



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

2019

Model 1 Criterios específicos de corrección

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que guardan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Resuelve la ecuación $|A| = 0$. ($|A|$ es el determinante de la matriz A) (3 puntos)
- Si $x = 0$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? (2 puntos)
- Si $x = 2$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? En caso afirmativo, resuelve la ecuación $A \cdot Z = I$; donde I es la matriz identidad 3×3 . (5 puntos)

2. El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & 9 < t \leq 24 \end{cases}.$$

Donde N indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las 0:00 h.

- ¿Es continua la función N(t)? (3 puntos)
- ¿Entre qué horas va a aumentar el número de vehículos que pasa por el peaje? ¿En qué horas disminuye? (5 puntos)
- ¿A qué hora va a pasar el mayor número de vehículos? ¿Cuál va a ser ese número? (2 puntos)

3. Tenemos un dado correcto y dos urnas con bolas descritas a continuación:

Urna I: 1 bola negra, 3 bolas rojas y 6 bolas verdes.

Urna II: 2 bolas negras, 6 bolas rojas y 2 bolas verdes.

Tiramos el dado. Si sale 1 o 2, vamos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, acudimos a la urna II. Extraemos al azar una bola de la urna correspondiente.

- Dibuja un diagrama de árbol que represente el experimento y todas las probabilidades. (3 puntos)
- Calcula las probabilidades siguientes: (4 puntos)
 - $p(\{3, 4, 5, 6\} \text{ y } \{bola\ roja\})$
 - $p(\{bola\ verde\} / \{1\})$
 - $p(\{bola\ roja\} / \{5\})$

iv) $p(\{2\} \text{ y } \{bola\ verde\})$

- c) Calcula la probabilidad de que la bola extraída haya sido roja y que haya sido negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída haya sido verde? ¿Cuánto vale la suma de las tres probabilidades? Justifica la respuesta. (3 puntos)

4. Resuelva los siguientes apartados:

- a) El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68.5 kg? ¿Y que sea menor que 68 kg? (5 puntos)
- b) En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de los enfermos. La media de la muestra ha sido de 37,1 °C, y la desviación típica de la población, de 1,04 °C. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. Interpreta el resultado en el entorno del problema. (5 puntos)

Model 1

OPCIÓN B

1. Una empresa de autobuses tiene tres líneas: A, B y C. El lunes salieron 5 autobuses en la línea A, 3 en la B y 4 en la C. El martes salieron 2 autobuses en la línea A, 1 en la B y 4 en la C. El miércoles salieron 1 autobús en la línea A, 3 en la B y 5 en la C.

- Representa los datos en forma de matriz. (2 puntos)
- ¿Tiene inversa la matriz construida en el apartado a)? En caso negativo, justifica la respuesta. En caso positivo, calcule su inversa. (4 puntos)
- Si D es la matriz construida en el apartado a), resuelve, si es posible, el sistema de ecuaciones: (4 puntos)

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

2. Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que se venden en los supermercados. En ese momento están empaquetando dos lotes diferentes. El lote de tipo A tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y el transporte cuesta 0,90 €. El lote tipo B tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y deben elaborar, al menos, 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B.

¿Cuántos lotes de cada clase deben elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos? Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinante y dibujando sus vértices. (10 puntos)

3. El número de visitantes a un museo se obtiene mediante la función

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2}$$

donde t es la hora desde la apertura del museo. Supongamos que la hora de apertura del museo es a las 9:00 horas de la mañana.

- ¿Cuándo crece y decrece el número de visitantes del museo? (4 puntos)
- ¿Cuándo recibe el museo el mayor número de visitantes? ¿Cuál es ese número? (2 puntos)
- ¿En qué valor de t se produce un punto de inflexión de $V(t)$? (4 puntos)

4. Tengo dos urnas descritas a continuación:

Urna I: 2 bolas negras, 1 bola roja y 3 bolas verdes.

Urna II: 1 bola negra, 2 bolas rojas y 1 bola verde.

El experimento consiste en extraer una bola al azar de la urna I, introducirla en la urna II, remover y extraer, finalmente, una bola al azar de la urna II.

- Da un diagrama en árbol que represente el experimento con las probabilidades asociadas. (3 puntos)
- Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea (3 puntos)
 - roja. b.2) negra. b.3) verde.
- Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera? (2 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera roja siendo roja la segunda? (2 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Resuelve la ecuación $|A| = 0$. ($|A|$ es el determinante de la matriz A) (3 puntos)
- b) Si $x = 0$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? (2 puntos)
- c) Si $x = 2$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? En caso afirmativo, resuelve la ecuación $A \cdot Z = I$; donde I es la matriz identidad 3×3 . (5 puntos)

a) Obtenemos la ecuación a resolver y la resolvemos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3(x+2) - 3x^2 - 20 - 5(x+2) + 36 - x^2 =$$

$$= -3x - 6 - 3x^2 - 20 - 5x - 10 + 36 - x^2 = -4x^2 - 8x$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow -4x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = -2$.

- b) Por lo visto en el apartado anterior para $x = 0$ la matriz A tiene determinante igual a cero. Al tener determinante nulo la matriz A no tiene inversa.

- c) Para $x = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ que tiene determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 20 - 20 + 36 - 4 = -32 \neq 0. \text{ Al tener determinante no nulo la}$$

matriz A tiene inversa.

La matriz Z que cumple la igualdad $A \cdot Z = I$ es la matriz inversa de A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}}{-32} = \frac{-1}{32} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{32} \begin{pmatrix} -16 & 4 & 32 \\ 8 & -8 & -24 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matriz Z que cumple la igualdad $A \cdot Z = I$ es $Z = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

2. El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & 9 < t \leq 24 \end{cases}.$$

Donde N indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las 0:00 h.

a) ¿Es continua la función N(t)? (3 puntos)

b) ¿Entre qué horas va a aumentar el número de vehículos que pasa por el peaje? ¿En qué horas disminuye? (5 puntos)

c) ¿A qué hora va a pasar el mayor número de vehículos? ¿Cuál va a ser ese número? (2 puntos)

a) La función en los intervalos $[0,9]$ y $(9,24]$ tiene una expresión polinómica por lo que es continua en dichos intervalos. Estudiamos la continuidad en $t = 9$ (cambio de definición).

$$\left. \begin{aligned} N(9) &= \left(\frac{9-3}{3}\right)^2 + 2 = 6 \\ \lim_{t \rightarrow 9^-} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^-} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 = 6 \\ \lim_{t \rightarrow 9^+} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^+} 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 = 10 - \left(\frac{9-15}{3}\right)^2 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(9) = \lim_{t \rightarrow 9^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 9^+} N(t) = 6$$

La función es continua en $t = 9$. La función es continua en el intervalo $[0, 24]$.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

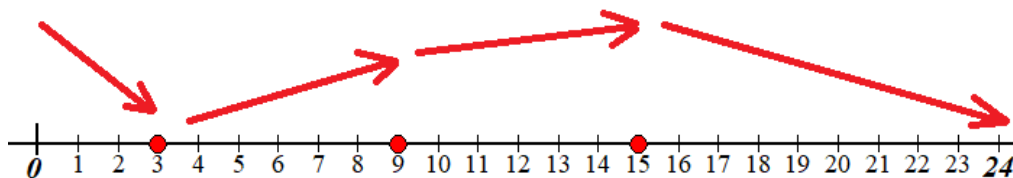
$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & 9 < t \leq 24 \end{cases} \Rightarrow N'(t) = \begin{cases} 2\left(\frac{t-3}{3}\right)\frac{1}{3}, & \text{si } 0 \leq t < 9, \\ -2\left(\frac{t-15}{3}\right)\frac{1}{3}, & 9 < t \leq 24 \end{cases}$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{t-3}{3}\right)\frac{1}{3} = 0 \rightarrow t-3 = 0 \rightarrow \boxed{t=3} \in [0,9), \\ -2\left(\frac{t-15}{3}\right)\frac{1}{3} = 0 \rightarrow t-15 = 0 \rightarrow \boxed{t=15} \in (9,24] \end{cases}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 3$ y $t = 15$. Añadimos el valor $t = 9$ punto donde la derivada cambia de expresión.

- En $[0,3)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $N'(1) = 2\left(\frac{1-3}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{-4}{9} < 0$. La función decrece en $[0,3)$.
- En $(3,9)$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale $N'(4) = 2\left(\frac{4-3}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{2}{9} > 0$. La función crece en $(3,9)$.
- En $(9,15)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $N'(10) = -2\left(\frac{10-15}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{10}{9} > 0$. La función crece en $(9,15)$.
- En $(15,24]$ tomamos $t = 16$ y la derivada vale $N'(16) = -2\left(\frac{16-15}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{-2}{9} < 0$. La función decrece en $(15,24]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función $N(t)$ crece en $(3,15)$ y decrece en $[0,3) \cup (15,24]$.

Entre las 0 horas y las 3 horas el número de vehículos disminuye, entre las 3 y las 15 el número de vehículos que pasa por el peaje aumenta y entre las 15 y las 24 el número de vehículos disminuye.

- d) A partir del esquema de crecimiento y decrecimiento del apartado anterior y sabiendo que la función es continua tenemos que la función presenta un máximo relativo en $t = 15$. Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición y en $t = 15$ para averiguar donde se alcanza el máximo absoluto.

$$N(0) = \left(\frac{0-3}{3}\right)^2 + 2 = 3$$

$$N(15) = 10 - \left(\frac{15-15}{3}\right)^2 = 10 \text{ ¡Máximo!}$$

$$N(24) = 10 - \left(\frac{24-15}{3}\right)^2 = 1$$

El mayor número de vehículos que pasa por el peaje es de 10, y se produce a las 15 horas.

3. Tenemos un dado correcto y dos urnas con bolas descritas a continuación:

Urna I: 1 bola negra, 3 bolas rojas y 6 bolas verdes.

Urna II: 2 bolas negras, 6 bolas rojas y 2 bolas verdes.

Tiramos el dado. Si sale 1 o 2, vamos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, acudimos a la urna II.

Extraemos al azar una bola de la urna correspondiente.

a) Dibuja un diagrama de árbol que represente el experimento y todas las probabilidades.

(3 puntos)

b) Calcula las probabilidades siguientes:

(4 puntos)

i) $p(\{3, 4, 5, 6\} \text{ y } \{bola\ roja\})$

ii) $p(\{bola\ verde\} / \{1\})$

iii) $p(\{bola\ roja\} / \{5\})$

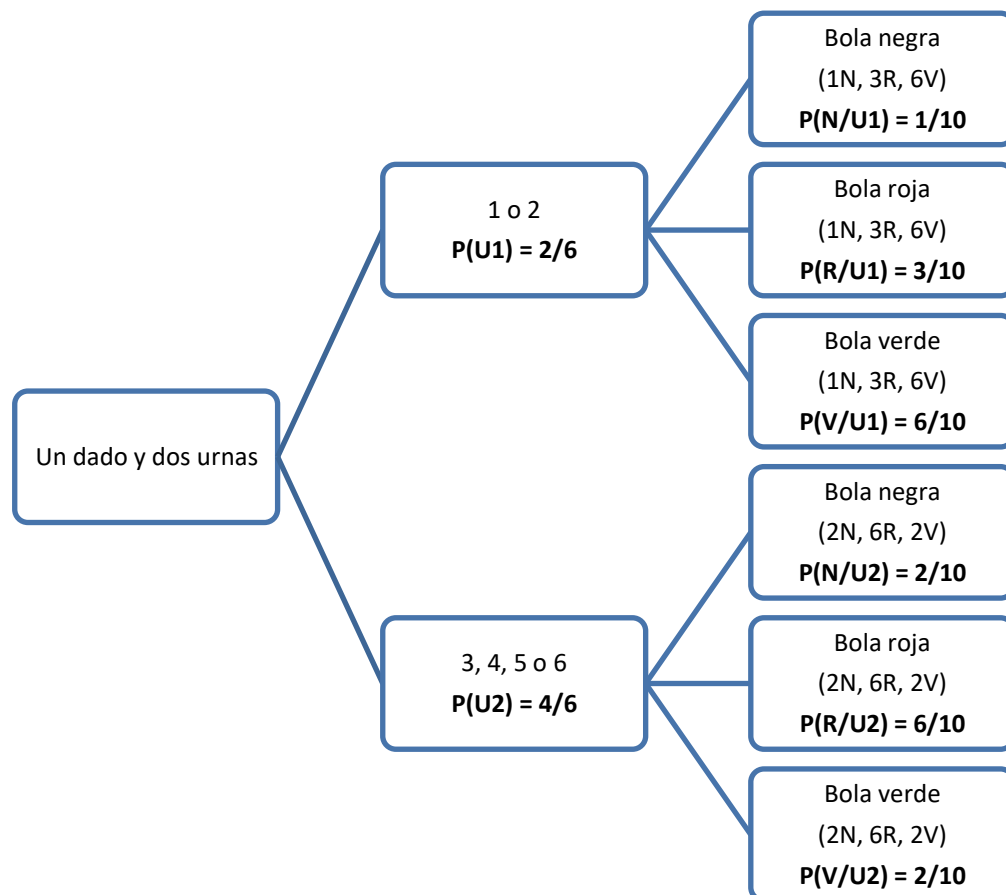
iv) $p(\{2\} \text{ y } \{bola\ verde\})$

c) Calcula la probabilidad de que la bola extraída haya sido roja y que haya sido negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída haya sido verde? ¿Cuánto vale la suma de las tres probabilidades? Justifica la respuesta.

(3 puntos)

a) Llamamos U_1 al suceso “sacar 1 o 2 al lanzar el dado”, U_2 a “sacar 3, 4, 5 o 6 al lanzar el dado”, N a “sacar bola negra”, R a “sacar bola roja” y V a “sacar bola verde”.

Realizamos un diagrama de árbol.



b.i) $p(\{3, 4, 5, 6\} \text{ y } \{bola\ roja\}) = p(\{3, 4, 5, 6\}) \cdot p(\{bola\ roja\} / \{3, 4, 5, 6\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{4}{10} = \boxed{0.4}$

b.ii) $p(\{\text{bola verde}\} / \{1\})$ es la probabilidad de sacar bola verde de la urna 1, pues al sacar 1 con el dado la bola se extrae de la urna 1. En la urna 1 hay 10 bolas y 6 son verdes, por lo que $p(\{\text{bola verde}\} / \{1\}) = \frac{6}{10} = 0.6$.

$$\text{b.iii) } p(\{2\} \text{ y } \{\text{bola verde}\}) = p(\{2\}) \cdot p(\{\text{bola verde}\} / \{2\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{10} = \boxed{0.1}$$

$$\text{c) } P(R) = P(U1)P(R/U1) + P(U2)P(R/U2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \boxed{0.5}$$

$$P(N) = P(U1)P(N/U1) + P(U2)P(N/U2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P(V) = P(U1)P(V/U1) + P(U2)P(V/U2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Si sumamos las tres probabilidades obtenidas obtenemos $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$.

Obtenemos 1 por que la bola que obtenemos al realizar el experimento siempre será roja, negra o verde, por lo que la suma de las tres probabilidades debe ser 1, que es la probabilidad del suceso seguro.

4. Resuelva los siguientes apartados:

- a) El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68.5 kg? ¿Y que sea menor que 68 kg? (5 puntos)
- b) En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de los enfermos. La media de la muestra ha sido de 37,1 °C, y la desviación típica de la población, de 1,04 °C. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. Interpreta el resultado en el entorno del problema. (5 puntos)

- a) $X =$ El peso de los habitantes de una ciudad (en kg). $X = N(67, 5)$.

La distribución de las medias muestrales de tamaño 100 sigue una distribución normal con

la misma media (67 kg) y con desviación típica $\sigma = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0.5$ kg. $\bar{X}_{100} = N(67, 0.5)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{100} > 68.5)$

$$P(\bar{X}_{100} > 68.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{68.5 - 67}{0.5}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} = 1 - 0.9987 = \boxed{0.0013}$$

También nos piden calcular $P(\bar{X}_{100} < 68)$

$$P(\bar{X}_{100} < 68) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{68 - 67}{0.5}\right) = P(Z < 2) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} = \boxed{0.9772}$$

- b) Llamamos $X =$ la temperatura de un paciente.

El tamaño de la muestra es 64. La media muestral es 37.1 °C. La desviación típica es 1.04 °C.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99%.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9933	0.9934
2.5	0.9937	0.9939	0.9941	0.9943	0.9945	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963

Calculamos el error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \frac{1.04}{\sqrt{64}} = 0.33475$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (37.1 - 0.33475, 37.1 + 0.33475) = (36.76525, 37.43475)$$

La interpretación del intervalo de confianza obtenido es la siguiente: La media poblacional tiene una probabilidad de 0.99 de que esté contenida en el intervalo obtenido.

OPCIÓN B

1. Una empresa de autobuses tiene tres líneas: A, B y C. El lunes salieron 5 autobuses en la línea A, 3 en la B y 4 en la C. El martes salieron 2 autobuses en la línea A, 1 en la B y 4 en la C. El miércoles salieron 1 autobús en la línea A, 3 en la B y 5 en la C.

- a) Representa los datos en forma de matriz. (2 puntos)
- b) ¿Tiene inversa la matriz construida en el apartado a)? En caso negativo, justifica la respuesta. En caso positivo, calcule su inversa. (4 puntos)
- c) Si D es la matriz construida en el apartado a), resuelve, si es posible, el sistema de ecuaciones: (4 puntos)

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

a) Hacemos una tabla con la información proporcionada.

	Línea A	Línea B	Línea C
Lunes	5	3	4
Martes	2	1	4
Miércoles	1	3	5

Ponemos estos datos en una matriz D donde las filas son los días y las columnas son las líneas. El cruce de fila y columna (la celda) contiene el número de autobuses que salen ese día en esa línea.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Para ver si la matriz D tiene inversa calculamos su determinante y vemos si es nulo o no.

$$|D| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 + 12 + 24 - 4 - 30 - 60 = -33 \neq 0$$

Como el determinante no es nulo existe la inversa de la matriz D. La calculamos.

$$D^{-1} = \frac{\text{Adj}(D^T)}{|D|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}}{-33} = \frac{-1}{33} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{-1}{33} \begin{pmatrix} -7 & -3 & 8 \\ -6 & 21 & -12 \\ 5 & -12 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos D de la ecuación matricial del ejercicio.

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión el valor de la inversa de D y obtenemos la solución.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} (-33) \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 7+3-8 \\ 6-21+12 \\ -5+12+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \rightarrow 3 \times 1$$

La solución es $x = -2$, $y = 3$ y $z = -8$.

2. Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que se venden en los supermercados. En ese momento están empaquetando dos lotes diferentes. El lote de tipo A tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y el transporte cuesta 0,90 €. El lote tipo B tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y deben elaborar, al menos, 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B.

¿Cuántos lotes de cada clase deben elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos? Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinante y dibujando sus vértices. (10 puntos)

Llamamos “x” al número de lotes A e “y” al número de lotes B.

Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Quesos	Vino	Transporte
Número de lotes A (x)	x	2x	0.9x
Número de lotes B (y)	3y	y	1.5y
TOTALES	$x + 3y$	$2x + y$	$0.9x + 1.5y$

La función objetivo es el coste del transporte $C(x, y) = 0.9x + 1.5y$, que deseamos minimizar.

Las restricciones son:

“La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino” $\rightarrow x + 3y \leq 200$; $2x + y \leq 100$

“Deben elaborar, al menos, 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B” $\rightarrow x \geq 10$; $y \geq 25$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 10 \\ y \geq 25 \end{array} \right\}$$

Empezamos dibujando las rectas asociadas a las inecuaciones del sistema.

$$x + 3y = 200$$

$$2x + y = 100$$

$$x = 10$$

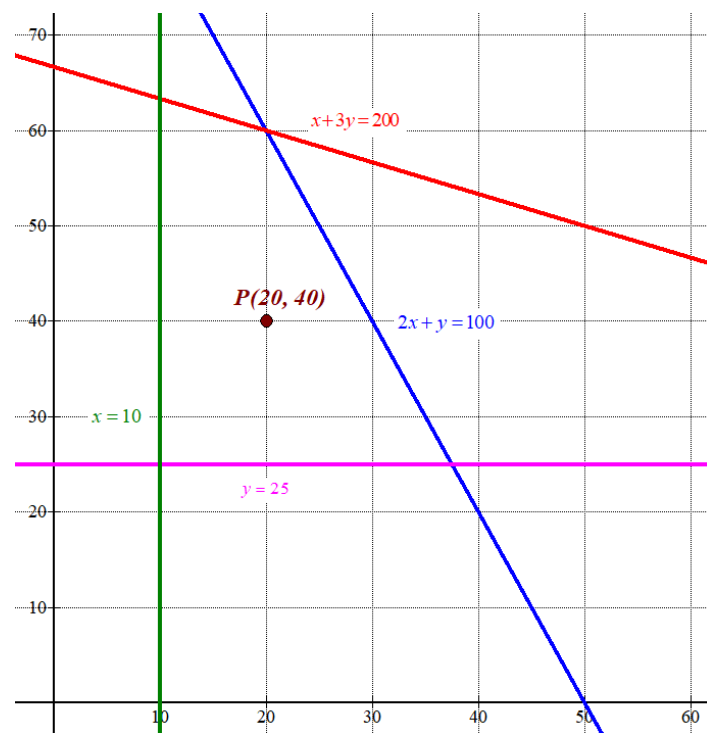
$$y = 25$$

x	$y = \frac{200 - x}{3}$
20	60
50	50

x	$y = 100 - 2x$
20	60
50	0

x	y
10	0
10	25

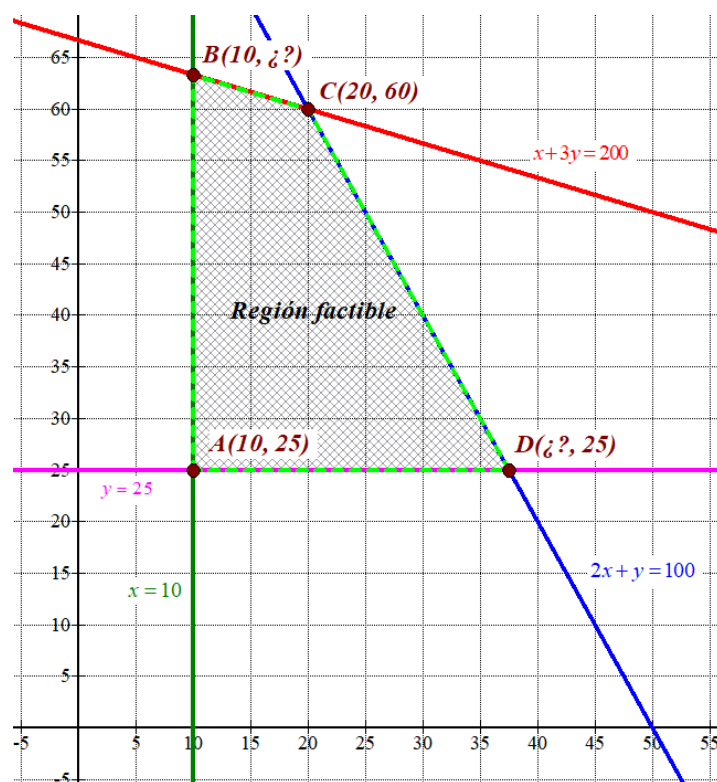
x	$y = 25$
0	25
10	25



Compruebo si el punto $P(20, 40)$ cumple las restricciones

$$\left. \begin{array}{l} 20 + 3 \cdot 40 \leq 200 \\ 2 \cdot 20 + 40 \leq 100 \\ 20 \geq 10 \\ 40 \geq 25 \end{array} \right\} \text{Se cumplen todas}$$

La región factible es la región del primer cuadrante a la que pertenece el punto $P(20, 40)$ y delimitada por las rectas. Es la región del primer cuadrante situada por encima de la recta horizontal rosa, a la derecha de la recta vertical verde y por debajo de las rectas azul y roja. La coloreamos de gris en la siguiente figura.



Nos falta determinar las coordenadas de los vértices B y D, que podemos obtener resolviendo los sistemas correspondientes:

$$B \rightarrow \begin{cases} x + 3y = 200 \\ x = 10 \end{cases} \Rightarrow 10 + 3y = 200 \Rightarrow 3y = 190 \Rightarrow y = \frac{190}{3} \Rightarrow B\left(10, \frac{190}{3}\right)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} y = 25 \\ 2x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow 2x + 25 = 100 \Rightarrow 2x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{2} \Rightarrow D\left(\frac{75}{2}, 25\right)$$

Valoramos la función coste del transporte $C(x, y) = 0.9x + 1.5y$ en cada uno de los vértices, en busca del valor mínimo.

$$A(10, 25) \rightarrow C(10, 25) = 0.9 \cdot 10 + 1.5 \cdot 25 = 46.5 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B\left(10, \frac{190}{3}\right) \rightarrow C\left(10, \frac{190}{3}\right) = 0.9 \cdot 10 + 1.5 \cdot \frac{190}{3} = 104$$

$$C(20, 60) \rightarrow C(20, 60) = 0.9 \cdot 20 + 1.5 \cdot 60 = 108$$

$$D\left(\frac{75}{2}, 25\right) \rightarrow C\left(\frac{75}{2}, 25\right) = 0.9 \cdot \frac{75}{2} + 1.5 \cdot 25 = 71.25$$

El coste mínimo se obtiene en el vértice A(10, 25).

Con 10 lotes A y 25 lotes B se consigue un coste mínimo del transporte con un valor de 46.5 euros.

3. El número de visitantes a un museo se obtiene mediante la función

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2}$$

donde t es la hora desde la apertura del museo. Supongamos que la hora de apertura del museo es a las 9:00 horas de la mañana.

- a) ¿Cuándo crece y decrece el número de visitantes del museo? (4 puntos)
 b) ¿Cuándo recibe el museo el mayor número de visitantes? ¿Cuál es ese número? (2 puntos)
 c) ¿En qué valor de t se produce un punto de inflexión de $V(t)$? (4 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$t^3 + 2 = 0 \Rightarrow t^3 = -2 \Rightarrow t = \sqrt[3]{-2} < 0$$

No hay ningún valor excluido del dominio.

Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2} \Rightarrow V'(t) = \frac{300(t^3 + 2) - 3t^2(300t)}{(t^3 + 2)^2} = \frac{300t^3 + 600 - 900t^3}{(t^3 + 2)^2} = \frac{600 - 600t^3}{(t^3 + 2)^2}$$

$$V'(t) = 0 \Rightarrow \frac{600 - 600t^3}{(t^3 + 2)^2} = 0 \Rightarrow 600 - 600t^3 = 0 \Rightarrow 1 - t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = 1 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt[3]{1} = 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de la primera hora desde la apertura del museo.

Antes de las 10 h tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$V'(0.5) = \frac{600 - 600 \cdot 0.5^3}{(0.5^3 + 2)^2} \approx 116.26 > 0. \text{ La función crece de las 9 a las 10 horas.}$$

$$\text{Después de las 10 horas tomamos } t = 2 \text{ y la derivada vale } V'(2) = \frac{600 - 600 \cdot 2^3}{(2^3 + 2)^2} = -42 < 0.$$

La función decrece de las 10 horas hasta el cierre.

El número de visitantes crece de las 9 a las 10 horas y de las 10 al cierre decrece.

b) Por la evolución del número de visitantes el mayor número de visitantes se produce a las 10 horas. Como $V(1) = \frac{300}{1^3 + 2} = 100$, el máximo número de visitantes es de 100.

c) Buscamos cuando se anula la segunda derivada.

$$V'(t) = \frac{600 - 600t^3}{(t^3 + 2)^2} \Rightarrow V''(t) = \frac{-1800t^2(t^3 + 2) - (600 - 600t^3)2(t^3 + 2)3t^2}{(t^3 + 2)^4} =$$

$$= \frac{-1800t^2(t^3 + 2) - (600 - 600t^3)2 \cdot 3t^2}{(t^3 + 2)^3} = \frac{-1800t^5 - 3600t^2 - 3600t^2 + 3600t^5}{(t^3 + 2)^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} V''(t) = \frac{1800t^5 - 7200t^2}{(t^3 + 2)^3} \\ V''(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1800t^5 - 7200t^2}{(t^3 + 2)^3} = 0 \Rightarrow 1800t^5 - 7200t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1800t^2(t^3 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^3 - 4 = 0 \rightarrow t^3 = 4 \rightarrow t = \sqrt[3]{4} \approx 1.58 \end{cases}$$

El número de visitantes tiene un punto de inflexión un poquito más tarde de las 10 y media.

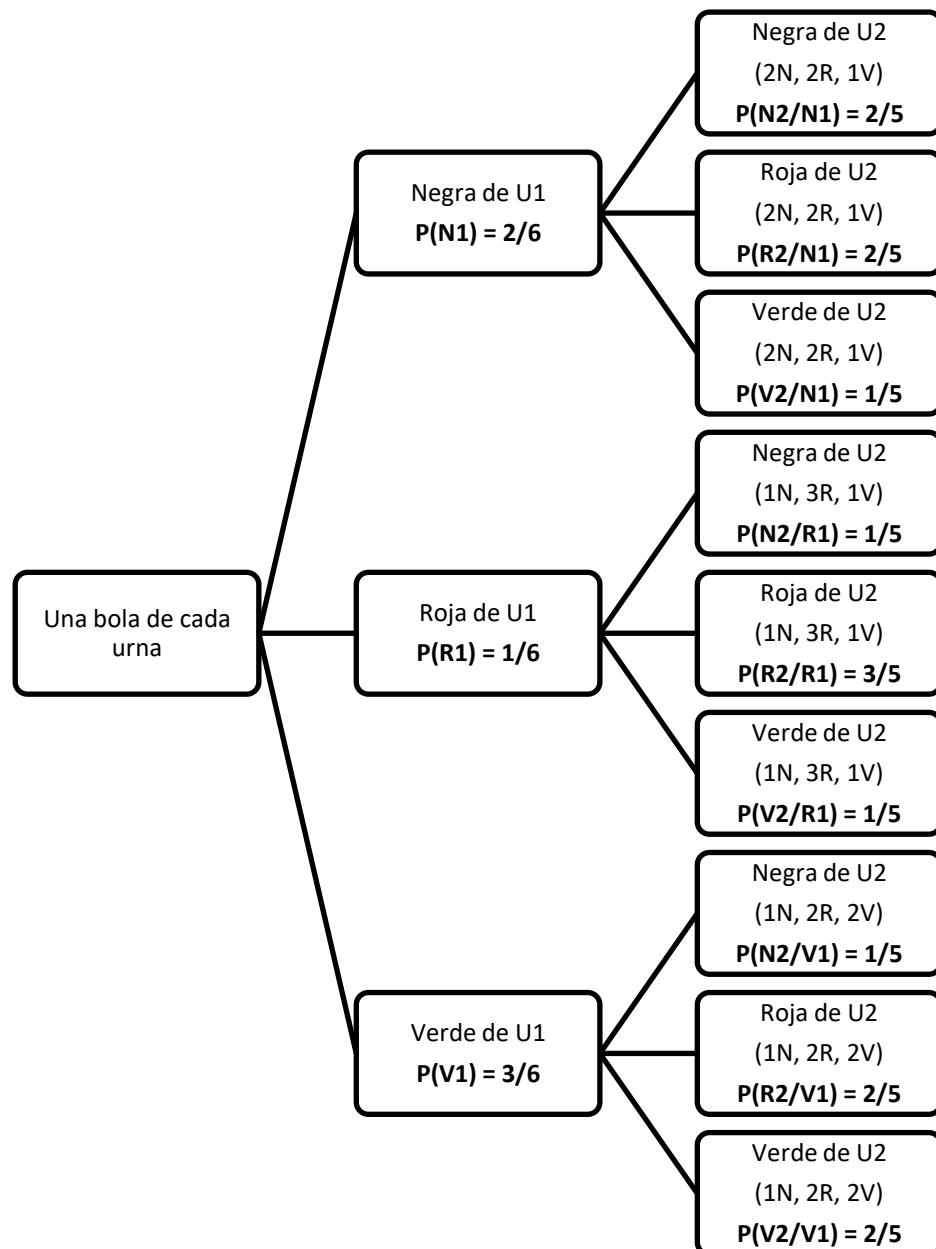
4. Tengo dos urnas descritas a continuación:**Urna I:** 2 bolas negras, 1 bola roja y 3 bolas verdes.**Urna II:** 1 bola negra, 2 bolas rojas y 1 bola verde.

El experimento consiste en extraer una bola al azar de la urna I, introducirla en la urna II, remover y extraer, finalmente, una bola al azar de la urna II.

- a) Da un diagrama en árbol que represente el experimento con las probabilidades asociadas. (3 puntos)
- b) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea (3 puntos)
b.1) roja. b.2) negra. b.3) verde.
- c) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, cuál es la probabilidad de que la primera también ¿lo fuera? (2 puntos)
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera roja siendo roja la segunda? (2 puntos)

a) Llamamos N_1 , N_2 , R_1 , R_2 y V_1 , V_2 a los sucesos “extraer bola negra rojo o verde de la urna I o II”.

Realizamos un diagrama de árbol.



b.1) Nos piden calcular $P(R2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R2) = P(N1)P(R2/N1) + P(R1)P(R2/R1) + P(V1)P(R2/V1) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{13}{30} \approx 0.433}$$

b.2) Nos piden calcular $P(N2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(N2) = P(N1)P(N2/N1) + P(R1)P(N2/R1) + P(V1)P(N2/V1) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{8}{30} \approx 0.2667}$$

b.3) Nos piden calcular $P(V2)$. Esta probabilidad es 1 menos la suma de las dos probabilidades obtenidas anteriormente.

$$P(V2) = 1 - (P(R2) + P(N2)) = 1 - \left(\frac{13}{30} + \frac{8}{30} \right) = \boxed{\frac{9}{30} = 0.3}$$

c) Nos piden calcular $P(N1/N2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/N2) = \frac{P(N1 \cap N2)}{P(N2)} = \frac{P(N1)P(N2/N1)}{P(N2)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{8}{30}} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

d) Nos piden calcular $P(R1/R2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/R2) = \frac{P(R1 \cap R2)}{P(R2)} = \frac{P(R1)P(R2/R1)}{P(R2)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{13}{30}} = \boxed{\frac{3}{13} = 0.231}$$