



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

2017

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Calcula $A^2 - B \cdot C^t$, donde C^t es la matriz traspuesta de la matriz C. (5 puntos)
- b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$. (5 puntos)

2. Un estudio sobre la presencia de CO₂ en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función

$$C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25, \quad 0 \leq t \leq 25$$

(t = años transcurridos desde el año 2000). Se pide:

- a) ¿En qué año se conseguirá un máximo en el nivel de contaminación? (4 puntos)
- b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero? (2 puntos)
- c) ¿Cuándo $t = 17$ el nivel de contaminación será creciente o decreciente? (4 puntos)

3. Sean A y B dos sucesos que tienen probabilidades 0.4 y 0.6 respectivamente. Se sabe que, dado B, la probabilidad de que ocurra A es 0.3. Se pide:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez? (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos sucesos? (3 puntos)
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos? (5 puntos)

4. En cierta entidad bancaria, el 40 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas, y el 10% es para consumo. Se sabe, además, que de los créditos concedidos en vivienda, el 15% resulta impagado; de los créditos concedidos a empresas, son impagados el 20%; y de los créditos concedidos al consumo, resultan impagados el 15%.

- a) Calcule la probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado. (6 puntos)
- b) Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado? (4 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. Un grupo de estudiantes financia su viaje de final de curso con la venta de participaciones de lotería por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado un total de 620 € y han vendido el doble participaciones de 1 € que de 5 €. Si han vendido un total de 280 participaciones, calcule el número de participaciones que han vendido de cada importe. (10 puntos)

2. Una fábrica de papel quiere liquidar hasta 88 kg de papel reciclado y hasta 148 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes de tipo A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes de tipo B, por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote de tipo A es de 1.1 € y el de cada lote de tipo B es de 1.5 €. ¿Cuántos lotes de tipos A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos? (10 puntos)

Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

3. En cierta población el consumo de agua (en m³) en función de las horas del día, viene dado por

$$C(t) = \begin{cases} \frac{17}{9}t, & \text{si } 0 \leq t < 9 \\ \alpha t^2 + \beta t - 172, & \text{si } 9 \leq t < 20 \\ 168 - 7t & \text{si } 20 \leq t < 24 \end{cases}.$$

Sabiendo que la función es continua en el intervalo $(0, 20)$, y que a las 15 horas se alcanza el máximo consumo de agua, determina α y β . (10 puntos)

4. Se sabe que el peso de los jugadores de la liga de fútbol profesional se distribuye según una normal de desviación típica de 6 kg. Para estudiar el peso medio de los jugadores, se extrae una muestra de tamaño 8, y se obtienen los siguientes resultados:

63.7; 48; 43.5; 65; 82; 70.3; 56.5; 50.

a) Calcula un intervalo de confianza a un nivel de significación del 10 % para el peso medio de los jugadores. (6 puntos)

b) De qué tamaño debe ser la muestra para que con el mismo nivel de significación el error cometido en la estimación no exceda de 1.2 kg? (4 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Calcula $A^2 - B \cdot C^t$, donde C^t es la matriz traspuesta de la matriz C. (5 puntos)
 b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$. (5 puntos)

a) Obtenemos la expresión de A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5 & -10+15 \\ 2-3 & -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de $B \cdot C^t$.

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -3-5 \\ 0+2 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de $A^2 - B \cdot C^t$.

$$A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos encontrado que $A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X + B = C \Rightarrow A \cdot X = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+5 & 9-20 \\ -2+2 & 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Un estudio sobre la presencia de CO₂ en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función

$$C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25, \quad 0 \leq t \leq 25$$

(t = años transcurridos desde el año 2000). Se pide:

- a) ¿En qué año se conseguirá un máximo en el nivel de contaminación? (4 puntos)
 b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero? (2 puntos)
 c) ¿Cuándo $t = 17$ el nivel de contaminación será creciente o decreciente? (4 puntos)

a) Vemos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} C'(t) = -0.4t + 4 \\ C'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.4t + 4 = 0 \Rightarrow 0.4t = 4 \Rightarrow \boxed{t = \frac{4}{0.4} = 10}$$

Sustituimos $t = 10$ en la segunda derivada.

$$C''(t) = -0.4 \Rightarrow C''(10) = -0.4 < 0$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda negativa la función tiene un máximo relativo en $t = 10$.

Se alcanzó un máximo en el nivel de contaminación el año $2000 + 10 = 2010$.

b) Buscamos cuando $C(t) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25 \\ C(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.2t^2 + 4t + 25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-0.2)(25)}}{2(-0.2)} = \frac{-4 \pm 6}{-0.4} = \begin{cases} \frac{-4+6}{-0.4} = -5 \notin [0, 25] \\ \frac{-4-6}{-0.4} = \boxed{25 = t} \end{cases}$$

El nivel de contaminación cero se alcanzará en el año $2000 + 25 = 2025$.

c) Comprobamos el signo de la derivada para $t = 17$.

$$C'(17) = -0.4 \cdot 17 + 4 = -2.8 < 0$$

Como la derivada es negativa el año 2017 la contaminación será decreciente.

3. Sean A y B dos sucesos que tienen probabilidades 0.4 y 0.6 respectivamente. Se sabe que, dado B, la probabilidad de que ocurra A es 0.3. Se pide:
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez? (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos sucesos? (3 puntos)
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos? (5 puntos)

Tenemos que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ y $P(A/B) = 0.3$.

- a) Nos piden calcular $P(A \cap B)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.3 = \frac{P(A \cap B)}{0.6} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18}$$

La probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez es de 0.18

- b) Nos piden calcular $P(A \cup B)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.6 - 0.18 = \boxed{0.82}$$

La probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos sucesos es de 0.82

- c) Nos piden calcular $P(\overline{A \cap B})$. Aplicamos las leyes de Morgan.

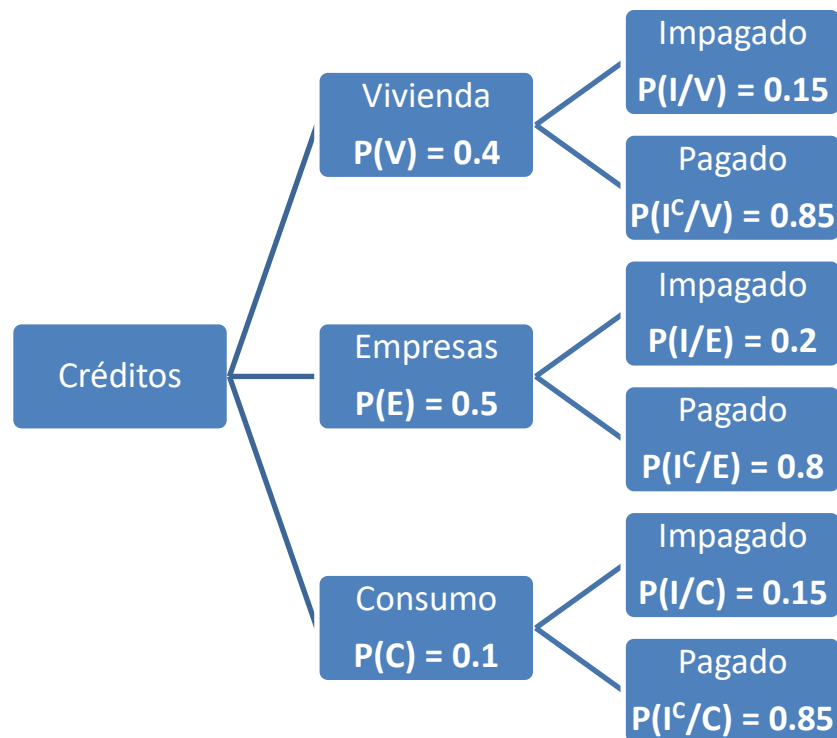
$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.82 = \boxed{0.18}$$

La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos es de 0.18

4. En cierta entidad bancaria, el 40 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas, y el 10% es para consumo. Se sabe, además, que de los créditos concedidos en vivienda, el 15% resulta impagado; de los créditos concedidos a empresas, son impagados el 20%; y de los créditos concedidos al consumo, resultan impagados el 15%.

- a) Calcule la probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado. (6 puntos)
 b) Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado? (4 puntos)

Llamamos V al suceso “el crédito es para vivienda”, E al suceso “el crédito es para empresas”, C a “el crédito es para consumo” e I al suceso “el crédito es impagado”. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(I^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(I^c) &= P(V)P(I^c/V) + P(E)P(I^c/E) + P(C)P(I^c/C) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.85 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.85 = \boxed{0.825}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado es de 0.825

- b) Nos piden calcular $P(C/I^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I^c) = \frac{P(C \cap I^c)}{P(I^c)} = \frac{P(C)P(I^c/C)}{P(I^c)} = \frac{0.1 \cdot 0.85}{0.825} = \boxed{\frac{17}{165} \approx 0.103}$$

La probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado es de $\frac{17}{165} \approx 0.103$

OPCIÓN B

1. Un grupo de estudiantes financia su viaje de final de curso con la venta de participaciones de lotería por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado un total de 620 € y han vendido el doble participaciones de 1 € que de 5 €. Si han vendido un total de 280 participaciones, calcule el número de participaciones que han vendido de cada importe. (10 puntos)

Llamamos “x” el número de participaciones de 1 €, “y” al número de participaciones de 2 € y “z” al número de participaciones de 5 €.

- Han recaudado un total de 620 € $\rightarrow x + 2y + 5z = 620$
- Han vendido un total de 280 participaciones $\rightarrow x + y + z = 280$
- Han vendido el doble participaciones de 1 € que de 5 €. $\rightarrow x = 2z$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 280 \\ x + 2y + 5z = 620 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 280 \\ 2z + 2y + 5z = 620 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 280 \\ 2y + 7z = 620 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 280 - 3z \\ 2y + 7z = 620 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(280 - 3z) + 7z = 620 \Rightarrow 560 - 6z + 7z = 620 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 60} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 280 - 3 \cdot 60 = 100} \\ \boxed{x = 2 \cdot 60 = 120} \end{array} \right.$$

Se vendieron 120 participaciones de 1 €, 100 de 2 € y 60 de 5 €.

2. Una fábrica de papel quiere liquidar hasta 88 kg de papel reciclado y hasta 148 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes de tipo A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes de tipo B, por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote de tipo A es de 1.1 € y el de cada lote de tipo B es de 1.5 €. ¿Cuántos lotes de tipos A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos? (10 puntos)

Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

a) Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Papel reciclado	Papel normal	Ingresos
Número de lotes A (x)	x	3x	1.1x
Número de lotes B (y)	2y	2y	1.5y
TOTALES	$x + 2y$	$3x + 2y$	$1.1x + 1.5y$

Deseamos maximizar los ingresos que tienen la expresión $I(x, y) = 1.1x + 1.5y$.

Las restricciones son:

“Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Una fábrica de papel quiere liquidar hasta 88 kg de papel reciclado y hasta 148 kg de papel normal.” $\rightarrow x + 2y \leq 88; 3x + 2y \leq 148$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 88 \\ 3x + 2y \leq 148 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 88$$

x	y = $\frac{88-x}{2}$
---	----------------------

0	44
---	----

30	29
----	----

88	0
----	---

$$3x + 2y = 148$$

x	y = $\frac{148-3x}{2}$
---	------------------------

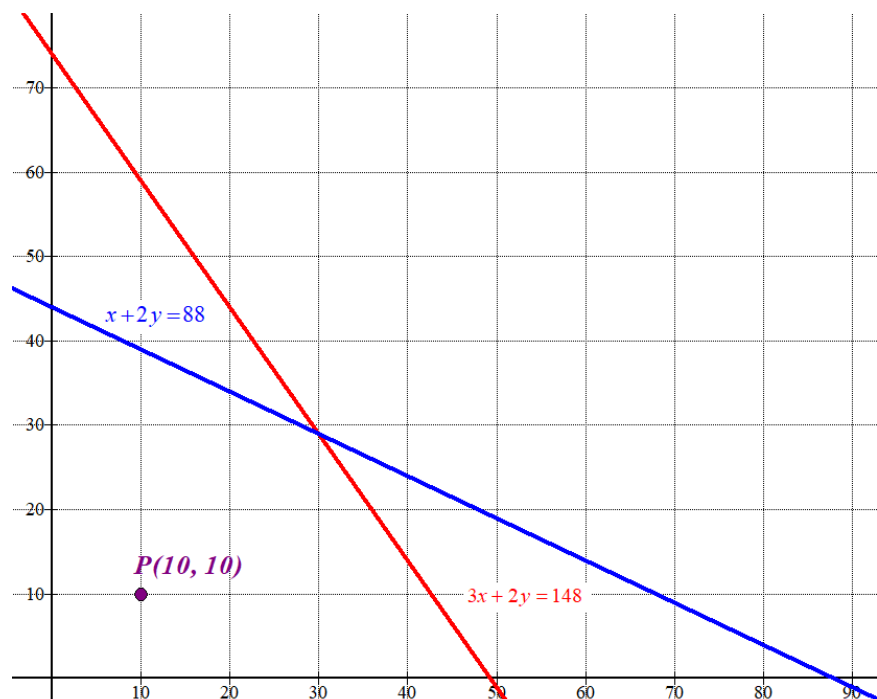
0	74
---	----

30	29
----	----

148/3	0
-------	---

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



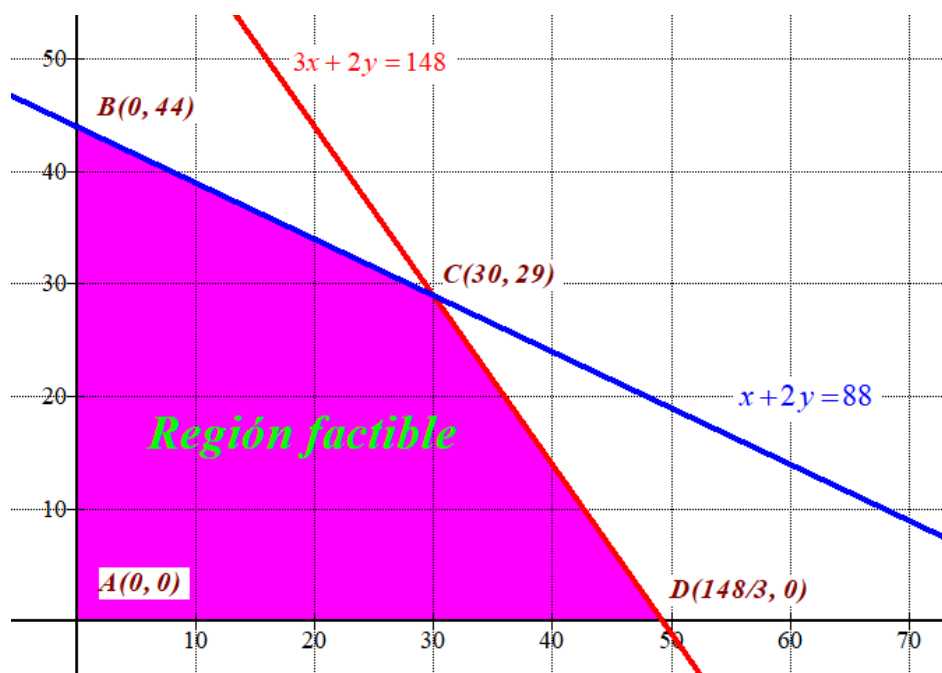
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 88 \\ 3x + 2y \leq 148 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la zona del primer

cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 20 \leq 88 \\ 30 + 20 \leq 148 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas. Coloreo de rosa la región factible en la siguiente imagen.



Hallamos las coordenadas de los vértices B, C y D.

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 88 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 88 \Rightarrow y = \frac{88}{2} = 44 \Rightarrow B(0, 44)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 88 \\ 3x + 2y \leq 148 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 88 \\ 3x + 2y = 148 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 88 - 2y \\ 3x + 2y = 148 \end{array} \Rightarrow 3(88 - 2y) + 2y = 148 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 264 - 6y + 2y = 148 \Rightarrow -4y = -116 \Rightarrow y = \frac{116}{4} = 29 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 88 - 58 = 30 \Rightarrow C(30, 29)$$

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 3x + 2y = 148 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 148 \Rightarrow x = \frac{148}{3} \Rightarrow D\left(\frac{148}{3}, 0\right)$$

Valoro la función $I(x, y) = 1.1x + 1.5y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 44) \rightarrow I(0, 44) = 1.1 \cdot 0 + 1.5 \cdot 44 = 66$$

$$C(30, 29) \rightarrow I(30, 29) = 1.1 \cdot 30 + 1.5 \cdot 29 = 76.5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(148/3, 0) \rightarrow I(148/3, 0) = 1.1 \cdot \frac{148}{3} + 1.5 \cdot 0 \approx 54.26$$

El valor máximo de la función es 76.5 y se alcanza en el punto C(30, 29).

Los ingresos máximos son 76.5 € y se consiguen con 30 lotes A y 29 lotes B.

3. En cierta población el consumo de agua (en m^3) en función de las horas del día, viene dado por

$$C(t) = \begin{cases} \frac{17}{9}t, & \text{si } 0 \leq t < 9 \\ \alpha t^2 + \beta t - 172, & \text{si } 9 \leq t < 20 \\ 168 - 7t & \text{si } 20 \leq t < 24 \end{cases}.$$

Sabiendo que la función es continua en el intervalo $(0, 20)$, y que a las 15 horas se alcanza el máximo consumo de agua, determina α y β . (10 puntos)

La función es continua en $t = 9$ por lo que los límites laterales deben coincidir.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 9^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^-} \frac{17}{9}t = 17 \\ \lim_{t \rightarrow 9^+} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^+} \alpha t^2 + \beta t - 172 = 81\alpha + 9\beta - 172 \\ \lim_{t \rightarrow 9^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^+} C(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 81\alpha + 9\beta - 172 = 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81\alpha + 9\beta = 189 \Rightarrow \boxed{9\alpha + \beta = 21}$$

Si a las 15 horas se alcanza el máximo consumo de agua la derivada de la función debe anularse y la segunda derivada debe ser negativa.

En las proximidades de $t = 15$ la función es $C(t) = \alpha t^2 + \beta t - 172$.

$$\left. \begin{aligned} C(t) &= \alpha t^2 + \beta t - 172 \Rightarrow C'(t) = 2\alpha t + \beta \\ C'(15) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{30\alpha + \beta = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} 30\alpha + \beta &= 0 \\ 9\alpha + \beta &= 21 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \beta &= -30\alpha \\ 9\alpha + \beta &= 21 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9\alpha - 30\alpha = 21 \Rightarrow -21\alpha = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{21}{-21} = -1} \Rightarrow \beta = -30(-1) = 30$$

Los valores buscados son $\alpha = -1$ y $\beta = 30$.

4. Se sabe que el peso de los jugadores de la liga de fútbol profesional se distribuye según una normal de desviación típica de 6 kg. Para estudiar el peso medio de los jugadores, se extrae una muestra de tamaño 8, y se obtienen los siguientes resultados:

63.7; 48; 43.5; 65; 82; 70.3; 56.5; 50.

- a) Calcula un intervalo de confianza a un nivel de significación del 10 % para el peso medio de los jugadores. (6 puntos)
- b) De qué tamaño debe ser la muestra para que con el mismo nivel de significación el error cometido en la estimación no exceda de 1.2 kg? (4 puntos)

a) X = el peso de los jugadores de la liga de fútbol profesional. $X = N(\mu, 6)$.

El tamaño de la muestra es $n = 8$.

La media muestral es $\bar{x} = \frac{63.7 + 48 + 43.5 + 65 + 82 + 70.3 + 56.5 + 50}{8} = 59.875$ kg.

Para un nivel de significación del 10% tenemos que

$$\alpha = 0.1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.05 = 0.95.$$

Mirando en la tabla de la $N(0, 1)$ tenemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$.

	0	1	2	3	4	5
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

Determinamos el error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \frac{6}{\sqrt{8}} \approx 3.49$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es.

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (59.875 - 3.49, 59.875 + 3.49) = (56.385, 63.365)$$

b) Para un nivel de significación del 10% tenemos $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$.

Utilizamos la fórmula del error igualándolo a 1.2 kg y despejando n .

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.2 = 1.645 \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.2 = \frac{9.87}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{9.87}{1.2} = 8.225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 8.225^2 \approx 67.65$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 68 futbolistas.