



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

2019

Model 2

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que guardan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Dadas A , una matriz cuadrada invertible cualquiera, y A^{-1} su inversa; qué matriz se debe obtener al calcular $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$? Describa/indica cómo es esta matriz. (1 punto)

b) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

i) Calcula los valores de x para los cuales se cumple que $A^2 = 2 \cdot A$ (5 puntos)

ii) Para $x = -1$, calcula A^{-1} . Comprueba el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$. (4 puntos)

2. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba al mercado según la función:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40, & 0 \leq t \leq 6, \\ -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}, & 6 < t \leq 8 \end{cases}.$$

a) ¿Cuál es el precio de salida del producto? (1 punto)

b) ¿Es continua la función? ¿Es derivable? Indica los conjuntos de continuidad y derivabilidad. (4 puntos)

c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del precio del producto. (3 puntos)

d) Averigüe en qué momento se alcanzaron los precios máximo y mínimo y cuáles fueron estos precios. (2 puntos)

3. En una máquina se han fabricado 100 piezas, de las cuales 15 han presentado algún defecto.

a) Calcula la proporción de piezas que no son defectuosas. (2 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que, si examinamos dos piezas al azar, ambas resulten defectuosas. (5 puntos)

c) Si probamos dos piezas al azar y la primera es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda no lo sea? (3 puntos)

4. El 70% de los alumnos de bachillerato tienen móvil.

a) Si un centro tiene 1.400 alumnos de bachillerato, ¿cuántos se espera que tengan móvil? (1 punto)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil? (5 puntos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos de bachillerato, haya 140 o menos con teléfono móvil? (4 puntos)

Model 2

OPCIÓN B

1. Un instituto tiene tres partidas presupuestarias: libros, material de cocina y muebles. El presupuesto para muebles de este instituto es cinco veces la suma del de libros más el del material de cocina. El presupuesto para libros es el triple del de material de cocina. La suma del presupuesto para muebles y material de cocina es 7 veces el presupuesto de libros.

- a) Con estos datos, ¿podemos saber el dinero destinado a cada partida presupuestaria? (7 puntos)
- b) Determine las cantidades si para libros hay 2100 €. (3 puntos)

2. KSE es una empresa que fabrica dos modelos de guantes: un modelo normal y un modelo de lujo. La empresa tiene disponibles 900 horas de tiempo en el departamento de producción, 300 horas en el departamento de acabado y 100 horas en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias de cada departamento por par de guantes y los beneficios, en €, se dan en la siguiente tabla:

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	4
De luxe	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	8

¿Cuántos pares de cada modelo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es éste beneficio? (10 puntos)

Se debe plantear el problema como un problema de programación o lineal, dibujando la región factible de soluciones, determinando y dibujando sus vértices.

3. Dibuje el área encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$ (4 puntos). Calcule el área del recinto anterior (6 puntos).

4. Una empresa tiene dos fábricas, en la primera son mujeres el 60% de los trabajadores y en la segunda son hombres el 55% de los trabajadores. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica por pertenecer al comité y de empresa. Supongamos que el hecho de pertenecer a una fábrica es independiente de pertenecer a la otra.

- a) Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos: (6 puntos)
- A = "Ambos son hombres":
- B = "Sólo uno es mujer":
- C = "Ambos son mujeres":
- b) Razone si el suceso contrario del suceso C es el A, el B, el $A \cap B$, el $A \cup B$ o algún otro suceso, y calcule su probabilidad. (4 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. a) Dadas A , una matriz cuadrada invertible cualquiera, y A^{-1} su inversa; qué matriz se debe obtener al calcular $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$? Describa/indica cómo es esta matriz. (1 punto)

b) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

i) Calcula los valores de x para los cuales se cumple que (5 puntos)

$$A^2 = 2 \cdot A$$

ii) Para $x = -1$, calcula A^{-1} . Comprueba el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$. (4 puntos)

a) Se debe obtener la matriz identidad. Si la matriz A es de orden 3 deberían ser los dos

$$\text{productos iguales a } Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b.i) Comprobamos cuando se cumple la igualdad $A^2 = 2 \cdot A$.

$$\begin{aligned} A^2 = 2 \cdot A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2x+x(x+2) \\ 0 & (x+2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+x(x+2) = 2x \\ (x+2)^2 = 2x+4 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ x^2 + 4x = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ x(x+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Se cumple la igualdad para $x = 0$ y $x = -2$.

b.ii) Para $x = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene determinante $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Al ser el determinante no nulo existe la inversa de A . La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A \cdot A^{-1} = Id_2$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 1-1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

2. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba al mercado según la función:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40, & 0 \leq t \leq 6, \\ -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}, & 6 < t \leq 8 \end{cases}.$$

- a) ¿Cuál es el precio de salida del producto? (1 punto)
 b) ¿Es continua la función? ¿Es derivable? Indica los conjuntos de continuidad y derivabilidad. (4 puntos)
 c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del precio del producto. (3 puntos)
 d) Averigüe en qué momento se alcanzaron los precios máximo y mínimo y cuáles fueron estos precios. (2 puntos)

a) Calculamos el valor de $P(0)$.

$$P(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 40 = 40$$

El precio de salida es de 40 000 euros.

b) La función en el intervalo $[0, 6)$ tiene la expresión $P(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40$, que es una

función polinómica y continua. En el intervalo $(6, 8]$ la función es $P(t) = -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}$,

que es una función polinómica y continua.

Estudiamos la continuidad en $t = 6$.

$$\left. \begin{aligned} P(6) &= \frac{1}{3} \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 40 = 256 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} \left(\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 \right) = 256 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} \left(-\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7} \right) = -\frac{113}{14} \cdot 6^2 + \frac{3826}{7} = 256 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(6) = \lim_{t \rightarrow 6^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} P(t) = 256$$

La función es continua en $t = 6$. La función es continua en $[0, 8]$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{6\}$, siendo su derivada $P'(t) = \begin{cases} t^2 + 8t, & 0 \leq t < 6, \\ -\frac{113}{7}t, & 6 < t \leq 8 \end{cases}$.

Estudiamos si es derivable en $t = 6$. Para ello deben ser iguales las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} P'(6^-) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} P'(t) = \lim_{t \rightarrow 6^-} (t^2 + 8t) = 36 + 54 = 90 \\ P'(6^+) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} P'(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} \left(-\frac{113}{7}t \right) = -\frac{113}{7} \cdot 6 = -\frac{678}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P'(6^-) = 90 \neq -\frac{678}{7} = P'(6^+)$$

La función no es derivable en $t = 6$. La función es derivable en $[0, 6) \cup (6, 8]$

c) Igualamos a cero la derivada, en busca de sus puntos críticos.

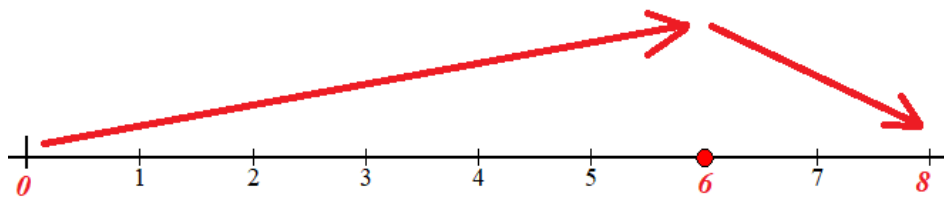
$$P'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 8t = 0 \rightarrow t(t+8) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t + 8 = 0 \rightarrow t = -8 \notin [0, 6) \end{cases} \\ -\frac{113}{7}t = 0 \rightarrow t = 0 \notin (6, 8] \end{cases}$$

El único punto crítico de la función es $t = 0$ que está en el extremo del intervalo de definición de la función $[0, 8]$.

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes y después de $t = 6$.

- En $[0, 6)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = 1^2 + 8 = 9 > 0$. La función crece en $[0, 6)$.
- En $(6, 8]$ tomamos $t = 7$ y la derivada vale $P'(7) = \frac{-113}{7} \cdot 7 = -113 < 0$. La función decrece en $(6, 8]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función $P(t)$ crece en $[0, 6)$ y decrece en $(6, 8]$

- d) A partir del esquema de crecimiento y decrecimiento del apartado anterior y sabiendo que la función es continua tenemos que la función presenta un máximo relativo y absoluto en $t = 6$. Como $P(6) = \frac{1}{3} \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 40 = 256$ el precio máximo es de 256 000 euros.

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para averiguar donde se alcanza el precio mínimo.

$$P(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 40 = 40$$

$$P(8) = \frac{-113}{14} \cdot 8^2 + \frac{3826}{7} = 30$$

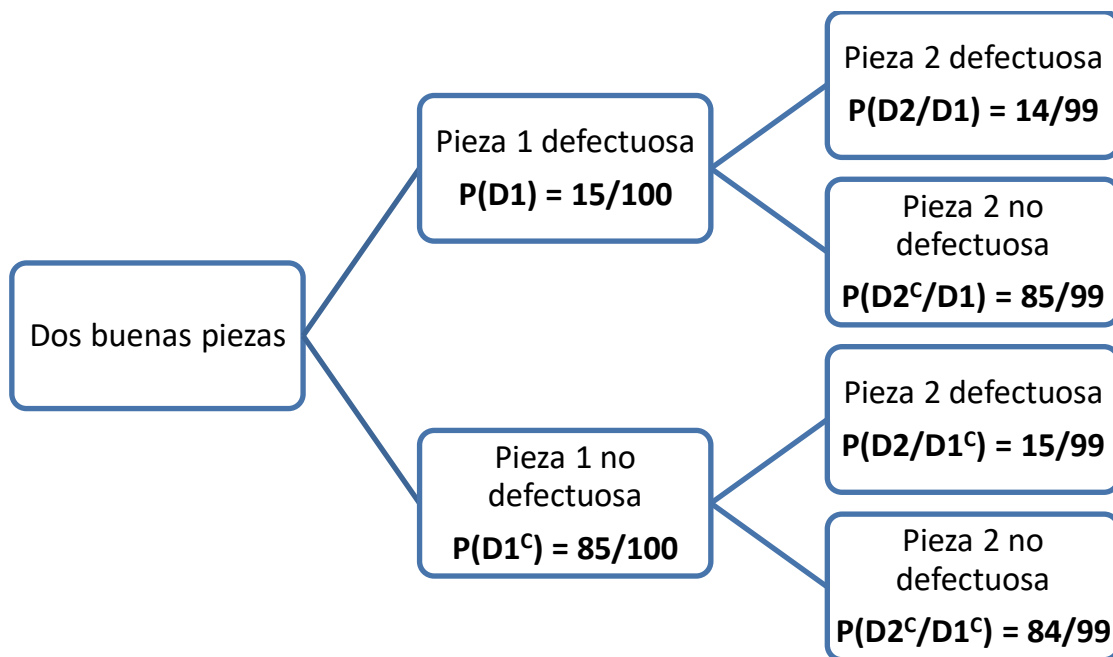
El precio mínimo es de 30 000 euros y se alcanza el octavo año.

3. En una máquina se han fabricado 100 piezas, de las cuales 15 han presentado algún defecto.
- Calcula la proporción de piezas que no son defectuosas. (2 puntos)
 - Calcula la probabilidad de que, si examinamos dos piezas al azar, ambas resulten defectuosas. (5 puntos)
 - Si probamos dos piezas al azar y la primera es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda no lo sea? (3 puntos)

a) Si de 100 piezas hay 15 defectuosas entonces habrán $100 - 15 = 85$ piezas no defectuosas.

La proporción de piezas no defectuosas es $\frac{85}{100} = 0.85$.

b) Realizamos un diagrama de árbol.



Calculamos $P(D1 \cap D2)$.

$$P(D1 \cap D2) = P(D1)P(D2/D1) = \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} = \frac{7}{330} \approx 0.0212$$

La probabilidad de que, si examinamos dos piezas al azar, ambas resulten defectuosas tiene un valor de $\frac{7}{330} \approx 0.0212$

- c) Calculamos $P(D2^c / D1)$. Como se ha elegido la primera pieza quedan 99 para elegir la segunda, y de ellas hay 85 no defectuosas (la primera es defectuosa). Aplicando la regla de Laplace tenemos que $P(D2^c / D1) = \frac{85}{99}$.

4. El 70% de los alumnos de bachillerato tienen móvil.

- a) Si un centro tiene 1.400 alumnos de bachillerato, ¿cuántos se espera que tengan móvil? (1 punto)
- b)Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil? (5 puntos)
- c)Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos de bachillerato, haya 140 o menos con teléfono móvil? (4 puntos)

a) La proporción de alumnos con móvil es 0.70. Multiplicamos este valor por 1400 y obtenemos el número esperado de alumnos con móvil $\rightarrow 1400 \cdot 0.7 = 980$ alumnos con móvil.

b) Llamamos X = Número de alumnos con móvil de un grupo de 150.

X es una variable binomial con $n = 150$ y $p = 0.7$. $X = B(150, 0.7)$.

Nos piden calcular $P(X > 100)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial a una variable normal Y con media $\mu = np = 150 \cdot 0.7 = 105$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{150 \cdot 0.7 \cdot 0.3} = \frac{3\sqrt{14}}{2} \approx 5.61. Y = N(105, 5.61).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 105 > 5$ y $nq = 150 \cdot 0.3 = 45 > 5$.

$$P(X > 100) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 100.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{100.5 - 105}{5.61}\right) = P(Z \geq -0.8) = P(Z \leq 0.8) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.7881}$$

La probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil es de 0.7881.

c) Llamamos X = Número de alumnos con móvil de un grupo de 150.

X es una variable binomial con $n = 200$ y $p = 0.7$. $X = B(200, 0.7)$.

Nos piden calcular $P(X \leq 140)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial a una variable normal Y con media $\mu = np = 200 \cdot 0.7 = 140$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.7 \cdot 0.3} = \sqrt{42} \approx 6.5. Y = N(140, 6.5).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 140 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0.3 = 60 > 5$.

$$P(X \leq 140) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 140.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{140.5 - 140}{6.5}\right) = P(Z \leq 0.08) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.5319}$$

La probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos de bachillerato, haya 140 o menos con teléfono móvil es de 0.5319.

OPCIÓN B

1. Un instituto tiene tres partidas presupuestarias: libros, material de cocina y muebles. El presupuesto para muebles de este instituto es cinco veces la suma del de libros más el del material de cocina. El presupuesto para libros es el triple del de material de cocina. La suma del presupuesto para muebles y material de cocina es 7 veces el presupuesto de libros.

a) Con estos datos, ¿podemos saber el dinero destinado a cada partida presupuestaria?

(7 puntos)

b) Determine las cantidades si para libros hay 2100 €.

(3 puntos)

a) Llamamos “x” al presupuesto para libros, “y” al presupuesto para material de cocina y “z” al presupuesto para muebles.

“El presupuesto para muebles de este instituto es cinco veces la suma del de libros más el del material de cocina” $\rightarrow z = 5(x + y)$

“El presupuesto para libros es el triple del de material de cocina” $\rightarrow x = 3y$

“La suma del presupuesto para muebles y material de cocina es 7 veces el presupuesto de libros” $\rightarrow y + z = 7x$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} z = 5(x + y) \\ x = 3y \\ y + z = 7x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 5(3y + y) \\ y + z = 7 \cdot 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 20y \\ y + z = 21y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 20y \\ z = 20y \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z = 20y}$$

No se puede resolver con precisión el sistema. Las soluciones son infinitas:

$x = 3\alpha$, $y = \alpha$, $z = 20\alpha$, para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

Falta alguna información más que no sea redundante con la que tenemos.

b) Si $x = 2100$ podemos determinar el resto de partidas presupuestarias.

$$\left. \begin{array}{l} x = 3\alpha = 2100 \rightarrow \alpha = 700 \\ y = \alpha \\ z = 20\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{y = 700} \\ \boxed{z = 20 \cdot 700 = 14000} \end{array} \right\}$$

Se destinan 700 euros a material de cocina y 14 000 euros a muebles.

2. KSE es una empresa que fabrica dos modelos de guantes: un modelo normal y un modelo de lujo. La empresa tiene disponibles 900 horas de tiempo en el departamento de producción, 300 horas en el departamento de acabado y 100 horas en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias de cada departamento por par de guantes y los beneficios, en €, se dan en la siguiente tabla:

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	4
De luxe	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	8

¿Cuántos pares de cada modelo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es éste beneficio? (10 puntos)

Se debe plantear el problema como un problema de programación o lineal, dibujando la región factible de soluciones, determinando y dibujando sus vértices.

Llamamos “x” al número de guantes normales e “y” al número de guantes de lujo. Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal (x)	x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{8}$	4x
De luxe (y)	$\frac{3y}{2}$	$\frac{y}{3}$	$\frac{y}{4}$	8y
TOTALES	$x + \frac{3y}{2}$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$	$\frac{x}{8} + \frac{y}{4}$	$4x + 8y$

La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 4x + 8y$, que deseamos maximizarlo.

Las restricciones son:

“Disponemos de 900 horas de tiempo en el departamento de producción” $\rightarrow$

$$x + \frac{3y}{2} \leq 900 \rightarrow 2x + 3y \leq 1800$$

“Disponemos de 300 horas en el departamento de acabado” $\rightarrow$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 300 \Rightarrow 3x + 2y \leq 1800$$

“Disponemos de 100 horas en el departamento de empaquetado” $\rightarrow$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} \leq 100 \Rightarrow x + 2y \leq 800$$

El número de guantes debe ser positivo $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 1800 \\ 3x + 2y \leq 1800 \\ x + 2y \leq 800 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Empezamos dibujando las rectas asociadas a las inecuaciones del sistema.

$$2x + 3y = 1800$$

x	$y = \frac{1800 - 2x}{3}$
0	600
900	0

$$3x + 2y = 1800$$

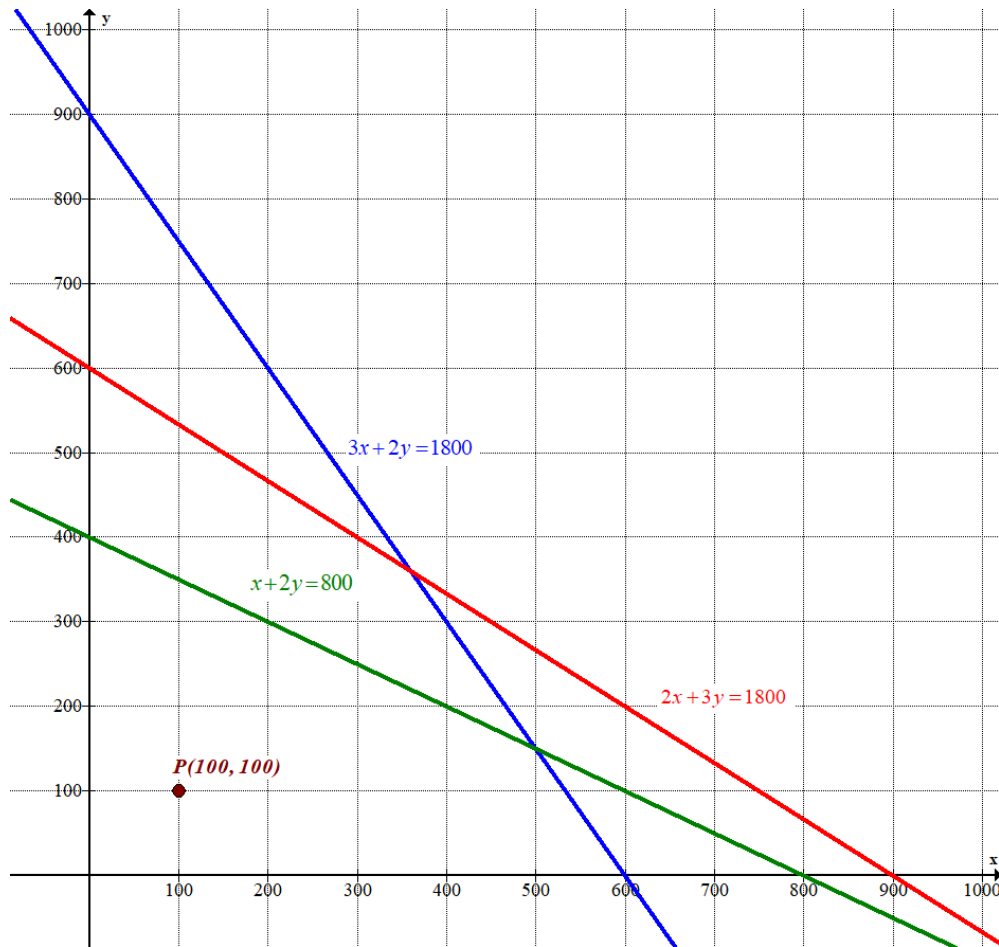
x	$y = \frac{1800 - 3x}{2}$
0	900
600	0

$$x + 2y = 800$$

x	$y = \frac{800 - x}{2}$
0	400
800	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

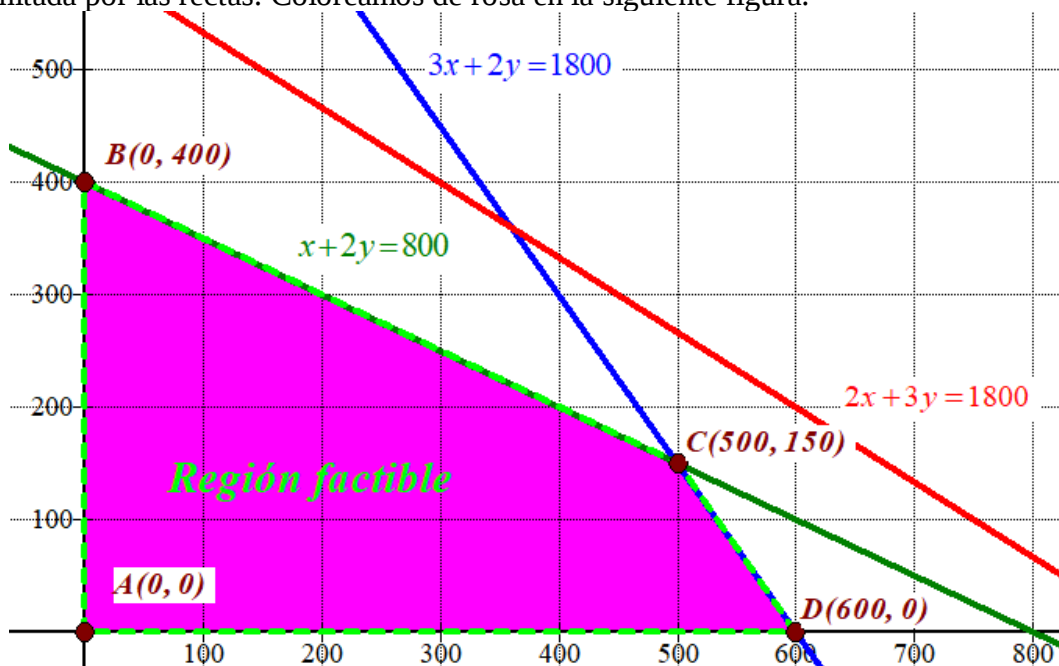
Primer
cuadrante



Compruebo si el punto $P(100, 100)$ cumple las restricciones

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 300 \leq 1800 \\ 300 + 200 \leq 1800 \\ 100 + 200 \leq 800 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{Se cumplen todas}$$

La región factible es la región del primer cuadrante a la que pertenece el punto $P(100, 100)$ y delimitada por las rectas. Coloreamos de rosa en la siguiente figura.



Nos falta determinar las coordenadas del vértice C que podemos obtener resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 1800 \\ x + 2y = 800 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 1800 \\ 2y = 800 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 800 - x = 1800 \Rightarrow 2x = 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1000}{2} = 500 \Rightarrow 2y = 800 - 500 = 300 \Rightarrow y = \frac{300}{2} = 150 \Rightarrow \boxed{C(500, 150)}$$

Valoramos la función $B(x, y) = 4x + 8y$ en cada uno de los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 400) \rightarrow B(0, 400) = 4 \cdot 0 + 8 \cdot 400 = 3200 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(500, 150) \rightarrow B(500, 150) = 4 \cdot 500 + 8 \cdot 150 = 3200 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(600, 0) \rightarrow B(600, 0) = 4 \cdot 600 + 8 \cdot 0 = 2400$$

El beneficio máximo se obtiene en los vértices B y C. Por lo que en cualquier punto del segmento BC los beneficios son máximos.

El beneficio máximo es de 3200 € y se puede obtener de múltiples formas: fabricando sólo 400 guantes de lujo o fabricando 500 normales y 150 de lujo o fabricando 200 normales y 300 de lujo, etc.....

3. Dibuje el área encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$ (4 puntos). Calcule el área del recinto anterior (6 puntos).

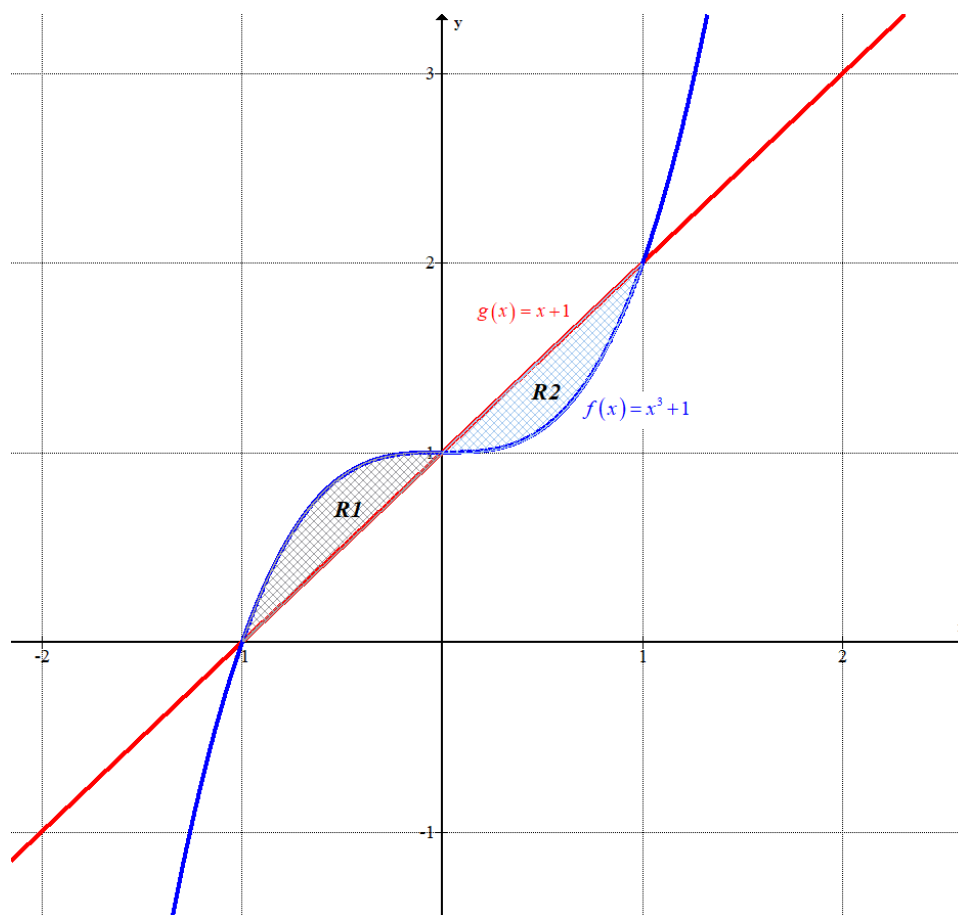
Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + 1 \\ g(x) = x + 1 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 + 1 = x + 1 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas y el recinto limitado por ellas.

x	$f(x) = x^3 + 1$	x	$g(x) = x + 1$
-2	-7	-2	-1
-1	0	-1	0
0	1	0	1
1	2	1	2
2	9	2	3



Como se aprecia en el dibujo el área encerrada entre las gráficas de las funciones es pequeña y no llegará ni a 1 unidad cuadrada.

Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral. Hallamos el área de la región 1 y de la región 2 y las sumamos para obtener el área total.

Región 1.

$$\begin{aligned} \text{Área } R1 &= \int_{-1}^0 x^3 + 1 - (x+1) dx = \int_{-1}^0 x^3 + 1 - x - 1 dx = \int_{-1}^0 x^3 - x dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4} u^2} \end{aligned}$$

Región 2.

$$\begin{aligned} \text{Área } R2 &= \int_0^1 x + 1 - (x^3 + 1) dx = \int_0^1 x + 1 - x^3 - 1 dx = \int_0^1 x - x^3 dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4} u^2} \end{aligned}$$

El área total vale $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 u^2$.

4. Una empresa tiene dos fábricas, en la primera son mujeres el 60% de los trabajadores y en la segunda son hombres el 55% de los trabajadores. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica por pertenecer al comité y de empresa. Supongamos que el hecho de pertenecer a una fábrica es independiente de pertenecer a la otra.

a) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: (6 puntos)

A = "Ambos son hombres":

B = "Sólo uno es mujer":

C = "Ambos son mujeres":

b) Razona si el suceso contrario del suceso C es el A, el B, el $A \cap B$, el $A \cup B$ o algún otro suceso, y calcule su probabilidad. (4 puntos)

Llamamos F1 al suceso "el trabajador pertenece a la primera fábrica", F2 a "el trabajador pertenece a la segunda fábrica", H a "el trabajador es hombre" y H^C a "el trabajador es mujer"

Los datos del ejercicio nos permiten establecer las siguientes probabilidades:

$$P(H^C / F1) = 0.60; P(H / F1) = 0.40; P(H / F2) = 0.55; P(H^C / F2) = 0.45$$

a) En el suceso A debe ser hombre el trabajador elegido en la primera fábrica y también el elegido en la segunda fábrica. Como son independientes las elecciones de cada fábrica tenemos:

$$P(A) = P(H / F1)P(H / F2) = 0.4 \cdot 0.55 = \boxed{0.22}$$

$$P(B) = P(H / F1)P(H^C / F2) + P(H^C / F1)P(H / F2) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.45 + 0.6 \cdot 0.55 = \boxed{0.51}$$

$$P(C) = P(H^C / F1)P(H^C / F2) = 0.6 \cdot 0.45 = \boxed{0.27}$$

b) El suceso contrario de C = "Ambos son mujeres" es el suceso en el cual hay algún hombre, es decir, o bien los dos son hombres (A) o bien solo uno es mujer (B), este suceso contrario es $A \cup B$.

Calculamos la probabilidad del suceso contrario de C.

$$P(C^C) = P(A \cup B) = 1 - P(C) = 1 - 0.27 = \boxed{0.73}$$