



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

2017

Modelo 2

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los relojes de tipo A los vende a 300 €; los de tipo B, en 600 €, y los de tipo C, en 200 €. En un mes determinado vendió 200 relojes en total. Si la cantidad de los que vendió este mes de tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y tipo C conjuntamente, calcule cuántos relojes vendió de cada tipo si la recaudación de ese mes fue de 89.000 €.

(10 puntos)

2. Una empresa de compra/venta de automóviles ha comprobado que los últimos 10 años sus beneficios/pérdidas se ajustan a la función

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3, \quad 0 \leq t \leq 10$$

en miles de euros. Se pide:

- ¿En qué años se producen los valores máximos y mínimos de esta función? (5 puntos)
- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
- ¿Cuáles son sus beneficios máximos? ¿Qué resultado obtuvo la empresa en el último año del estudio? (2 puntos)

3. Sean A y B dos sucesos tales que $p(A \cup B) = 0.9$, $p(A^c) = 0.4$, donde A^c denota el suceso complementario del suceso A, y $p(A \cap B) = 0.2$. Calcula las probabilidades siguientes:

$p(B)$ (3 puntos), $p(A/B)$ (2 puntos), $p(A \cap B^c)$ (3 puntos) y $p(A^c \cup B^c)$ (2 puntos)

4. A partir de una muestra de 100 individuos, se ha realizado una estimación de la proporción mediante el intervalo de confianza (0.17, 0.25). ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se ha realizado la estimación?

(10 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - ky - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Se pide:

- a) Determina los valores de k para los que el sistema es compatible determinado. (6 puntos)
- b) Resuelve el sistema cuando $k = 2$. (4 puntos)

2. Calcula el área de la figura plana limitada por la recta $y = 2x$ y la curva $y = x^2 - 3$ (6 puntos). Dibuja el recinto limitado por ambas curvas (4 puntos).

3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x+a)^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) ¿Para qué valores de a la función es continua en $x = 1$? (6 puntos)
 - b) Para el valor de a que hace continua la función f en todo su dominio, calcule las derivadas de f en los puntos $x = 0$ y $x = 3$. ¿Cómo es el crecimiento y decrecimiento de la función en estos puntos? (4 puntos)
4. Un estuche contiene 17 lápices de color rojo y 13 de color azul.
- a) Si elegimos uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rojo? (2 puntos)
 - b) Si extraemos dos al azar, sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de color azul? (4 puntos)
 - c) Si elegimos dos al azar, sin reemplazo, calcula la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo sea rojo. (4 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los relojes de tipo A los vende a 300 €; los de tipo B, en 600 €, y los de tipo C, en 200 €. En un mes determinado vendió 200 relojes en total. Si la cantidad de los que vendió este mes de tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y tipo C conjuntamente, calcule cuántos relojes vendió de cada tipo si la recaudación de ese mes fue de 89.000 €. (10 puntos)

Llamamos “x” al número de relojes A que vende, “y” al número de relojes B y “z” al número de relojes C.

Obtenemos las ecuaciones correspondientes a la información proporcionada en el ejercicio.

“En un mes determinado vendió 200 relojes en total” $\rightarrow x + y + z = 200$

“La cantidad de los que vendió este mes de tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y tipo C conjuntamente” $\rightarrow y = x + z$.

“La recaudación de ese mes fue de 89.000 € (los relojes de tipo A los vende a 300 €; los de tipo B, en 600 €, y los de tipo C, en 200 €)” $\rightarrow 300x + 600y + 200z = 89000$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y = x + z \\ 300x + 600y + 200z = 89000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y = x + z \\ 3x + 6y + 2z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + x + z + z = 200 \\ 3x + 6(x + z) + 2z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2z = 200 \\ 3x + 6x + 6z + 2z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 100 \\ 9x + 8z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 100 - z \\ 9x + 8z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(100 - z) + 8z = 890 \Rightarrow 900 - 9z + 8z = 890 \Rightarrow -z = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 10} \Rightarrow \boxed{x = 100 - 10 = 90} \Rightarrow \boxed{y = 90 + 10 = 100}$$

Se vendieron 90 relojes A, 100 relojes B y 10 relojes C.

2. Una empresa de compra/venta de automóviles ha comprobado que los últimos 10 años sus beneficios/pérdidas se ajustan a la función

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3, \quad 0 \leq t \leq 10$$

en miles de euros. Se pide:

- a) ¿En qué años se producen los valores máximos y mínimos de esta función? (5 puntos)
 b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
 c) ¿Cuáles son sus beneficios máximos? ¿Qué resultado obtuvo la empresa en el último año del estudio? (2 puntos)

a) Vemos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} F'(t) = 3t^2 - 36t + 81 \\ F'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(27)}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{12+6}{2} = 9 = t \\ \frac{12-6}{2} = 3 = t \end{cases}$$

Sustituimos $t = 3$ y $t = 9$ en la segunda derivada.

$$F''(t) = 6t - 36 \Rightarrow \begin{cases} F''(3) = 18 - 36 = -18 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \\ F''(9) = 54 - 36 = 18 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda negativa la función tiene un máximo relativo en $t = 3$.

Al ser la primera derivada nula y la segunda positiva la función tiene un mínimo relativo en $t = 9$.

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición y en los puntos críticos para establecer los valores máximos y mínimos absolutos.

$$F(0) = 0^3 - 18 \cdot 0^2 + 81 \cdot 0 - 3 = -3 \rightarrow \text{Mínimo}$$

$$F(3) = 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 81 \cdot 3 - 3 = 105 \rightarrow \text{Máximo}$$

$$F(9) = 9^3 - 18 \cdot 9^2 + 81 \cdot 9 - 3 = -3 \rightarrow \text{Mínimo}$$

$$F(10) = 10^3 - 18 \cdot 10^2 + 81 \cdot 10 - 3 = 7$$

La función alcanza su mínimo valor en el año 0 y en el año 9. Su valor máximo lo alcanza el año 3.

b) Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos: $t = 3$ y $t = 9$

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$F'(1) = 3 \cdot 1^2 - 36 \cdot 1 + 81 = 48 > 0. \text{ La función crece en } [0, 3).$$

- En el intervalo $(3, 9)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$F'(4) = 3 \cdot 4^2 - 36 \cdot 4 + 81 = -15 < 0. \text{ La función decrece en } (3, 9).$$

- En el intervalo $(9,10]$ tomamos $x=9.5$ y la derivada vale
 $F'(9.5) = 3 \cdot 9.5^2 - 36 \cdot 9.5 + 81 = 9.75 > 0$. La función crece en $(9,10]$.

La función crece en $[0,3) \cup (9,10]$ y decrece en $(3,9)$.

- c) Los beneficios máximos los hemos calculado en el apartado a) y hemos visto que se obtienen en el noveno año desde el inicio del estudio y son 105 000 euros.
En el mismo apartado hemos visto que $F(10) = 7$, lo que significa que en el último año se obtienen unos beneficios de 7000 euros.

3. Sean A y B dos sucesos tales que $p(A \cup B) = 0.9$, $p(A^c) = 0.4$, donde A^c denota el suceso complementario del suceso A, y $p(A \cap B) = 0.2$. Calcula las probabilidades siguientes:
 $p(B)$ (3 puntos), $p(A/B)$ (2 puntos), $p(A \cap B^c)$ (3 puntos) y $p(A^c \cup B^c)$ (2 puntos)

Como $P(A^c) = 0.4$ entonces $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 0.9 \\ P(A) = 0.6 \\ P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.9 = 0.6 + P(B) - 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = 0.9 - 0.6 + 0.2 = \boxed{0.5}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.5} = \boxed{0.4}$$

Sabemos que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \Rightarrow 0.6 = 0.2 + P(A \cap B^c) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B^c) = 0.4}$$

Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = \boxed{0.8}$$

Hemos obtenido que $p(B) = 0.5$, $p(A/B) = 0.4$, $p(A \cap B^c) = 0.4$ y $p(A^c \cup B^c) = 0.8$.

4. A partir de una muestra de 100 individuos, se ha realizado una estimación de la proporción mediante el intervalo de confianza (0.17, 0.25). ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se ha realizado la estimación? (10 puntos)

El tamaño de la muestra es $n = 100$.

La proporción muestral es $\frac{0.17 + 0.25}{2} = 0.21$.

El error del intervalo de confianza es $\frac{0.25 - 0.17}{2} = 0.04$.

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.04 = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{100}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{0.04}{\sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{100}}} \approx 0.98206$$

Buscamos la probabilidad en la tabla de la $N(0, 1)$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8150	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599

Tenemos que $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.8365 \Rightarrow 1 - 0.8365 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0.1635 = 0.327 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.673$

El nivel de confianza es del 67.3%.

OPCIÓN B

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - ky - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Se pide:

- a) Determina los valores de k para los que el sistema es compatible determinado. (6 puntos)
 b) Resuelve el sistema cuando $k = 2$. (4 puntos)

- a) Para que el sistema sea compatible determinado el rango de la matriz de coeficientes debe ser 3, por lo que su determinante no debe ser nulo.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Averiguamos para que valores se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2k + 2 + 1 + 2k - 1 + 2 = 4k + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4k + 4 = 0 \Rightarrow 4k = -4 \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

El sistema es compatible determinado para cualquier valor de k distinto de -1 .

- b) Resolvemos el sistema para $k = 2$.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y - 2x \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - y + 2x = 0 \\ 2x + y - y + 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \rightarrow x - y = 0 \rightarrow y = x \\ 4x = 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{-1}{4}}$$

La solución del sistema es $x = y = \frac{1}{4}$; $z = \frac{-1}{4}$.

2. Calcula el área de la figura plana limitada por la recta $y = 2x$ y la curva $y = x^2 - 3$ (6 puntos). Dibuja el recinto limitado por ambas curvas (4 puntos).

Hallamos los puntos de corte de recta y parábola.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = x^2 - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

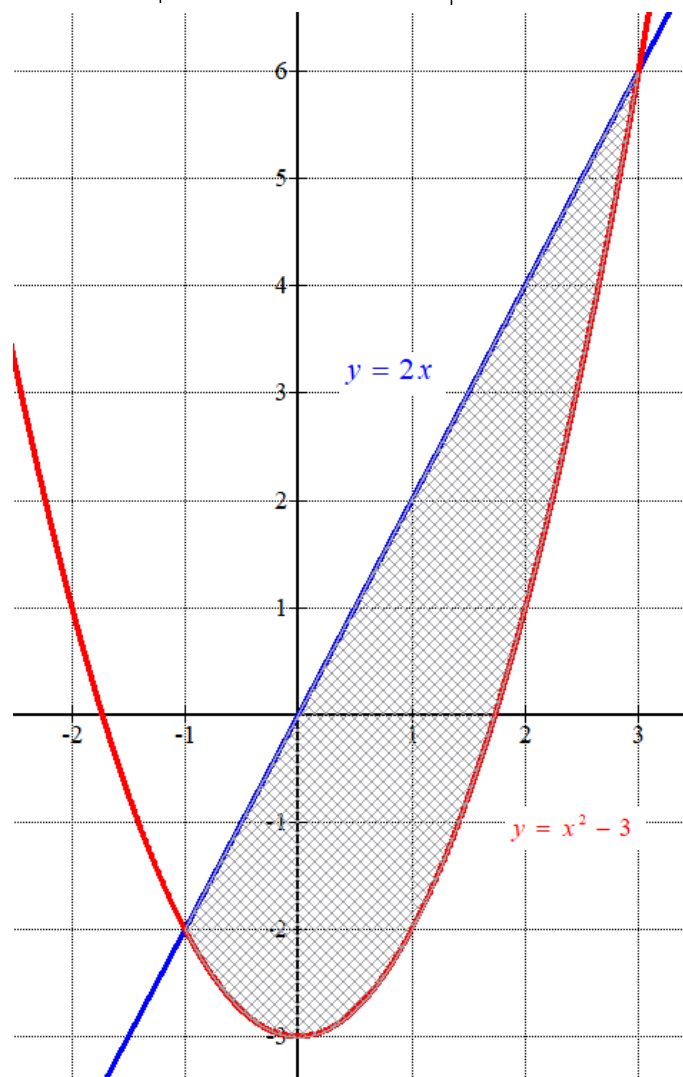
Hacemos una tabla de valores para cada función y dibujamos el recinto limitado por recta y parábola.

$$y = 2x$$

x	$y = 2x$
-1	-2
0	0
3	6

$$y = x^2 - 3$$

x	$y = x^2 - 3$
-1	-2
0	-3
3	6



Calculamos el área del recinto como la integral definida entre -1 y 3 de la diferencia entre la recta y la parábola.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^3 2x - (x^2 - 3) dx = \int_{-1}^3 2x - x^2 + 3 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^3 = \\ &= \left[3^2 - \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3 \right] - \left[(-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1) \right] = 9 - 9 + 9 - 1 - \frac{1}{3} + 3 = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.667 u^2} \end{aligned}$$

El área de la figura plana limitada por la recta $y = 2x$ y la curva $y = x^2 - 3$ tiene un valor aproximado de 10.667 unidades cuadradas.

3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x+a)^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) ¿Para qué valores de a la función es continua en $x=1$? (6 puntos)
 b) Para el valor de a que hace continua la función f en todo su dominio, calcule las derivadas de f en los puntos $x=0$ y $x=3$. ¿Cómo es el crecimiento y decrecimiento de la función en estos puntos? (4 puntos)

- a) La función es continua en $x=1$ cuando los límites laterales coinciden con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= (1+a)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = (1+a)^2 \Rightarrow \begin{cases} 1+a=1 \rightarrow \boxed{a=0} \\ 1+a=-1 \rightarrow \boxed{a=-2} \end{cases}$$

La función es continua en $x=1$ para $a=-2$ o $a=0$.

- b) La función en un entorno de $x=0$ es $f(x)=e^{x-1}$, por lo que su derivada es $f'(x)=e^{x-1}$ y la derivada en $x=0$ valdrá $f'(0)=e^{0-1}=\frac{1}{e}$.

La función en un entorno de $x=3$ es $f(x)=(x+a)^2$, por lo que su derivada es $f'(x)=2(x+a)$ y la derivada en $x=3$ valdrá $f'(3)=2(3+a)=6+2a$. Para $a=-2$ la derivada vale $f'(3)=6-4=2$ y para $a=0$ la derivada vale $f'(3)=6-0=6$.

En $x=0$ la derivada vale $f'(0)=\frac{1}{e}>0$. La función crece en este punto.

En $x=3$ la derivada vale $f'(3)=2>0$ o $f'(3)=6>0$. La función crece en ese punto en ambos casos.

4. Un estuche contiene 17 lápices de color rojo y 13 de color azul.
- a) Si elegimos uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rojo? (2 puntos)
- b) Si extraemos dos al azar, sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de color azul? (4 puntos)
- c) Si elegimos dos al azar, sin reemplazo, calcula la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo sea rojo. (4 puntos)

a) Llamamos A al suceso “elegir lápiz azul”, R al suceso “elegir lápiz rojo”.

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de elegir lápiz rojo vale $\frac{17}{30}$.

b) En la primera extracción la probabilidad de sacar lápiz azul es $\frac{13}{30}$.

Si en la primera extracción hemos sacado un lápiz azul quedan en el estuche 29 lápices, siendo 12 azules y 17 rojos, por lo que la probabilidad de que el segundo lápiz sea azul es $\frac{12}{29}$.

La probabilidad de que al sacar dos lápices sin reemplazo ambos sean de color azul es el producto de las probabilidades anteriores: $\frac{13}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{26}{145} \approx 0.1793$.

c) En la primera extracción la probabilidad de sacar lápiz azul es $\frac{13}{30}$.

Si en la primera extracción hemos sacado un lápiz azul quedan en el estuche 29 lápices, siendo 12 azules y 17 rojos, por lo que la probabilidad de que el segundo lápiz sea rojo es $\frac{17}{29}$.

La probabilidad de que al sacar dos lápices sin reemplazo el primero sea azul y el segundo sea rojo es el producto de las probabilidades anteriores: $\frac{13}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{221}{870} \approx 0.254$.