

UNIBERTSITATERA
SARTZEKO EBALUAZIOA

2024ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA IIEVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2024

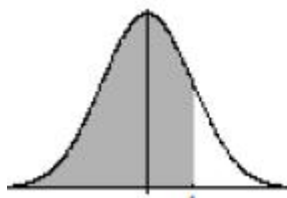
MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0, 1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA**A.1. [hasta 2,5 puntos]**

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.

¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

B.1. [hasta 2,5 puntos]

Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar.

Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

- c) [2,2 puntos] ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?
- d) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

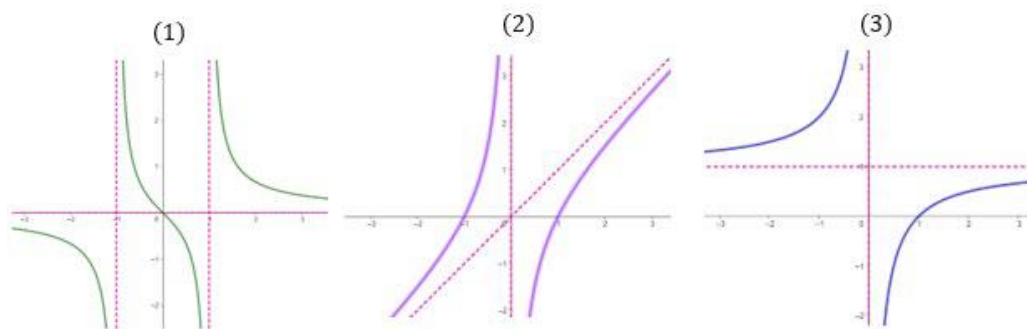
- a) [1 punto] Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0,0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2,-4)$.
- b) [0,75 puntos] Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.
- c) [0,75 puntos] Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

- a) [0,9 puntos] Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A) f(x) = \frac{x-1}{x}; \quad B) g(x) = \frac{x}{x^2-1}; \quad C) h(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) [1,6 puntos] En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]

Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

- [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?
- [0,75 puntos] Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.
- [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.
- [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

B.3. [hasta 2,5 puntos]

En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A, el 25 % en la pastelería B, y el 15 % en ambas.

Se escoge una persona al azar:

- [0,8 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B?
- [0,35 puntos] Si esta persona es cliente de la pastelería A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B?
- [0,35 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B?
- [1 punto] ¿Son independientes los sucesos “ser cliente de A” y “ser cliente de B”? Justifica tu respuesta.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]

En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos.

Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

- [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.
- [0,75 puntos] Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?
- [1 punto] Si la desviación típica es 2,6 puntos y el Apto se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

- a) [1,25 puntos] Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.
- b) [0,75 puntos] Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
- c) [0,5 puntos] Interpreta los resultados obtenidos.

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.

¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Llamamos “x” a la puntuación obtenida en el primer problema, “y” a la obtenida en el segundo y “z” a la obtenida en el tercero.

“Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos” $\rightarrow x + y + z = 7.2$.

“La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo” $\rightarrow x = 1.40 \cdot y$.

“La del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo” $\rightarrow z = 2(x + y)$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.2 \\ x = 1.40 \cdot y \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.40y + y + z = 7.2 \\ z = 2(1.40y) + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.40y + z = 7.2 \\ z = 4.8y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4y + 4.8y = 7.2 \Rightarrow 7.2y = 7.2 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 4.8 \cdot 1 = 4.8} \\ \boxed{x = 1.4 \cdot 1 = 1.4} \end{cases}$$

Aitor ha obtenido 1.4 puntos en el primer problema, 1 punto en el segundo y 4.8 en el tercero.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar.

Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

c) [2,2 puntos] ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?

d) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

a) Llamamos “x” al número de trufas dulces e “y” al número de trufas amargas.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Cacao	Nata	Azúcar	Ingresos
Trufa dulce (x)	20x gr	20x gr	30x gr	x €
Trufa amarga (y)	100y gr	20y gr	15y gr	1,3y €
TOTALES	20x+100y	20x+20y	30x+15y	x+1.3y
DISPONIBILIDAD	30 000 gr	8 000 gr	10500 gr	

La función a maximizar son los ingresos $I(x, y) = x + 1.3y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“La pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar” $\rightarrow$
 $20x + 100y \leq 30000$, $20x + 20y \leq 8000$, $30x + 15y \leq 10500$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 100y \leq 30000 \\ 20x + 20y \leq 8000 \\ 30x + 15y \leq 10500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + 5y = 1500$$

$$x + y = 400$$

$$2x + y = 700$$

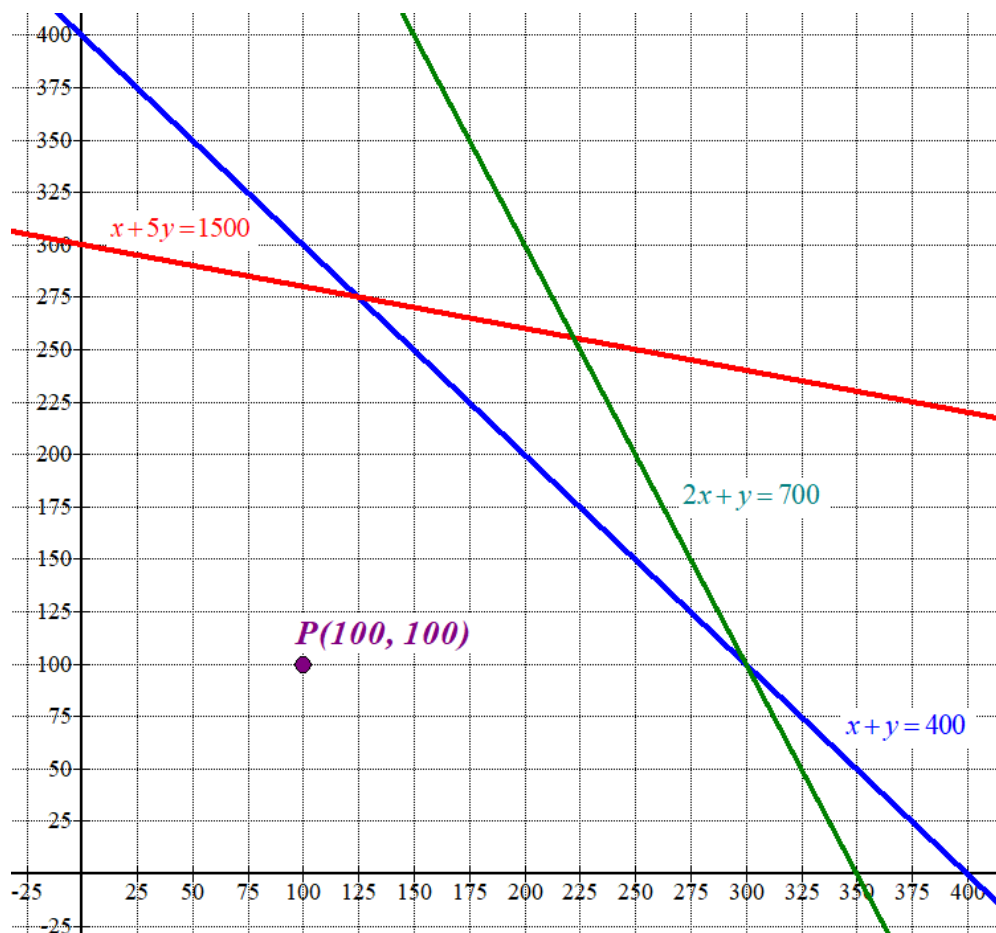
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{1500 - x}{5}$
0	300
125	275
500	200

x	$y = 400 - x$
0	400
125	275
300	100
400	0

x	$y = 700 - 2x$
0	700
300	100
350	0

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

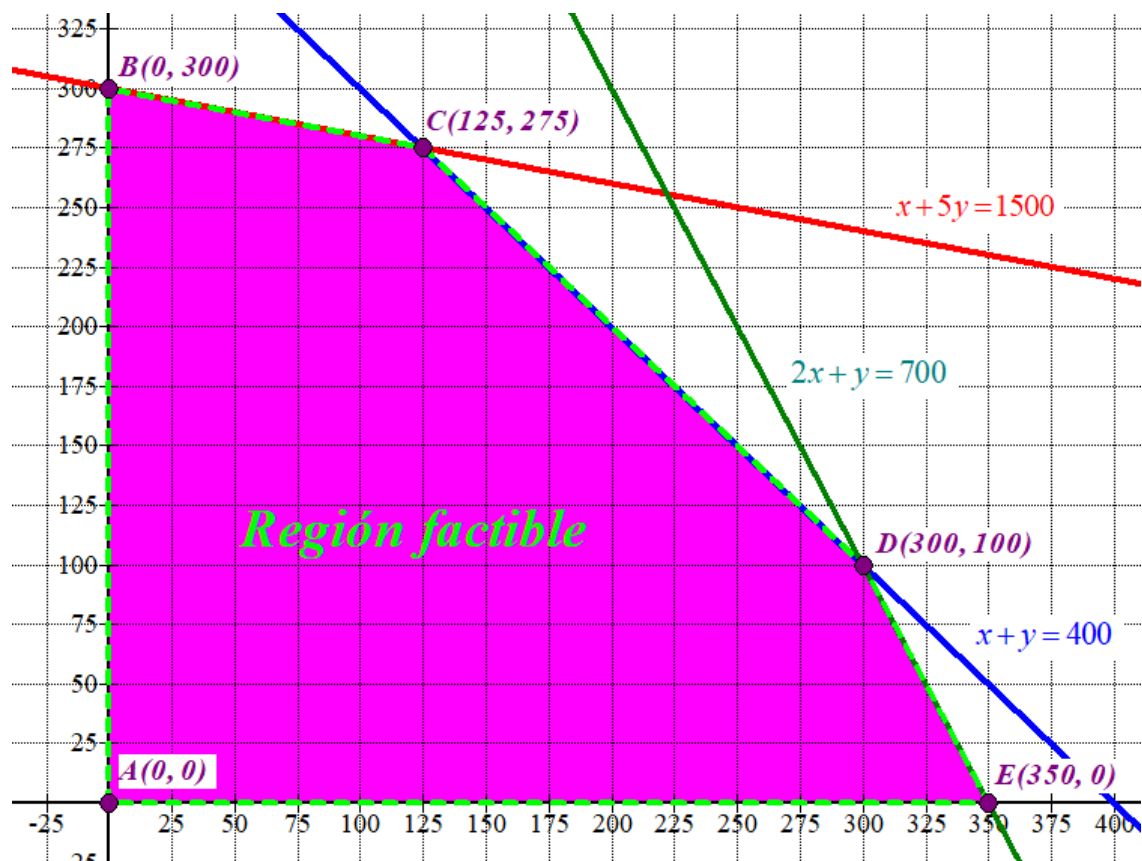
$$\left. \begin{array}{l} x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto $P(100, 100)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 + 500 \leq 1500 \\ 100 + 100 \leq 400 \\ 200 + 100 \leq 700 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 400 \\ x + 5y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 400 - y \\ x + 5y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow 400 - y + 5y = 1500 \Rightarrow 4y = 1100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1100}{4} = 275 \Rightarrow x = 400 - 275 = 125 \Rightarrow C(125, 275)$$

Valoramos la función ingresos $I(x, y) = x + 1.3y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$B(0, 300) \rightarrow I(0, 300) = 0 + 1.3 \cdot 300 = 390$$

$$C(125, 275) \rightarrow I(125, 275) = 125 + 1.3 \cdot 275 = 482.5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(300, 100) \rightarrow I(300, 100) = 300 + 1.3 \cdot 100 = 430$$

$$E(350, 0) \rightarrow I(350, 0) = 350 + 1.3 \cdot 0 = 350$$

Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible son de 482.5 € y se obtienen en el punto C(125, 275).

Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración y venta de 125 trufas dulces y 275 amargas.

b) Los máximos ingresos que se pueden obtener son 482.5 €.

BLOQUE: ANÁLISIS**A.2. [hasta 2,5 puntos]**

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

- a) [1 punto] Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0,0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2,-4)$.
- b) [0,75 puntos] Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.
- c) [0,75 puntos] Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas.

- a) La función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1 tiene la siguiente expresión $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Pasa por el punto $(0,0) \rightarrow f(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

Tener un extremo relativo en el punto $(2, -4)$ implica que la gráfica de la función pasa por el punto $(2, -4)$ y que la derivada de la función se anula en $x = 2 \rightarrow f(2) = -4; f'(2) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx \\ f(2) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 = 2^3 + a \cdot 2^2 + 2b \Rightarrow -12 = 4a + 2b \Rightarrow \boxed{-6 = 2a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b \Rightarrow \boxed{4a + b = -12}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + b = -6 \\ b = -12 - 4a \end{array} \right\} \Rightarrow 2a - 12 - 4a = -6 \Rightarrow -2a = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{6}{-2} = -3} \Rightarrow \boxed{b = -12 - 4(-3) = 0}$$

Los valores buscados son $a = -3$ y $b = c = 0$.

La función queda $f(x) = x^3 - 3x^2$.

- b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{array} \right.$$

Sustituimos en la segunda derivada para averiguar si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -6 < 0 \rightarrow x = 0 \text{ es máximo} \\ f''(2) = 6 > 0 \rightarrow x = 2 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

La función tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$.

Igualemos la segunda derivada a cero en busca de los puntos de inflexión.

$$\begin{cases} f''(x) = 6x - 6 \\ f''(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Como la tercera derivada es $f'''(x) = 6$ al sustituir por $x = 1$ no se anula y podemos afirmar que la función tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

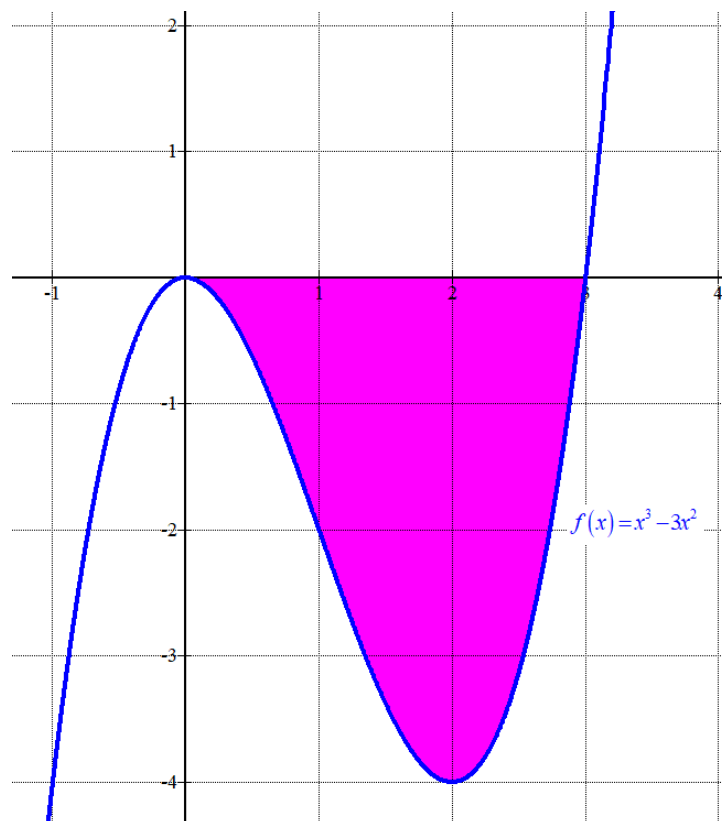
c) Hallamos los puntos de corte de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas.

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 \\ \text{Eje de abscisas} \rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \end{cases}$$

El área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 3 de la función.

$$\int_0^3 x^3 - 3x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 \right]_0^3 = \left[\frac{3^4}{4} - 3^3 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 \right] = \frac{81}{4} - 27 = -6.75$$

El área tiene un valor de 6.75 unidades cuadradas.

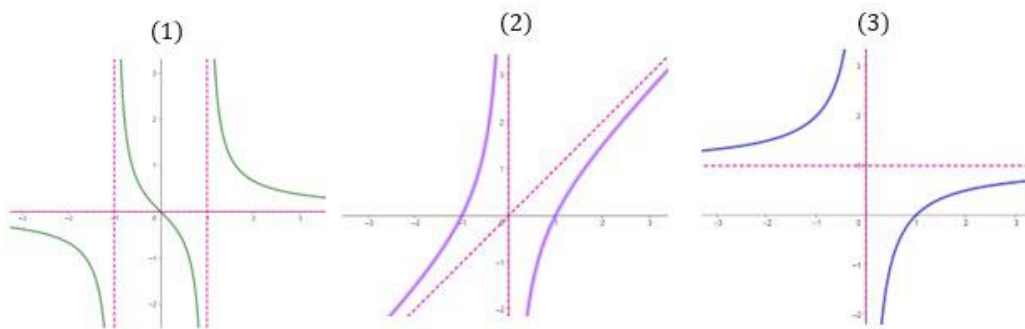


B.2. [hasta 2,5 puntos]

a) [0,9 puntos] Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A) f(x) = \frac{x-1}{x}; \quad B) g(x) = \frac{x}{x^2-1}; \quad C) h(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) [1,6 puntos] En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

- a) En las gráficas 1, 2 y 3 se aprecia con relativa claridad las asíntotas de cada función. En la expresión de las funciones A, B y C se observa que el dominio de las funciones A y C es $\mathbb{R} - \{0\}$ y las dos funciones tienen asíntota vertical $x = 0$. La función B tiene como dominio $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ por lo que esta función tiene dos asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$. La gráfica 1 tiene dos asíntotas verticales como la función B. La gráfica 3 tiene una asíntota horizontal al igual que la función A. Lo comprobamos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 - 0 = 1$$

La función A tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal.

La gráfica 3 se corresponde con la función A.

La restante gráfica 2 se corresponde con la función C. Podemos comprobar que la función C tiene una asíntota oblicua como se aprecia en la gráfica 3.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

La función C tiene la recta $y = x$ como asíntota oblicua.

Las correspondencias son $A \rightarrow 3$, $B \rightarrow 1$, $C \rightarrow 2$.

b) **Gráfica 1** $\rightarrow$ Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$; Recorrido = $\mathbb{R}$; Decrece en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Gráfica 2 $\rightarrow$ Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$; Recorrido = $\mathbb{R}$; Crece en $\mathbb{R} - \{0\}$

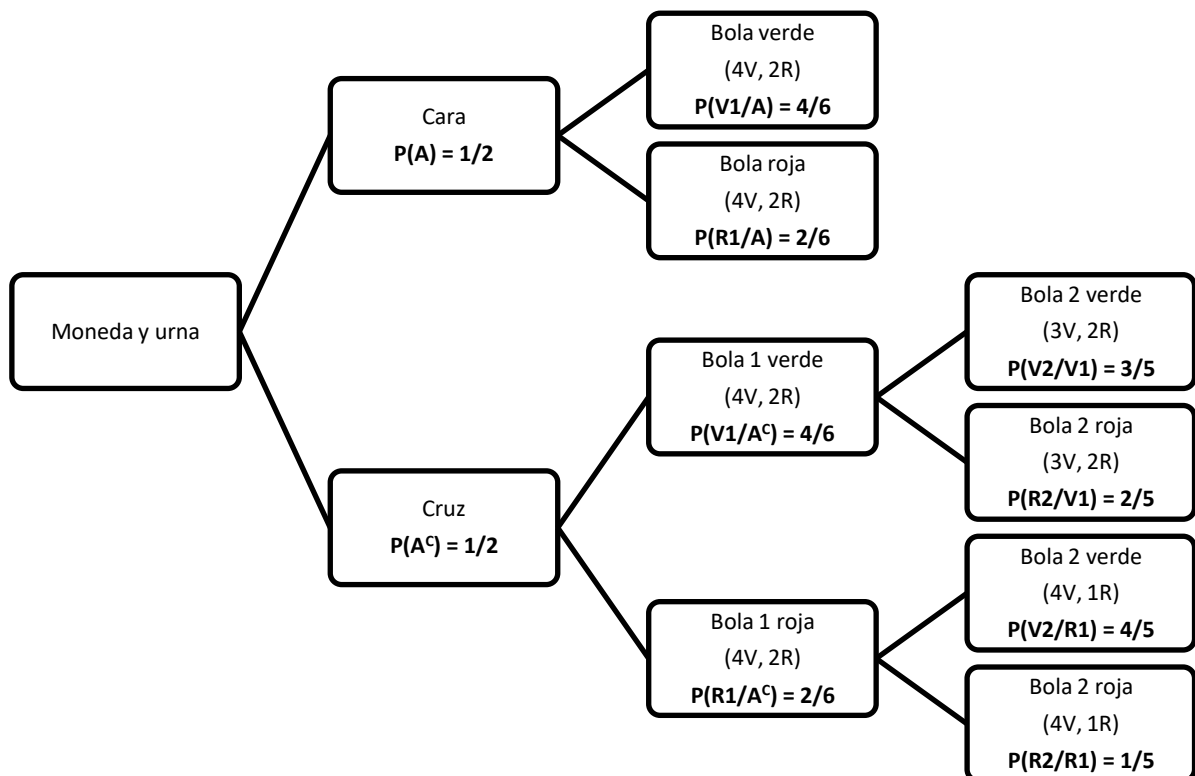
Gráfica 3 $\rightarrow$ Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$; Recorrido = $\mathbb{R} - \{1\}$; Crece en $\mathbb{R} - \{0\}$

BLOQUE: PROBABILIDAD**A.3. [hasta 2,5 puntos]**

Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

- a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?
- b) [0,75 puntos] Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.
- c) [0,75 puntos] Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.
- d) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Para que Asier extraiga dos bolas rojas debe haber salido cruz en la moneda y luego extraer las dos bolas rojas de la urna.

$$P(\text{Dos bolas rojas}) = P(A^c)P(R1/A^c)P(R2/R1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30} \approx 0.0333$$

- b) Para que Asier no extraiga ninguna bola roja debe sacar cara y después una bola verde o sacar cruz y después dos bolas verdes.

$$P(\text{Ninguna bola roja}) = P(A)P(V1/A) + P(A^c)P(V1/A^c)P(V2/V1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \approx 0.5333$$

- c) Calculamos la probabilidad del suceso contrario “no sacar ninguna verde”. Esto se consigue sacando cara y luego una bola roja o sacar cruz y luego dos bolas rojas.

$$P(\text{Ninguna bola verde}) = P(A)P(R1) + P(A^c)P(R1/A^c)P(R2/R1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

La probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde es $1 - 0.2 = 0.8$.

- d) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Cara}/\text{Al menos una bola verde}) = \frac{P(\text{Cara} \cap \text{Al menos una bola verde})}{P(\text{Al menos una bola verde})} =$$

$$= \frac{P(\text{Cara})P(\text{Al menos una bola verde} / \text{Cara})}{P(\text{Al menos una bola verde})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{0.8} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4166}$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]

En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A, el 25 % en la pastelería B, y el 15 % en ambas.

Se escoge una persona al azar:

- [[0,8 puntos]] ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B?
- [[0,35 puntos]] Si esta persona es cliente de la pastelería A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B?
- [[0,35 puntos]] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B?
- [[1 punto]] ¿Son independientes los sucesos “ser cliente de A” y “ser cliente de B”? Justifica tu respuesta.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Compra en B	No compra en B	
Compra en A	15		40
No compra en A			
	25		100

Completamos la tabla.

	Compra en B	No compra en B	
Compra en A	15	25	40
No compra en A	10	50	60
	25	75	100

- a) Hay un 25 % de personas que compra en A y no compra en B (1ª fila, 3ª columna).

La probabilidad de que una persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B es de 0.25.

- b) Hay un 40 % de personas que son clientes de A y un 15 % que son clientes de ambas.

La probabilidad de que un cliente de A también sea cliente de la pastelería B es $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0.375$.

- c) Hay un 50 % de las personas del barrio que no son clientes de ninguna de las dos pastelerías (fila 3ª, columna 3ª).

La probabilidad de que la persona elegida al azar no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B es de 0.5.

- d) Para que sean independientes los sucesos debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.15 \\ P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15 \neq 0.1 = P(A)P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA**A.4. [hasta 2,5 puntos]**

En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos.

Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

- a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.
- b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?
- c) [1 punto] Si la desviación típica es 2,6 puntos y el Apto se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

X = la puntuación obtenida en un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.
 $X = N(5.8, \sigma)$

- a) Sabemos que $P(X > 6.8) = 0.35$.

$$P(X > 6.8) = 0.35 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{6.8 - 5.8}{\sigma}\right) = 0.35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{1}{\sigma}\right) = 0.35 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - 0.35 = 0.65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = \frac{0.38 + 0.39}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1}{0.385} = 2.597}$$

- b) Tenemos que $X = N(5.8, 2.6)$. Nos piden calcular “a” tal que $P(X \geq a) = 0.20$.

$$P(X \geq a) = 0.20 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 5.8}{2.6}\right) = 0.20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 5.8}{2.6}\right) = 1 - 0.2 = 0.8 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a - 5.8}{2.6} = 0.845 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0.845 \cdot 2.6 + 5.8 = 7.997}$$

La puntuación que es superada únicamente por el 20 % del alumnado es 7,997 puntos.

- c) Tenemos que $X = N(5.8, 2.6)$. Nos piden calcular $P(X \geq 5)$.

$$P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5 - 5.8}{2.6}\right) = P(Z \geq -0.308) = P(Z \leq 0.308) = \boxed{0.6217}$$

El 62.17 % del alumnado ha conseguido ser apto en el examen.

B.4. [hasta 2,5 puntos]

De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

- [[1,25 puntos]] Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.
- [[0,75 puntos]] Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
- [[0,5 puntos]] Interpreta los resultados obtenidos.

- a) X = Número de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

Proporción muestral $p = \frac{1000 - 140}{1000} = 0.86$. Tamaño de la muestra = $n = 1000$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{1000}} = 0.0215$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.86 - 0.0215, 0.86 + 0.0215) = (0.8385, 0.8815)$$

El porcentaje de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres está entre el 83.85 % y el 88.15 % con un nivel de confianza del 95 %.

- El error máximo lo hemos calculado en el apartado a) y es Error = 0.0215.
El error máximo es de un 2.15 %.
- Se puede decir con un nivel de confianza del 95 % que el porcentaje de la población de jóvenes de 25 años que viven con sus padres es mayor que el 83.85 % y menor que el 88.15 %, lo que supone un error máximo del 2.25 %.