



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 3

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la función polinómica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

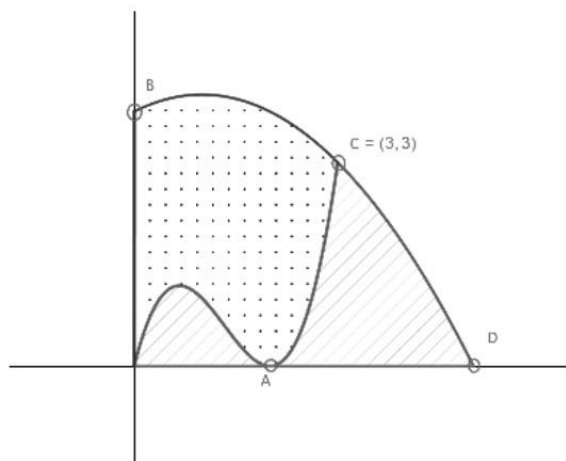
- Justifique que su gráfica corta el eje de abscisas en un punto del intervalo $[-2, 0]$. Dé un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre este punto de corte. [1.25 puntos]
- Estudie las zonas de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de $y = f(x)$. ¿Cuántos puntos de corte tiene exactamente la gráfica de esta función con el eje de abscisas? Justifique su respuesta. [1.25 puntos]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde m es un parámetro real.

$$\left. \begin{aligned} x - 3y + mz &= -2 \\ x + my + 2z &= 3 \\ x + y + 2z &= m \end{aligned} \right\}$$

- Discuta el sistema según el valor del parámetro m . [1.25 puntos]
- Encuentre la solución del sistema para $m = 0$. [0.5 puntos]
- Para $m = 2$, dé una solución (x, y, z) del sistema que, además, cumpla $x = 5y$. [0.75 puntos]

3. La clase de Èlia ha diseñado el siguiente logotipo para pintarlo en la pared del instituto:



La curva que pasa por el punto A es $y = f(x)$, con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, y la que pasa por los puntos B, C = (3, 3) y D es $y = g(x)$, con $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

- a) Calcule las coordenadas de los puntos A, B y D. [0,75 puntos]
 - b) Calcule el área de la zona punteada. [1,25 puntos]
 - c) Los alumnos quieren pintar la parte punteada de color azul y la parte rayada de color rojo. Sabiendo que el área total del logotipo es $\frac{175}{12} \text{ m}^2$, ¿de qué color necesitarán más pintura? [0,5 puntos]
4. Se estima que el 20 % de los habitantes de una región padecen algún tipo de arritmia. Para diagnosticarla, existe la posibilidad de colocar al paciente un monitor Holter, que detecta la arritmia en un 95 % de los casos de personas que la padecen, pero que también da falsos positivos, por motivos eléctricos, en personas que no padecen arritmias en un 0,5 % de los casos.
- a) Si se escogen 4 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas padezca arritmias? [0,75 puntos]
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia? [0,75 puntos]
 - c) Si una persona obtiene un diagnóstico negativo en la prueba del Holter, ¿cuál es la probabilidad de que realmente padezca arritmias? [1 punto]
5. Para cada punto (x, y) de la curva $y = e^{-2x}$, con $x > 0$ e $y > 0$, considere el rectángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ y (x, y) .
- a) Compruebe que, de entre todos estos rectángulos, el que tiene $x = \frac{1}{2}$ es el de área máxima. ¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]
 - b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$, y su punto de corte con el eje de abscisas. [1 punto]
6. Considere el punto $P = (1, 3, 0)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 2z = -7$.
- a) Sea r la recta que es perpendicular a π y pasa por P . Calcule el punto de intersección de π con r . [1 punto]
 - b) Calcule la distancia d del punto P al plano π . [0,5 puntos]
 - c) Calcule la ecuación de otro plano π' que sea paralelo a π y que también esté a distancia d de P . [1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere la función polinómica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

- a) Justifique que su gráfica corta el eje de abscisas en un punto del intervalo $[-2, 0]$. Dé un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre este punto de corte. [1.25 puntos]
 b) Estudie las zonas de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de $y = f(x)$. ¿Cuántos puntos de corte tiene exactamente la gráfica de esta función con el eje de abscisas? Justifique su respuesta. [1.25 puntos]

- a) La función es continua en el intervalo $[-2, 0]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo.

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= 3(-2)^{13} + 5(-2)^3 + 2 = -24614 < 0 \\ f(0) &= 3 \cdot 0^{13} + 5 \cdot 0^3 + 2 = 2 > 0 \end{aligned} \right\}$$

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

Buscamos un intervalo de menor amplitud que cumpla las condiciones del teorema de Bolzano. Como el valor de la función para $x = -2$ es -24614 probamos con valores más cercanos a 0.

$$\left. \begin{aligned} f(-0.5) &= 3(-0.5)^{13} + 5(-0.5)^3 + 2 \approx 1.37 > 0 \\ f(-1) &= 3(-1)^{13} + 5(-1)^3 + 2 = -6 < 0 \end{aligned} \right\}$$

Si consideramos el intervalo $[-1, -0.5]$ en dicho intervalo la función es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo. Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que existe $c \in (-1, -0.5)$ tal que $f(c) = 0$.

- b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2 \Rightarrow f'(x) = 39x^{12} + 15x^2$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva pues las potencias son pares y se suman los resultados de dichas potencias.

Al ser la derivada siempre positiva la función siempre crece.

La función no tiene máximos ni mínimos relativos.

Puntos de corte de la función con el eje de abscisas hemos encontrado uno en el intervalo $[-1, -0.5]$. Como la función es continua y siempre crece no hay ningún punto de corte más con el eje de abscisas.

Existe un único punto de corte de la gráfica de la función y el eje de abscisas.

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde m es un parámetro real.

$$\begin{cases} x - 3y + mz = -2 \\ x + my + 2z = 3 \\ x + y + 2z = m \end{cases}$$

a) Discuta el sistema según el valor del parámetro m . [1.25 puntos]

b) Encuentre la solución del sistema para $m = 0$. [0.5 puntos]

c) Para $m = 2$, dé una solución (x, y, z) del sistema que, además, cumpla $x = 5y$. [0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & m & -2 \\ 1 & m & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 6 + m - m^2 + 6 - 2 = -m^2 + 3m - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 + 3m - 2 = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=m} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=m} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ -1 \quad 3 \quad -1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 4 \quad 1 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ -1 \quad -2 \quad -2 \quad -3 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ -1 \quad 3 \quad -2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 5 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \\ 0 \quad -5 \quad 0 \quad -5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$ el sistema es **compatible determinado**, para $m=1$ el sistema es **incompatible** y para $m=2$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Para $m=0$ el sistema tiene una única solución (caso 1). Lo resolvemos.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} x-3y=-2 \\ x+2z=3 \\ x+y+2z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=-2+3y \\ x+2z=3 \\ x+y+2z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2+3y+2z=3 \\ -2+3y+y+2z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y+2z=5 \\ 4y+2z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y+2z=5 \\ 2z=2-4y \end{array} \right\} \Rightarrow 3y+2-4y=5 \Rightarrow -y=3 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \boxed{y=-3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x=-2+3(-3)=-11} \\ 2z=2-4(-3)=14 \rightarrow \boxed{z=\frac{14}{2}=7} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = -11, y = -3, z = 7$.

- c) Resolvemos el sistema para $m = 2$. Es el caso 3 estudiado y el sistema tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido en el estudio.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-3y+2z=-2 \\ 5y=5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-3y+2z=-2 \\ \boxed{y=\frac{5}{5}=1} \end{array} \right\} \Rightarrow x-3+2z=-2 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow x=1-2z \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1-2\alpha \\ y=1 \\ z=\alpha \end{array} \right. ; \alpha \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

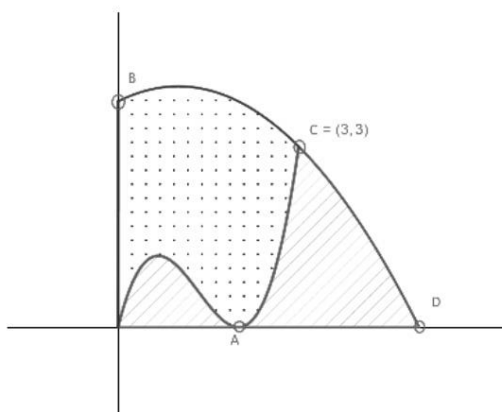
Para $m = 2$ las soluciones del sistema son $\left\{ \begin{array}{l} x=1-2\alpha \\ y=1 \\ z=\alpha \end{array} \right. ; \alpha \in \mathbb{R}.$

Le añadimos la condición $x = 5y$. Comprobamos si existe alguna solución que lo cumpla.

$$\left\{ \begin{array}{l} x=1-2\alpha \\ y=1 \\ z=\alpha \\ x=5y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1-2\alpha \\ \boxed{y=1} \\ z=\alpha \\ \boxed{x=5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4=-2\alpha \\ z=\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha=\frac{4}{-2}=-2 \\ z=\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z=-2}$$

Existe una solución que cumple lo pedido: $x = 5, y = 1, z = -2$.

3. La clase de Èlia ha diseñado el siguiente logotipo para pintarlo en la pared del instituto:



La curva que pasa por el punto A es $y = f(x)$, con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, y la que pasa por los puntos B, C = (3, 3) y D es $y = g(x)$, con $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

- a) Calcule las coordenadas de los puntos A, B y D. [0,75 puntos]
 b) Calcule el área de la zona punteada. [1,25 puntos]
 c) Los alumnos quieren pintar la parte punteada de color azul y la parte rayada de color rojo. Sabiendo que el área total del logotipo es $\frac{175}{12} \text{ m}^2$, ¿de qué color necesitarán más pintura? [0,5 puntos]

a) El punto A es el punto de corte de la gráfica de la función $y = f(x)$ con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = x^3 - 4x^2 + 4x \Rightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow (0,0) \\ x^2 - 4x + 4 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \boxed{A(2,0)} \end{array} \right.$$

El punto B es el punto de corte de la gráfica de la función $y = g(x)$ con el eje OY.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) = -\left(\frac{0-1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{-1}{4} + 4 = \frac{15}{4} \Rightarrow \boxed{B\left(0, \frac{15}{4}\right)}$$

El punto D es el punto de corte de la gráfica de la función $y = g(x)$ con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 4 \rightarrow x = 5 \rightarrow \boxed{D(5,0)} \\ x-1 = -4 \rightarrow x = -3 \text{ No nos sirve} \end{array} \right.$$

Los puntos tienen coordenadas: $A(2,0)$, $B\left(0, \frac{15}{4}\right)$ y $D(5,0)$.

- b) El área de la zona punteada es el valor de la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia entre las dos funciones: $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x) = -\frac{x^2 - 2x + 1}{4} + 4 - x^3 + 4x^2 - 4x = \\ &= \frac{-x^2 + 2x - 1 + 16 - 4x^3 + 16x^2 - 16x}{4} = \frac{-4x^3 + 15x^2 - 14x + 15}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 g(x) - f(x) dx &= \int_0^3 \frac{-4x^3 + 15x^2 - 14x + 15}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^3 -4x^3 + 15x^2 - 14x + 15 dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[-x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 15x \right]_0^3 = \frac{1}{4} (3^4 - 5 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 - 0) = \frac{1}{4} (36) = \boxed{9} \end{aligned}$$

El área de la zona punteada es de 9 unidades cuadradas.

- c) Como el área del logotipo es $\frac{175}{12} \text{ m}^2$ y la zona punteada es de 9 m^2 entonces la zona rayada tiene un área de $\frac{175}{12} - 9 = \frac{67}{12} \approx 5.583 \text{ m}^2$.

Se quiere pintar la parte punteada de color azul (9 m^2) y la parte rayada de color rojo ($\frac{67}{12} \approx 5.583 \text{ m}^2$). Como $9 > 5.583$ se necesita más pintura de color azul.

4. Se estima que el 20 % de los habitantes de una región padecen algún tipo de arritmia. Para diagnosticarla, existe la posibilidad de colocar al paciente un monitor Holter, que detecta la arritmia en un 95 % de los casos de personas que la padecen, pero que también da falsos positivos, por motivos eléctricos, en personas que no padecen arritmias en un 0,5 % de los casos.
- a) Si se escogen 4 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas padezca arritmias? [0,75 puntos]
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia? [0,75 puntos]
- c) Si una persona obtiene un diagnóstico negativo en la prueba del Holter, ¿cuál es la probabilidad de que realmente padezca arritmias? [1 punto]

Llamamos A al suceso “sufrir arritmia” y D al suceso “el monitor Holter detecta la arritmia”. Por los datos proporcionados sabemos que $P(A) = 0.20$, $P(D/A) = 0.95$, $P(D/\bar{A}) = 0.005$.

- a) Consideramos la variable binomial que cuenta el número de personas que sufren arritmia de un grupo de 4. $X = B(4, 0.2)$.

Nos piden calcular $P(X \geq 1)$. Calculamos esta probabilidad usando el suceso contrario.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^4 = 1 - 0.8^4 = \frac{369}{625} = \boxed{0.5904}$$

La probabilidad de que al menos una de las 4 personas padezca arritmias es de 0.5904.

- b) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(\bar{A})P(D/\bar{A}) = 0.2 \cdot 0.95 + 0.8 \cdot 0.005 = \boxed{0.194}$$

La probabilidad de que una persona escogida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia es de 0.194.

- c) Nos piden calcular $P(A/\bar{D})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(A)P(\bar{D}/A)}{1 - P(D)} = \frac{P(A)[1 - P(D/A)]}{1 - P(D)} =$$

$$= \frac{0.2 \cdot (1 - 0.95)}{1 - 0.194} = \boxed{\frac{5}{403} \approx 0.0124}$$

La probabilidad de que una persona que ha dado negativo en la prueba de Holter realmente padezca arritmias tiene un valor aproximado de 0.0124.

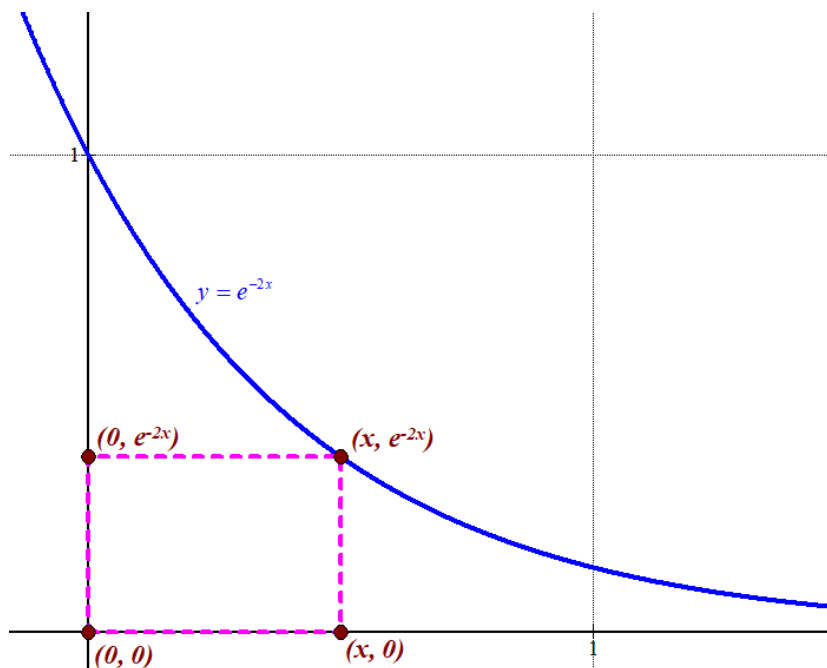
5. Para cada punto (x, y) de la curva $y = e^{-2x}$, con $x > 0$ e $y > 0$, considere el rectángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ y (x, y) .

a) Compruebe que, de entre todos estos rectángulos, el que tiene $x = \frac{1}{2}$ es el de área máxima.

¿Cuál es el valor de esta área? [1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$, y su punto de corte con el eje de abscisas. [1 punto]

a) Dibujamos la situación planteada.



Obtenemos la expresión del área del rectángulo del dibujo: $A(x) = x \cdot e^{-2x}$.

Derivamos la función y obtenemos los valores donde se anula la derivada (puntos críticos).

$$A(x) = x \cdot e^{-2x} \Rightarrow A'(x) = e^{-2x} + x(-2)e^{-2x} = (1 - 2x)e^{-2x}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow (1 - 2x)e^{-2x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-2x} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 1 - 2x = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Sustituimos el valor obtenido $x = \frac{1}{2}$ en la segunda derivada para determinar si es un máximo de la función.

$$A'(x) = (1 - 2x)e^{-2x} \Rightarrow A''(x) = (-2)e^{-2x} + (1 - 2x)(-2)e^{-2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A''\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} + \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right)(-2)e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = -2e^{-1} + 0 = -\frac{2}{e} < 0$$

Como el signo de la segunda derivada es negativo la función presenta un máximo en $x = \frac{1}{2}$.

Como $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2e} \approx 0.184$ el área máxima tiene un valor de $\frac{1}{2e} \approx 0.184$ unidades cuadradas.

- b) La ecuación de la recta tangente a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene la expresión $y - y(0) = y'(0)(x - 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = e^{-2x} \rightarrow y(0) = e^0 = 1 \\ y' = -2e^{-2x} \rightarrow y'(0) = -2e^0 = -2 \\ y - y(0) = y'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = -2x \Rightarrow \boxed{y = 1 - 2x}$$

La ecuación de la recta tangente a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 1 - 2x$.

Hallamos el punto de corte de la tangente con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 - 2x \\ \text{Eje de abscisas} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{1}{2}, 0\right)}$$

El punto de corte de la tangente y el eje de abscisas es $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

6. Considere el punto $P = (1, 3, 0)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 2z = -7$.

- a)** Sea r la recta que es perpendicular a π y pasa por P . Calcule el punto de intersección de π con r . [1 punto]
b) Calcule la distancia d del punto P al plano π . [0,5 puntos]
c) Calcule la ecuación de otro plano π' que sea paralelo a π y que también esté a distancia d de P . [1 punto]

- a) Al ser la recta perpendicular al plano un vector director de la recta es el vector normal del plano. Determinamos la ecuación de la recta.

$$\pi : x + 2y - 2z = -7 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 2, -2) \\ P(1, 3, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2\alpha \end{cases}$$

La recta r que es perpendicular a π y pasa por P tiene ecuación $r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2\alpha \end{cases}$.

Hallamos el punto de corte de plano y recta.

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \\ \pi : x + 2y - 2z = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha + 2(3 + 2\alpha) - 2(-2\alpha) = -7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \alpha + 6 + 4\alpha + 4\alpha = -7 \Rightarrow 9\alpha = -14 \Rightarrow \alpha = \frac{-14}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{14}{9} = \frac{-5}{9} \\ y = 3 + 2 \cdot \frac{-14}{9} = \frac{-1}{9} \\ z = -2 \cdot \frac{-14}{9} = \frac{28}{9} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{-5}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{28}{9}\right)$$

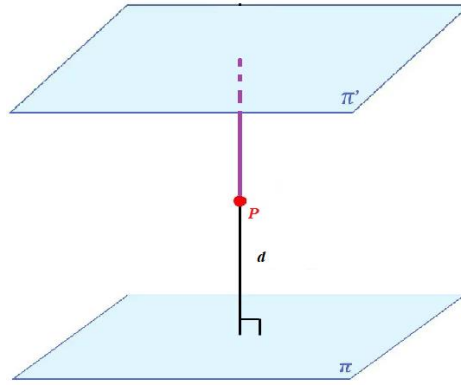
El punto de corte de plano y recta es $P\left(\frac{-5}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{28}{9}\right)$.

- b) Calculamos la distancia pedida usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y - 2z + 7 = 0 \\ P = (1, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, P) = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{\sqrt{9}} = \frac{14}{3} \approx 4.667 \text{ unidades}$$

La distancia del punto P al plano π tiene un valor $d = \frac{14}{3}$ unidades.

- c) Deseamos hallar un plano π' paralelo a $\pi: x + 2y - 2z + 7 = 0$ por lo que su ecuación será $\pi': x + 2y - 2z + D = 0$. Debemos determinar el valor de D para que la distancia de π' a P sea $d = \frac{14}{3}$.



$$\left. \begin{array}{l} \pi': x + 2y - 2z + D = 0 \\ P = (1, 3, 0) \\ d(\pi', P) = \frac{14}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi', P) = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|7 + D|}{3} = \frac{14}{3} \Rightarrow |7 + D| = 14 \Rightarrow \begin{cases} 7 + D = 14 \rightarrow D = 7 \rightarrow \pi: x + 2y - 2z + 7 = 0 \\ 7 + D = -14 \rightarrow D = -21 \rightarrow \boxed{\pi': x + 2y - 2z - 21 = 0} \end{cases}$$

El plano paralelo a π y que esté a distancia $\frac{14}{3}$ de P tiene ecuación $\pi': x + 2y - 2z - 21 = 0$.