2$.

Estudiamos la continuidad en $x = 4$.

- Existe $f(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} -x^2 + 4x + 3 = -4^2 + 4 \cdot 4 + 3 = 3$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x - 5 = 3$
- $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 3$

Se cumplen todas las condiciones y la función es continua en $x = 4$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 4$. Para ello comprobamos si las derivadas laterales en dicho valor coinciden.

La derivada de la función es $f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(4^-) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} -2x + 4 = -2 \cdot 4 + 4 = -4 \\ f'(4^+) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(4^-) = -4 \neq 2 = f'(4^+)$$

La función no es derivable en $x = 4$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$.

- b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

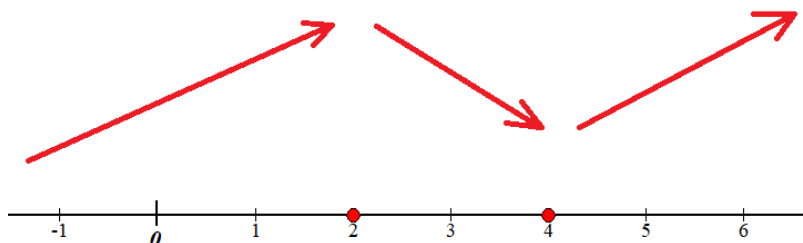
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \in (-\infty, 4) \\ 2 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 2$ y $x = 4$.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -2 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$. La función crece en $(-\infty, 2)$.

- En el intervalo $(2, 4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0$. La función decrece en $(2, 4)$
- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 2 > 0$. La función crece en $(4, +\infty)$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(2, 4)$ y crece en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$.

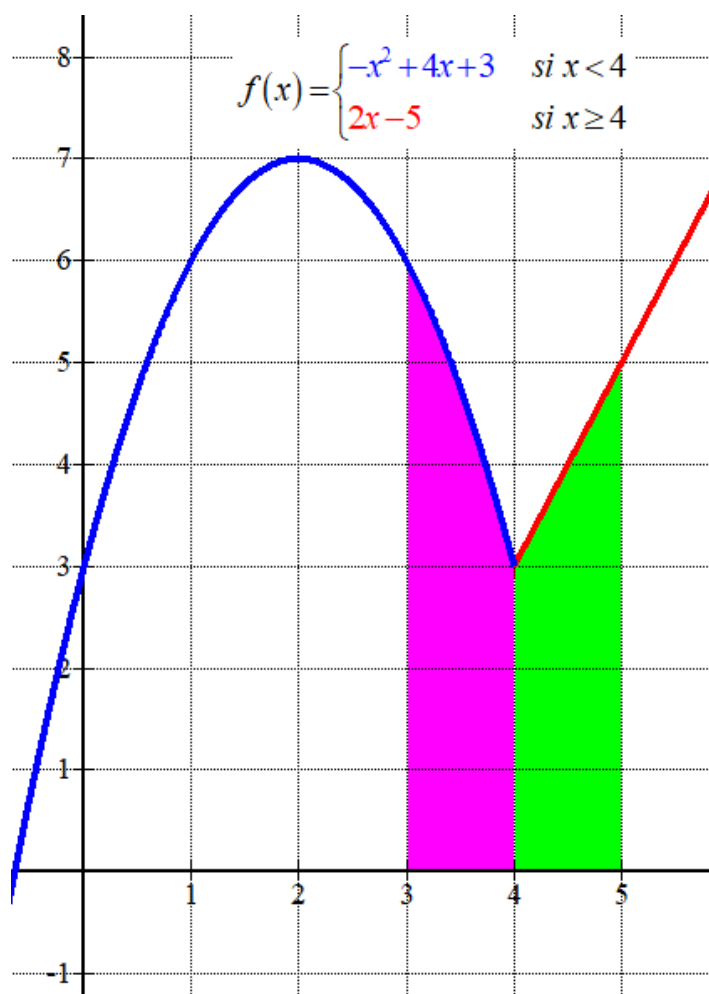
La función presenta un máximo relativo en $x = 2$ y un mínimo relativo en $x = 4$.

c) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{-2} = \\ = \begin{cases} \frac{-4 + \sqrt{28}}{-2} = 2 - \sqrt{7} \approx -0.65 \\ \frac{-4 - \sqrt{28}}{-2} = 2 + \sqrt{7} \approx 4.6 \notin (-\infty, 4) \end{cases} \\ 2x - 5 = 0 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \notin [4, +\infty) \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores, dibujamos la gráfica de la función y la región de la cual queremos hallar el área.

$x < 4$		$x \geq 4$	
x	$y = -x^2 + 4x + 3$	x	$y = 2x - 5$
0	3	4	3
1	6	5	5
2	7 Vértice	6	7
3	6		



La función cambia de definición en $x = 4$ y el área pedida es la suma de dos integrales definidas: una entre 3 y 4, la otra entre 4 y 5 de la función.

$$\int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 -x^2 + 4x + 3 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right]_3^4 =$$

$$= \left[-\frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 \right] - \left[-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right] = \frac{-64}{3} + 32 + 12 + 9 - 18 - 9 = \boxed{\frac{14}{3}}$$

$$\int_4^5 f(x) dx = \int_4^5 2x - 5 dx = \left[x^2 - 5x \right]_4^5 = \left[5^2 - 5 \cdot 5 \right] - \left[4^2 - 5 \cdot 4 \right] = -16 + 20 = \boxed{4}$$

$$\text{Área} = \frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3} \approx 8.67 \text{ u}^2$$

El área de la región del plano limitada por la gráfica de f , las rectas $x=3$, $x=5$ y el eje de abscisas tiene un valor aproximado de 8.67 unidades cuadradas.

EJERCICIO 5

El 7% de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36% tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28% no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad.

- a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.
 b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.
 c) **(0.5 puntos)** Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?
 d) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos “tener coche” y “no tener moto”? ¿Son incompatibles?

Llamamos M al suceso “El habitante tiene moto” y C a “el habitante tiene coche”.

Sabemos que $P(\overline{M} \cap \overline{C}) = 0.07$, $P(M / C) = 0.36$ y $P(\overline{M} / \overline{C}) = 0.28$.

Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{M} \cap \overline{C}) = 0.07 \Rightarrow P(\overline{M \cup C}) = 0.07 \Rightarrow 1 - P(M \cup C) = 0.07 \Rightarrow P(M \cup C) = 0.93$$

Aplicamos el teorema de Bayes a $P(\overline{M} / \overline{C}) = 0.28$.

$$P(\overline{M} / \overline{C}) = 0.28 \Rightarrow \frac{P(\overline{M} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = 0.28 \Rightarrow \frac{0.07}{1 - P(C)} = 0.28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.07 = 0.28 - 0.28P(C) \Rightarrow -0.21 = -0.28P(C) \Rightarrow P(C) = \frac{0.21}{0.28} = \frac{3}{4} = \boxed{0.75}$$

Aplicamos el teorema de Bayes a $P(M / C) = 0.36$.

$$P(M / C) = 0.36 \Rightarrow \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = 0.36 \Rightarrow \frac{P(M \cap C)}{0.75} = 0.36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M \cap C) = 0.36 \cdot 0.75 = \boxed{0.27}$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(M \cup C) = 0.93 \Rightarrow P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 0.93 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M) + 0.75 - 0.27 = 0.93 \Rightarrow P(M) = 0.93 - 0.75 + 0.27 = \boxed{0.45}$$

Para ordenar todos los datos obtenidos los ponemos en una tabla de contingencia

	Con coche	Sin coche	
Con moto	27		45
Sin moto		7	
	75		100

Completamos la tabla.

	Con coche	Sin coche	
Con moto	27	18	45
Sin moto	48	7	55
	75	25	100

- a) De 100 personas hay 18 que tienen moto y no tienen coche, y 48 que tienen coche y no tienen moto. Hay $18 + 48 = 66$ personas que solo tienen uno de los dos vehículos.

La probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos tiene un valor de $\frac{66}{100} = 0.66$.

- b) Hay 7 personas sin ninguno de los dos vehículos, por lo que hay $100 - 7 = 93$ que tienen alguno de los dos vehículos.

La probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos vale $\frac{93}{100} = 0.93$.

- c) Nos piden calcular $P(\overline{M} / C)$. Hay 75 personas con coche y de ellas 48 no tienen moto.

Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que una persona con coche no tenga moto es de $\frac{48}{75} = 0.64$.

- d) Para que sean independientes los sucesos $C = \text{“tener coche”}$ y $\overline{M} = \text{“no tener moto”}$ debe cumplirse que $P(C \cap \overline{M}) = P(C) \cdot P(\overline{M})$.

$$\left. \begin{array}{l} P(C \cap \overline{M}) = \frac{48}{100} = 0.48 \\ P(C) \cdot P(\overline{M}) = 0.75 \cdot 0.55 = 0.4125 \end{array} \right\} \Rightarrow P(C \cap \overline{M}) = 0.48 \neq 0.4125 = P(C) \cdot P(\overline{M})$$

Como no se cumple la igualdad los sucesos “tener coche” y “no tener moto” no son independientes.

Para que sean incompatibles debe cumplirse que $P(C \cap \overline{M}) = 0$ y esto no se cumple pues la probabilidad del suceso intersección la hemos calculado y vale 0.48 distinto de 0. Los sucesos no son incompatibles.

EJERCICIO 6

Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86% de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:

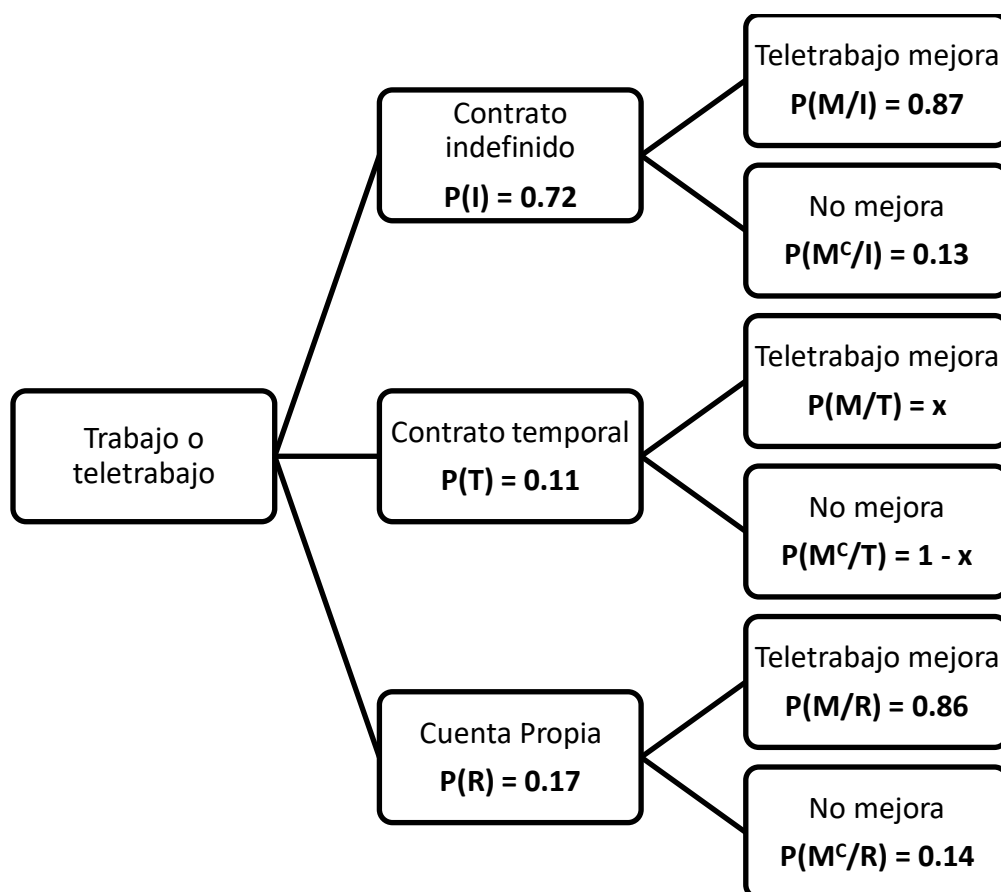
- a) **(1.5 puntos)** Opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.
 b) **(1 punto)** No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

Llamamos I al suceso “trabaja por cuenta ajena con contrato indefinido”, T a “trabaja por cuenta ajena con contrato temporal” y R a “trabaja por cuenta propia”. Llamamos M al suceso “piensa que el teletrabajo mejora la conciliación familiar”.

Sabemos que $P(I) = 0.72$, $P(T) = 0.11$, $P(R) = 1 - 0.72 - 0.11 = 0.17$.

Sabemos que $P(M/I) = 0.87$, $P(M/R) = 0.86$. Falta averiguar el valor de $P(M/T)$.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) El 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar, por lo que el restante $100 - 12.51 = 87.49$ % piensa que mejora la conciliación familiar.

Tenemos que $P(M) = 0.8749$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total y obtenemos el valor de $P(M/T)$.

$$P(M) = P(I)P(M/I) + P(T)P(M/T) + P(R)P(M/R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8749 = 0.72 \cdot 0.87 + 0.11 \cdot P(M/T) + 0.17 \cdot 0.86 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8749 - 0.72 \cdot 0.87 - 0.17 \cdot 0.86 = 0.11 \cdot P(M/T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(M/T) = \frac{0.1023}{0.11} = 0.93}$$

La probabilidad de que el trabajador elegido al azar opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal es de 0.93.

- b) Nos piden calcular $P(R^c / M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R^c / M) = \frac{P(R^c \cap M)}{P(M)} = \frac{P(I \cap M) + P(T \cap M)}{P(M)} =$$

$$= \frac{P(I)P(M/I) + P(T)P(M/T)}{P(M)} =$$

$$= \frac{0.72 \cdot 0.87 + 0.11 \cdot 0.93}{0.8749} = \boxed{\frac{7287}{8749} \approx 0.8329}$$

La probabilidad de que el trabajador elegido al azar no esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar tiene un valor aproximado de 0.8329.

EJERCICIO 7

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.

a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?

b) **(0.5 puntos)** ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas?

c) **(1 punto)** Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

X = La altura de un cierto tipo de plantas de maíz (en centímetros).

$X \sim N(145, 22)$.

a) Nos piden calcular $P(135 \leq X \leq 155)$.

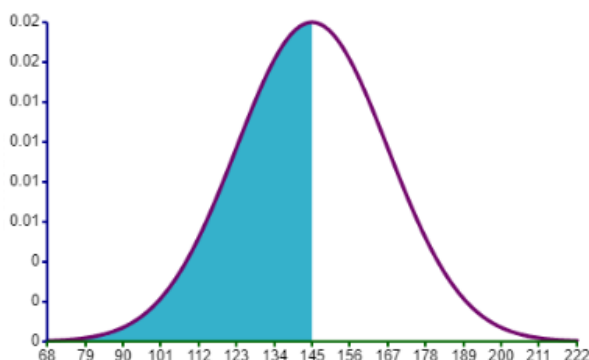
$$\begin{aligned}
 P(135 \leq X \leq 155) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{135-145}{22} \leq Z \leq \frac{155-145}{22}\right) = \\
 &= P(-0.455 \leq Z \leq 0.455) = P(Z \leq 0.455) - P(Z \leq -0.455) = \\
 &= P(Z \leq 0.455) - P(Z \geq 0.455) = P(Z \leq 0.455) - [1 - P(Z \leq 0.455)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \frac{0.6736 + 0.6772}{2} - 1 + \frac{0.6736 + 0.6772}{2} = \boxed{0.3508}
 \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6480	0,6517	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019

El porcentaje de plantas que tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm es aproximadamente del 35.08%.

b) Nos piden hallar “a” tal que $P(X \leq a) = 0.5$. Por la simetría de la distribución normal este valor es la media de la distribución.

$$P(X < 145) = 0.5000$$



La altura que debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas es de, al menos, 145 centímetros.

- c) La distribución de las medias muestrales de tamaño 16 sigue una distribución normal con la misma media (145 cm) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{22}{\sqrt{16}} = 5.5$ centímetros.

$$\overline{X}_{16} = N(145, 5.5).$$

Nos piden calcular $P(140 \leq \overline{X}_{16} \leq 151)$.

$$P(140 \leq \overline{X}_{16} \leq 151) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{140-145}{5.5} \leq Z \leq \frac{151-145}{5.5}\right) =$$

$$= P(-0.91 \leq Z \leq 1.09) = P(Z \leq 1.09) - P(Z \leq -0.91) =$$

$$= P(Z \leq 1.09) - P(Z \geq 0.91) = P(Z \leq 1.09) - [1 - P(Z \leq 0.91)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.8621 - 1 + 0.8186 = \boxed{0.6807}$$

La probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm es de 0.6807.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.

a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota.

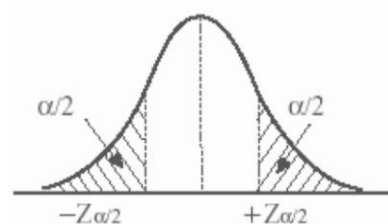
b) **(1.25 puntos)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2%?

Tamaño de la muestra es $n = 300$ viajeros. $pr = \frac{12}{300} = 0.04$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.04 = 0.96$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9824	0,9828	0,9832	0,9836	0,9840	0,9844	0,9848	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{300}} \approx 0.0245$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error, pr + Error) = (0.04 - 0.0245, 0.04 + 0.0245) = (0.0155, 0.0645)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

El error máximo es de 0.02, lo sustituimos en la fórmula y despejamos n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.96} = \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.96} \right)^2 = \frac{0.04 \cdot 0.96}{n} \Rightarrow n = \frac{0.04 \cdot 0.96}{\left(\frac{0.02}{1.96} \right)^2} \simeq 368.8 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 369 viajeros.