

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde k es un parámetro real.

- Calcula $A \cdot B$, y determina en función de los valores reales de k si la matriz $A \cdot B$ tiene inversa. (4 puntos)
- Estudia lo mismo que en el apartado a) pero ahora para la matriz $B \cdot A$. (4 puntos)
- Para $k = -2$ calcula la matriz inversa de $B \cdot A$. (2 puntos)

2. Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros) vienen dados por:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ -(x-3)^2 + 30, & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

- ¿Es continua la función $B(x)$? (3 puntos)
- ¿Es derivable? Da el conjunto donde es derivable la función. (2 puntos)
- Realiza un dibujo de la función en su dominio. (3 puntos)
- Determine su beneficio máximo y el beneficio mínimo. (1 punto)
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios. (1 punto)

3. Un dado está cargado de forma que la probabilidad de obtener un 6 es de $1/2$ y las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales a p . Se lanza este dado, calcule la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

- Se obtiene un dos. (4 puntos)
- No se obtiene un tres. (2 puntos)
- Se obtiene un número par. (2 puntos)
- Se obtiene un número impar. (2 puntos)

4. En una fábrica de pilas se sabe que la desviación típica de la duración de un determinado tipo de pila es de 80 horas.

- Si $\alpha = 0.2$ (nivel de significación), y en una muestra de 50 de estas pilas la duración media es de 500 horas, determine el intervalo de confianza para la duración media poblacional. (5 puntos)
- Si la duración de este tipo de pila sigue una normal de media 500 horas y desviación típica de 80 horas, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de 9 pilas fuera mayor que 520 horas? (5 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. El precio de la estancia diaria en un hotel es de 50 € por persona. Los niños pagan el 50% de ese precio, y los jubilados pagan el 60% de ese precio. Determine el número de personas que no son ni niños ni jubilados, el número de niños y el de jubilados que había un día en el hotel si se sabe que: había 200 personas, el número de jubilados era igual al 25% del número de niños y recaudaron un total de 5.680 € por la estancia de todos. (10 puntos)

2. Considera la función $f(x, y) = x - y$.

a) Representa el conjunto de puntos del plano definido por:

$$A = \{(x, y) : 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$$

y calcula el valor máximo de $f(x, y)$ en A. ¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que se obtenga el mismo conjunto? (5 puntos)

b) Indica si la función $f(x, y)$ alcanza el valor máximo en el conjunto: (5 puntos)

$$B = \{(x, y) : 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$$

3. Considera la función

$$h(x) = x^2 e^{x^3}.$$

a) Calcula una primitiva de esta función. (4 puntos)

b) Calcula la siguiente integral definida: (6 puntos)

$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3} dx$$

y comprueba que su valor es $\frac{1}{3}$.

4. En una universidad en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, de ciencias y de letras, terminan la carrera el 5% de ingeniería, el 10% de ciencias y el 20% de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería, el 30%, ciencias y el 50%, letras. Tomado un estudiante al azar, se pide:

a) Probabilidad de que haya terminado la carrera y sea de ingeniería. (6 puntos)

b) Nos dice que ha terminado la carrera, probabilidad de que sea de ingeniería. (4 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde k es un parámetro real.

- a) Calcula $A \cdot B$, y determina en función de los valores reales de k si la matriz $A \cdot B$ tiene inversa. (4 puntos)
- b) Estudia lo mismo que en el apartado a) pero ahora para la matriz $B \cdot A$. (4 puntos)
- c) Para $k = -2$ calcula la matriz inversa de $B \cdot A$. (2 puntos)

a) Obtenemos la expresión de $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+0 & 0 & -1+0 \\ 2k+k & 0+k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k + k - k(2k-2) = 2k^2 - 2k - 2k^2 + 2k = 0$$

El determinante de la matriz $A \cdot B$ es siempre nulo por lo que no tiene inversa para ningún valor de k .

b) Calculamos la expresión de $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+0-0 & 0+0-1 \\ 1+2+0 & 0+k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k(k+2) + 3 = k^2 + 2k + 3$$

$$|B \cdot A| = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \text{No existe}$$

El determinante nunca se anula. La matriz $B \cdot A$ tiene inversa para cualquier valor de k .

c) Para $k = -2$ la matriz queda $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$(B \cdot A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B \cdot A)^T)}{|B \cdot A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}{0+3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

2. Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros) vienen dados por:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ -(x-3)^2 + 30, & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

- a) ¿Es continua la función $B(x)$? (3 puntos)
 b) ¿Es derivable? Da el conjunto donde es derivable la función. (2 puntos)
 c) Realiza un dibujo de la función en su dominio. (3 puntos)
 d) Determine su beneficio máximo y el beneficio mínimo. (1 punto)
 e) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios. (1 punto)

- a) La función es continua en cada trozo pues son funciones polinómicas.

Estudiamos la continuidad en el cambio de definición.

En $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} B(3) &= 5 \cdot 3 + 15 = 30 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 5x + 15 = 30 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} -(x-3)^2 + 30 = 30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} B(x) = B(3) = 30$$

La función es continua en $x = 3$. La función es continua en $[0, 8]$.

- b) La función es derivable en $[0, 3) \cup (3, 8]$ siendo su derivada

$$B'(x) = \begin{cases} 5, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ -2(x-3), & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad de la función en $x = 3$. Vemos si coinciden los valores de las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} B'(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} B'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 5 = 5 \\ B'(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} B'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} -2(x-3) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B'(3^-) = 5 \neq 0 = B'(3^+)$$

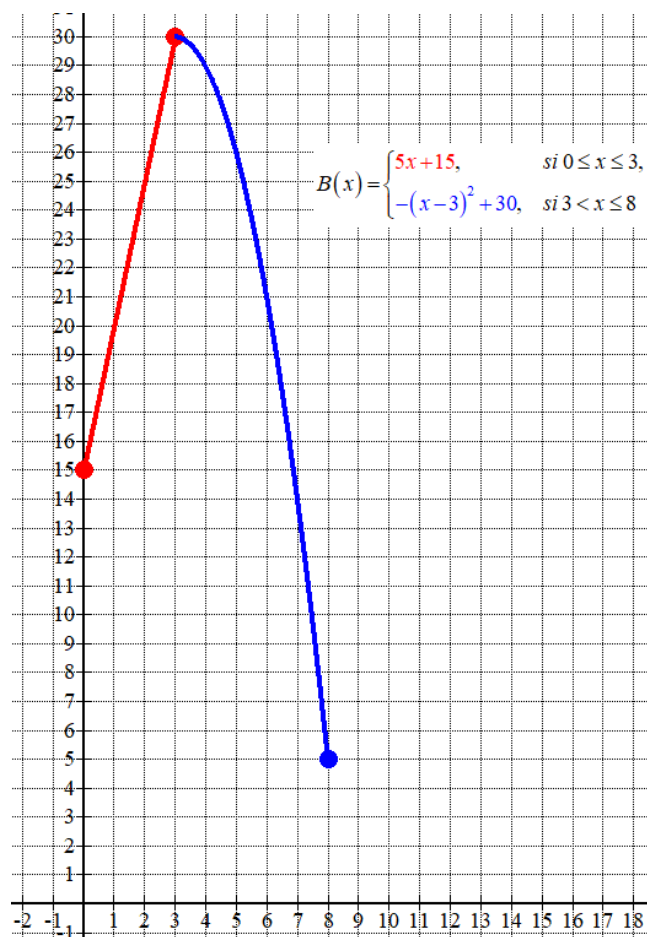
La función no es derivable en $x = 3$. La función es derivable en $[0, 3) \cup (3, 8]$.

- c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica. Sabemos que es un trozo de recta y un trozo de parábola.

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ -(x-3)^2 + 30, & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

x	$B(x) = 5x + 15$
0	15
1	20
3	30

x	$B(x) = -(x-3)^2 + 30$
4	29
5	26
8	5



- d) Observando la gráfica sabemos que el beneficio máximo se consigue en $x = 3$ y es de 30 mil euros y el mínimo ese obtiene en $x = 8$ y es de 5 mil euros.
- e) Observando la gráfica sabemos que los beneficios crecen con una inversión de 0 a 3000 euros y decrecen con una inversión de 3000 a 8000 euros

3. Un dado está cargado de forma que la probabilidad de obtener un 6 es de $1/2$ y las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales a p . Se lanza este dado, calcule la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

- | | |
|--------------------------------|------------|
| a) Se obtiene un dos. | (4 puntos) |
| b) No se obtiene un tres. | (2 puntos) |
| c) Se obtiene un número par. | (2 puntos) |
| d) Se obtiene un número impar. | (2 puntos) |

La probabilidad de sacar 1, 2, 3, 4 o 5 es p . La probabilidad de sacar 6 es $1/2$.

La suma de las probabilidades de los sucesos elementales es 1.

$$5p + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 5p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{10}$$

La probabilidad de sacar 1, 2, 3, 4 o 5 es $\frac{1}{10} = 0.1$.

- a) La probabilidad de sacar 2 la hemos obtenido y vale $\frac{1}{10} = 0.1$.
- b) La probabilidad de sacar 3 es $\frac{1}{10} = 0.1 \rightarrow$ la probabilidad de no sacar 3 es $1 - 0.1 = 0.9$.
- c) Para sacar número par debe salir 2, 4 o 6. La probabilidad de este suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales.

$$P(\text{Sacar par}) = P(\text{sacar 2}) + P(\text{sacar 4}) + P(\text{sacar 6}) =$$

$$= 0.1 + 0.1 + 0.5 = \boxed{0.7}$$

- d) El suceso “sacar número impar” es el complementario del suceso “sacar par” por lo que su probabilidad es $1 - 0.7 = 0.3$.

4. En una fábrica de pilas se sabe que la desviación típica de la duración de un determinado tipo de pila es de 80 horas.

a) Si $\alpha = 0.2$ (nivel de significación), y en una muestra de 50 de estas pilas la duración media es de 500 horas, determine el intervalo de confianza para la duración media poblacional. (5 puntos)

b) Si la duración de este tipo de pila sigue una normal de media 500 horas y desviación típica de 80 horas, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de 9 pilas fuera mayor que 520 horas? (5 puntos)

a) $X =$ duración de un determinado tipo de pila en horas. $X = N(\mu, 80)$.

El tamaño de la muestra es $n = 50$. La media muestral es $\bar{x} = 500$ horas.

Para un nivel de significación de 0.2 tenemos que $\frac{\alpha}{2} = 0.1 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.1 = 0.9$.

Mirando en la tabla de la $N(0, 1)$ tenemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

Determinamos el error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.285 \frac{80}{\sqrt{50}} \approx 14.54$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es.

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (500 - 14.54, 500 + 14.54) = (485.46, 514.54)$$

b) $X =$ duración de un determinado tipo de pila en horas. $X = N(500, 80)$.

Tomamos una muestra de 9 pilas. Las medias muestrales siguen una ley normal de media

la misma que la distribución de X y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{80}{\sqrt{9}} = \frac{80}{3}$. $\bar{X}_9 = N\left(500, \frac{80}{3}\right)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_9 > 520)$.

$$P(\bar{X}_9 > 520) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\bar{X}_9 - \mu}{\sigma} > \frac{520 - 500}{80/3}\right) =$$

$$= P(Z > 0.75) = 1 - P(Z \leq 0.75) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

	0	1	2	3	4	5
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023

OPCIÓN B

1. El precio de la estancia diaria en un hotel es de 50 € por persona. Los niños pagan el 50% de ese precio, y los jubilados pagan el 60% de ese precio. Determine el número de personas que no son ni niños ni jubilados, el número de niños y el de jubilados que había un día en el hotel si se sabe que: había 200 personas, el número de jubilados era igual al 25% del número de niños y recaudaron un total de 5.680 € por la estancia de todos. (10 puntos)

Llamamos “x” el número de niños, “y” al número de jubilados y “z” al número de personas que no son ni niños ni jubilados.

- En el hotel había 200 personas $\rightarrow x + y + z = 200$
- El número de jubilados era igual al 25% del número de niños $\rightarrow y = 0.25 \cdot x$
- Se recaudaron un total de 5.680 € por la estancia de todos (50 € tarifa normal, los niños pagan el 50%, es decir, 25 € y un jubilado paga el 60%, es decir, $0.6 \cdot 50 = 30$ €) $\rightarrow 25x + 30y + 50z = 5680$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y = 0.25 \cdot x \\ 25x + 30y + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ \Rightarrow y = 0.25 \cdot x \\ 25x + 30y + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 0.25x + z = 200 \\ 25x + 30 \cdot 0.25x + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.25x + z = 200 \\ 32.5x + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 200 - 1.25x \\ 32.5x + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow 32.5x + 50(200 - 1.25x) = 5680 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32.5x + 10000 - 62.5x = 5680 \Rightarrow -30x = -4320 \Rightarrow x = \frac{4320}{30} = 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 200 - 1.25 \cdot 144 = 20 \\ y = 0.25 \cdot 144 = 36 \end{array} \right.$$

En el hotel había 144 niños, 36 jubilados y 20 personas que no eran ni jubilados ni niños.

2. Considera la función $f(x, y) = x - y$.

a) Representa el conjunto de puntos del plano definido por:

$$A = \{(x, y) : 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$$

y calcula el valor máximo de $f(x, y)$ en A. ¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que se obtenga el mismo conjunto? (5 puntos)

b) Indica si la función $f(x, y)$ alcanza el valor máximo en el conjunto: (5 puntos)

$$B = \{(x, y) : 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$$

a) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región.

$$3x + y = 15$$

$$y - x = -5$$

$$2x + 3y = 60$$

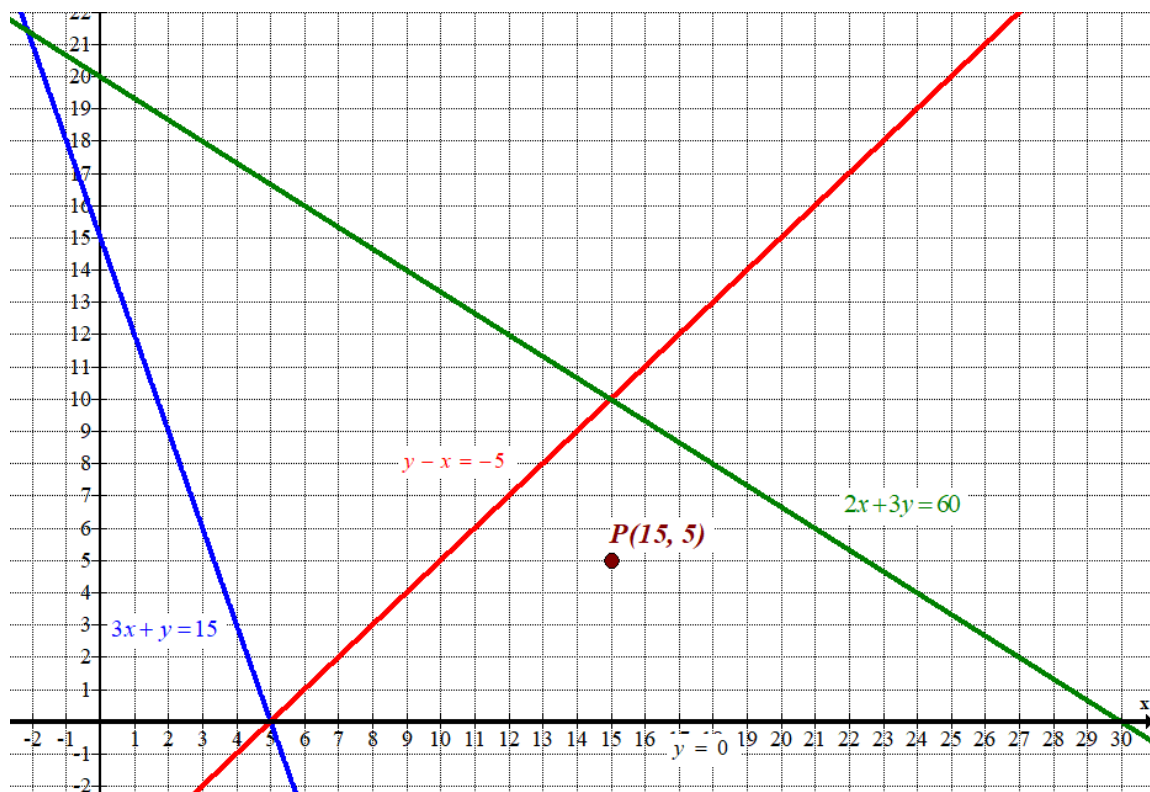
$$y = 0$$

x	y = 15 - 3x
0	15
3	6
5	0

x	y = x - 5
0	-5
5	0
15	10

x	y = $\frac{60 - 2x}{3}$
0	20
15	10
30	0

Eje OX



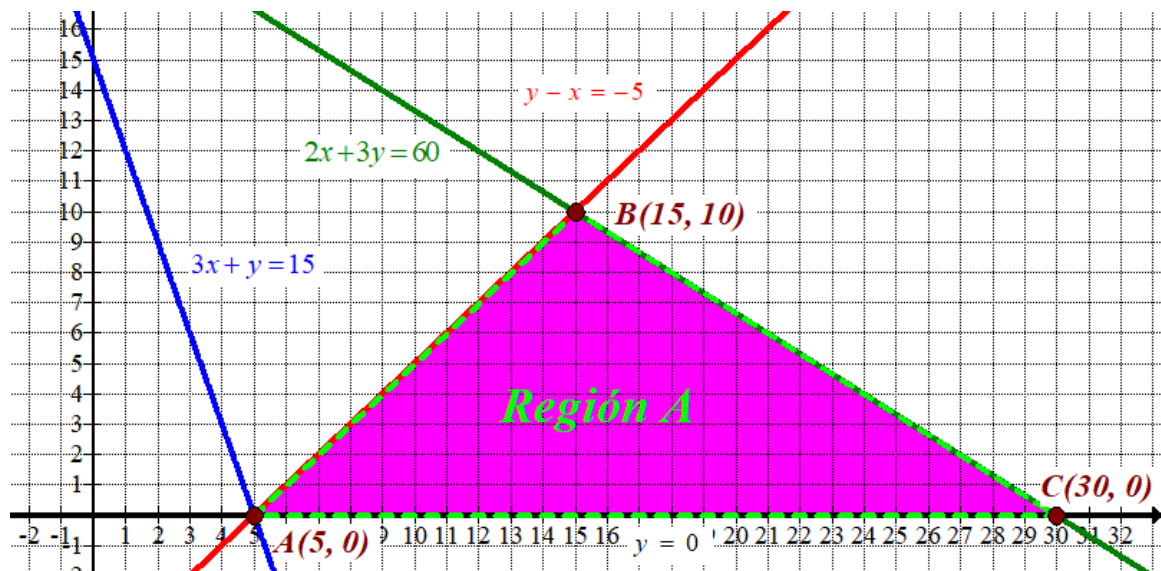
Como las restricciones son:

$$A = \{(x, y) : 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$$

La región factible está situada por debajo de las rectas roja y verde, y por encima de la recta azul y el eje OX. Comprobamos que el punto P(15, 5) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$3 \cdot 15 + 5 \geq 15, 5 - 15 \leq -5, 2 \cdot 15 + 3 \cdot 5 \leq 60, 5 \geq 0$$

Se cumplen todas. Coloreo de rosa la región A en la siguiente imagen.



Valoro la función $f(x, y) = x - y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(5, 0) \rightarrow f(5, 0) = 5 - 0 = 5$$

$$B(15, 10) \rightarrow f(15, 10) = 15 - 10 = 5$$

$$C(30, 0) \rightarrow f(30, 0) = 30 - 0 = 30$$

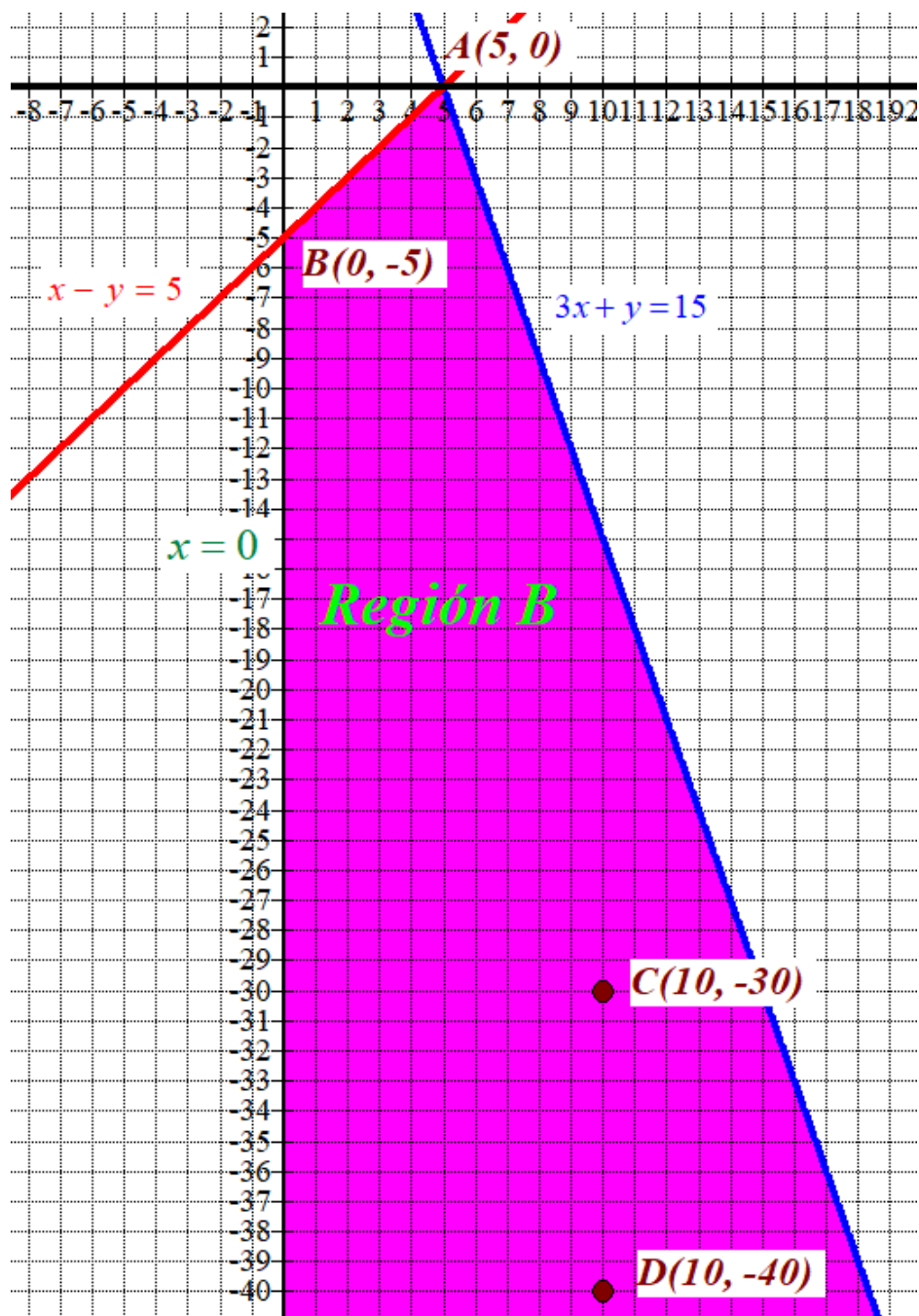
El valor máximo de la función en la región A es 30 y se alcanza en el punto C(30, 0).

¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que se obtenga el mismo conjunto?

Para la definición de la región A no influye nada la recta azul que se corresponde con la inecuación $3x + y \geq 15$. Se podría eliminar esta inecuación y la región seguiría siendo la misma.

b) Dibujamos la región $B = \{(x, y) : 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$.

$3x + y = 15$		$x - y = 5$		$x = 0$
x	$y = 15 - 3x$	x	$y = x - 5$	
0	15	0	-5	Eje OY
3	6	5	0	
5	0	15	10	



La región B no es acotada. Valoramos la función $f(x, y) = x - y$ en los vértices de la región y en dos puntos alejados de ellos para averiguar si esta función tiene un máximo en dicha región.

$$A(5, 0) \rightarrow f(5, 0) = 5 - 0 = 5$$

$$B(0, -5) \rightarrow f(0, -5) = 0 + 5 = 5$$

$$C(10, -30) \rightarrow f(10, -30) = 10 + 30 = 40$$

$$D(10, -40) \rightarrow f(10, -40) = 10 + 40 = 50$$

El valor máximo de la función en la región B no existe ya que al ser una región no acotada si tomo el punto $E(10, -50)$ perteneciente a la región el valor de la función $f(x, y) = x - y$ es mayor que el valor obtenido en C y en D.

3. Considera la función

$$h(x) = x^2 e^{x^3}.$$

a) Calcula una primitiva de esta función.

(4 puntos)

b) Calcula la siguiente integral definida:

(6 puntos)

$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3} dx$$

y comprueba que su valor es $\frac{1}{3}$.

a) Calculamos la integral de la función usando un cambio de variable.

$$\int h(x) dx = \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^{x^3} = t \\ 3x^2 e^{x^3} dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int dt = \frac{1}{3} t = \boxed{\frac{1}{3} e^{x^3} + K}$$

Donde $K \in \mathbb{R}$

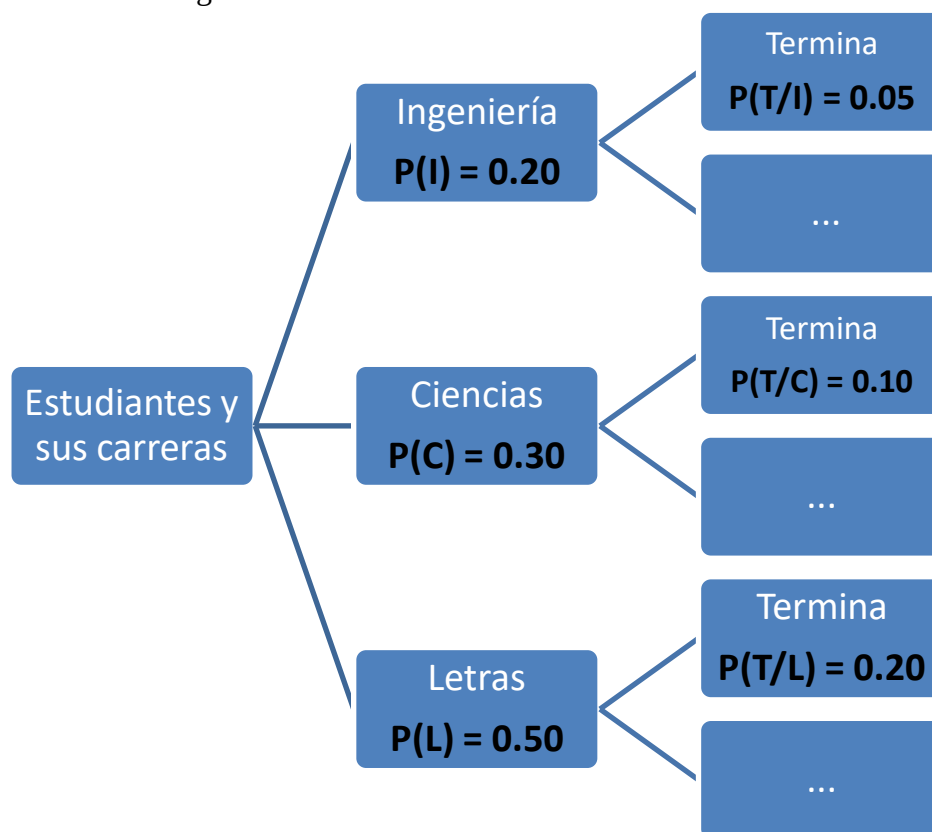
b) Usamos la integral indefinida obtenida en el apartado anterior.

$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3} e^{x^3} \right]_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} = \frac{1}{3} e^{(\sqrt[3]{\ln 3})^3} - \frac{1}{3} e^{(\sqrt[3]{\ln 2})^3} = \frac{1}{3} e^{\ln 3} - \frac{1}{3} e^{\ln 2} = \frac{1}{3} 3 - \frac{1}{3} 2 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

4. En una universidad en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, de ciencias y de letras, terminan la carrera el 5% de ingeniería, el 10% de ciencias y el 20% de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería, el 30%, ciencias y el 50%, letras. Tomado un estudiante al azar, se pide:

- a) Probabilidad de que haya terminado la carrera y sea de ingeniería. (6 puntos)
 b) Nos dice que ha terminado la carrera, probabilidad de que sea de ingeniería. (4 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(T \cap I)$.

$$P(T \cap I) = P(I)P(T/I) = 0.2 \cdot 0.05 = \boxed{0.01}$$

La probabilidad de que haya terminado la carrera y sea de ingeniería es de 0.01.

- b) Nos piden calcular $P(I/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplico el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(I/T) &= \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{P(I \cap T)}{P(I)P(T/I) + P(C)P(T/C) + P(L)P(T/L)} = \\ &= \frac{0.01}{0.2 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.2} = \boxed{\frac{1}{14} \approx 0.0714} \end{aligned}$$

La probabilidad de que sea de ingeniería sabiendo que ha terminado la carrera es de $\frac{1}{14} \approx 0.0714$.