



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
PAU2025 – BORRADOR

NOTA IMPORTANTE: se debe responder a un máximo de 4 cuestiones, una de cada apartado, y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de entre 2 y 3 puntos. Si se responden las dos cuestiones de un apartado, solo se corregirá la primera que aparezca en el cuadernillo de respuestas. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

APARTADO 1. (a elegir una cuestión)

Cuestión 1. (2,5 puntos)

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{array} \right\}$$

b) (1 punto) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que verifica

$$AX - A = BX + B.$$

Cuestión 2. (2,5 puntos) Una empresa quiere hacer publicidad a través de anuncios en radio y en televisión. Los anuncios pueden emitirse en tres franjas horarias: franja A, franja B y franja C. El número de anuncios de cada franja que emite cada semana cada uno de los medios aparece en la tabla siguiente:

	Franja A	Franja B	Franja C
Televisión	2	10	6
Radio	5	5	6

Se quiere emitir un mínimo de 20 anuncios en la franja A, 50 en la franja B y 42 en la franja C, para lo que realiza contratos semanales con cada uno de los medios de comunicación. El coste del contrato semanal es de 3200 euros para la televisión y 2000 para la radio. ¿Cuántas semanas deberá contratar con cada uno de los medios para alcanzar su proyecto publicitario con un mínimo coste? **(2 puntos)** ¿cuál es el coste mínimo? **(0,5 puntos)**.

APARTADO 2. (a elegir una cuestión)

Cuestión 1. (3 puntos) Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años

viene dado por la función: $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua. **(0,75 puntos)**.

b) Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece. **(1,5 puntos)**.

c) Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor. **(0,75 puntos)**.

Cuestión 2. (3 puntos) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt[4]{3x-1}} \cdot (1 \text{ punto})$

b) $g(x) = e^{2x-1} \ln(x+2) \cdot (1 \text{ punto})$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} \cdot (1 \text{ punto})$

APARTADO 3. (a elegir una cuestión)

Cuestión 1. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 6$. Calcular su área.

Cuestión 2. (2 puntos) Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f , la recta $x = -2$ y el eje OX.

APARTADO 4. (a elegir una cuestión)

Cuestión 1. (2,5 puntos)

En un partido de fútbol cuatro jugadores, A, B, C y D, lanzan en este orden un penalti cada uno. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de marcar de cada uno de ellos es de $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$, respectivamente. Calcular:

- a) La probabilidad de que todos marquen gol. **(0,75 puntos)**
- b) La probabilidad de que ninguno marque. **(0,75 puntos)**
- c) La probabilidad de que al menos uno de ellos marque. **(1 punto)**

Cuestión 2. (2,5 puntos)

El saldo en la cuenta bancaria de los estudiantes de segundo de bachillerato de un instituto de Murcia se distribuye según la distribución normal $N(100,15)$. Calcule:

- a) La probabilidad de que un estudiante tenga menos de 80 euros. **(0,75 puntos)**
- b) La probabilidad de que un estudiante tenga entre 90 y 110 euros. **(1 punto)**
- c) Si la media fuese desconocida y tuviésemos una muestra de tamaño 36, ¿cuál sería el error máximo admisible para un intervalo de confianza del 95% para el saldo medio en la cuenta bancaria de estos estudiantes? **(0,75 puntos)**

SOLUCIONES

APARTADO 1. Cuestión 1. (2,5 puntos)

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$

b) (1 punto) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que verifica

$$AX - A = BX + B.$$

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -1 & a \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 2a = a^2 + a.$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \ 0 \ 2 \ 0 \\ 1 \ 3 \ 1 \ 5 \\ 0 \ 3 \ 3 \ 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \ 3 \ 3 \ 5 \\ 0 \ -3 \ -3 \ -3 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ 3 \ 1 \ 5}^{A/B} \\ 0 \ 3 \ 3 \ 5 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 2}_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.

El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CASO 3. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq -1$ y $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a = -1$ es incompatible (sin solución). Para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Despejamos X de la ecuación matricial $AX - A = BX + B$.

$$AX - A = BX + B \Rightarrow AX - BX = B + A \Rightarrow (A - B)X = B + A \Rightarrow X = (A - B)^{-1}(A + B)$$

Calculamos la matriz $A - B$ y $A + B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que la matriz $A - B$ tiene inversa (determinante no nulo) y la calculamos.

$$|A - B| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } (A - B)^{-1}$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - B)^T)}{|A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = (A - B)^{-1}(A + B) = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 2 - 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

APARTADO 1. Cuestión 2. (2,5 puntos) Una empresa quiere hacer publicidad a través de anuncios en radio y en televisión. Los anuncios pueden emitirse en tres franjas horarias: franja A, franja B y franja C. El número de anuncios de cada franja que emite cada semana cada uno de los medios aparece en la tabla siguiente:

	Franja A	Franja B	Franja C
Televisión	2	10	6
Radio	5	5	6

Se quiere emitir un mínimo de 20 anuncios en la franja A, 50 en la franja B y 42 en la franja C, para lo que realiza contratos semanales con cada uno de los medios de comunicación. El coste del contrato semanal es de 3200 euros para la televisión y 2000 para la radio. ¿Cuántas semanas deberá contratar con cada uno de los medios para alcanzar su proyecto publicitario con un mínimo coste? **(2 puntos)** ¿cuál es el coste mínimo? **(0,5 puntos)**.

Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = número de semanas de contrato con la televisión, y = número de semanas de contrato con la radio.

Completamos una tabla para organizar los datos.

	Franja A	Franja B	Franja C	Coste
Nº semanas televisión (x)	$2x$	$10x$	$6x$	$3200x$
Nº semanas radio	$5y$	$5y$	$6y$	$2000y$
TOTAL	$2x + 5y$	$10x + 5y$	$6x + 6y$	$3200x + 2000y$

Deseamos minimizar el coste $C(x, y) = 3200x + 2000y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

“Se quiere emitir un mínimo de 20 anuncios en la franja A, 50 en la franja B y 42 en la franja C” $\rightarrow$
 $2x + 5y \geq 20$; $10x + 5y \geq 50$; $6x + 6y \geq 42$

Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 5y \geq 20 \\ 10x + 5y \geq 50 \\ 6x + 6y \geq 42 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 5y \geq 20 \\ 2x + y \geq 10 \\ x + y \geq 7 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$2x + 5y = 20$$

x	$y = \frac{20 - 2x}{5}$
0	4
5	2
10	0

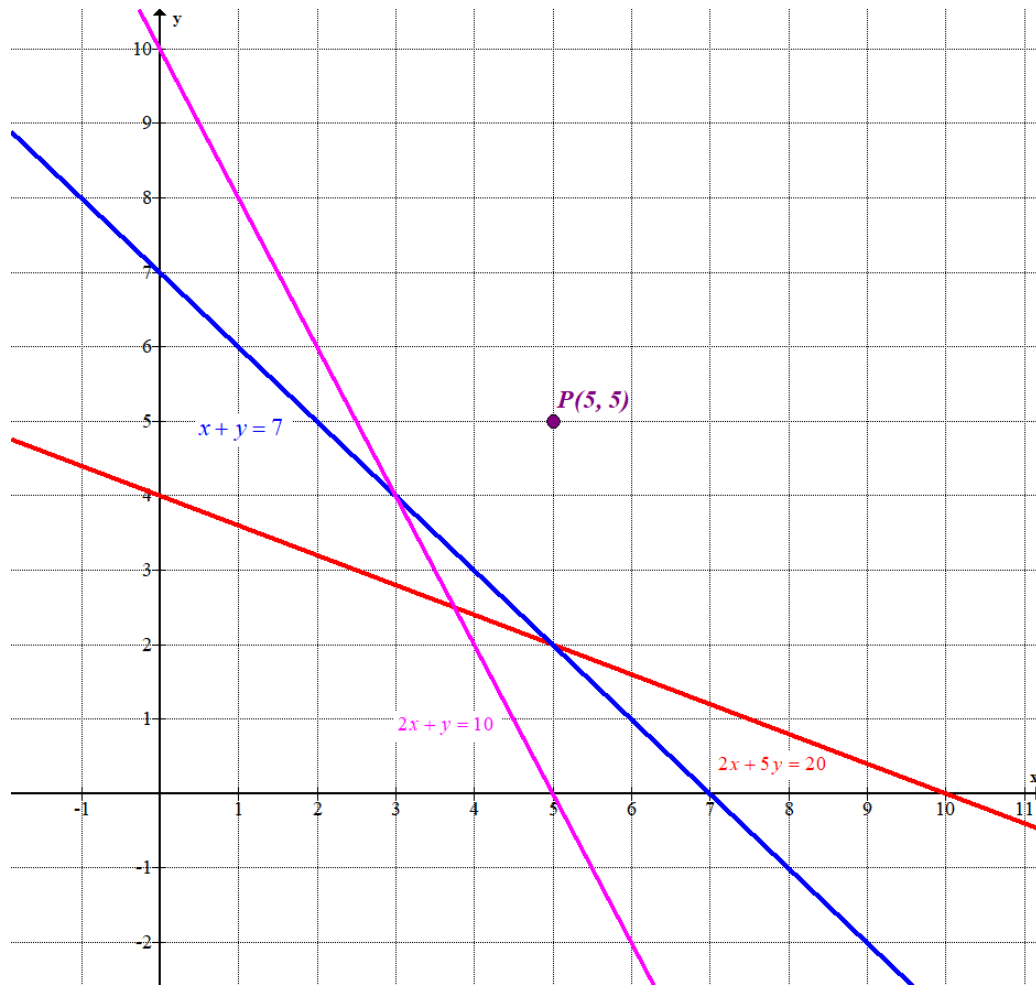
$$2x + y = 10$$

x	$y = 10 - 2x$
0	10
3	4
5	0

$$x + y = 7$$

x	$y = 7 - x$
0	7
3	4
5	2
7	0

$x \geq 0$; $y \geq 0$
 Primer cuadrante



Como las restricciones son:

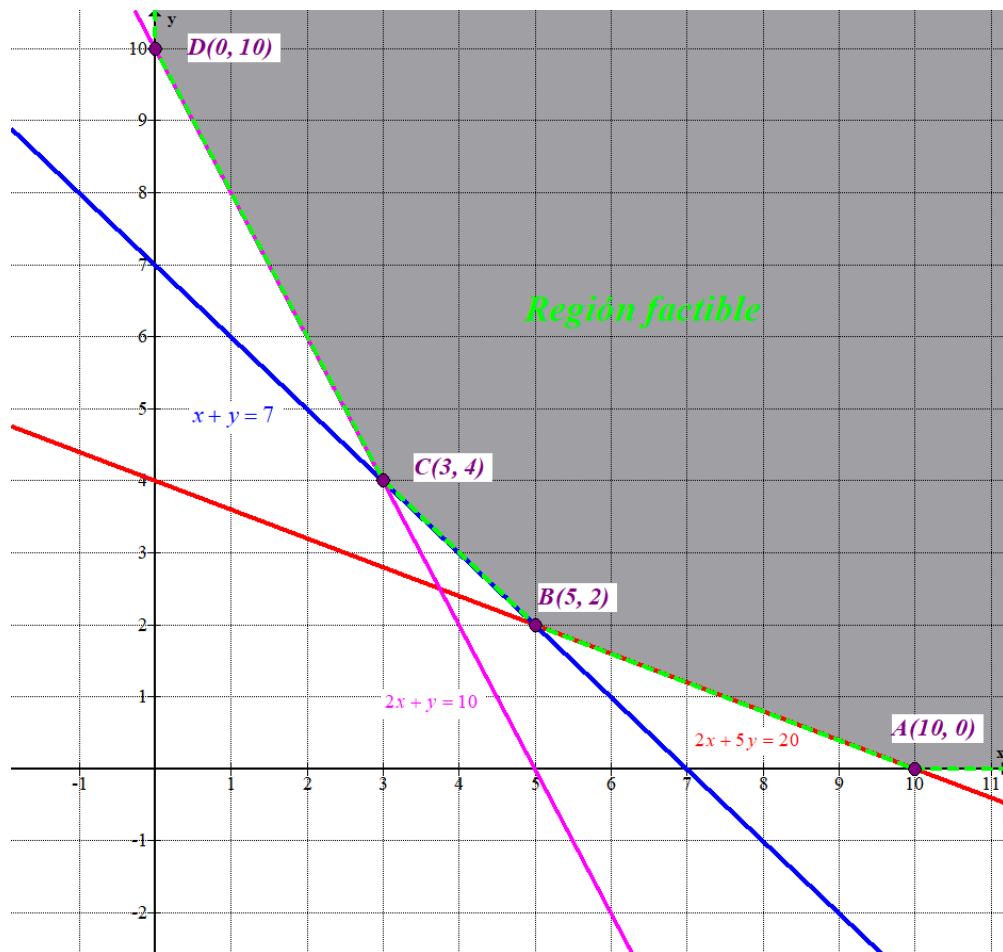
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 5y \geq 20 \\ 2x + y \geq 10 \\ x + y \geq 7 \end{array} \right\} \text{ la región factible se encuentra en el primer cuadrante}$$

por encima de las rectas azul, roja y rosa.

Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \geq 0; 5 \geq 0 \\ 2 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \geq 20 \\ 2 \cdot 5 + 5 \geq 10 \\ 5 + 5 \geq 7 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas y la región factible es la indicada.}$$

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices son: A(10,0), B(5,2), C(3, 4) y D(0, 10)

Valoramos la función coste $C(x, y) = 3200x + 2000y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo. Como la región no es acotada valoramos el coste en un punto lejano E(100, 100)

$$A(10, 0) \rightarrow C(10, 0) = 3200 \cdot 10 + 2000 \cdot 0 = 32000$$

$$B(5, 2) \rightarrow C(5, 2) = 3200 \cdot 5 + 2000 \cdot 2 = 20000$$

$$C(3, 4) \rightarrow C(3, 4) = 3200 \cdot 3 + 2000 \cdot 4 = 17600 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$D(0, 10) \rightarrow C(0, 10) = 3200 \cdot 0 + 2000 \cdot 10 = 20000$$

$$E(100, 100) \rightarrow C(100, 100) = 3200 \cdot 100 + 2000 \cdot 100 = 520000$$

El coste mínimo se obtiene en el punto C(3, 4). Se obtiene un mínimo coste contratando 3 semanas de anuncios en televisión y 4 semanas de anuncios en radio.

El mínimo coste es de 17600 euros.

APARTADO 2. Cuestión 1. (3 puntos) Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

- a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua. **(0,75 puntos).**
- b) Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece. **(1,5 puntos).**
- c) Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor. **(0,75 puntos).**

- a) Para que la función Beneficio sea continua debe serlo en $t = 6$.

$$\left. \begin{aligned} B(6) &= 6a - 6^2 = 6a - 36 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} B(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} at - t^2 = 6a - 36 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} B(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} 2t = 12 \\ B(6) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} B(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} B(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6a - 36 = 12 \Rightarrow 6a = 48 \Rightarrow a = \frac{48}{6} = 8$$

La función Beneficio es continua para $a = 8$.

- b) Para $a = 8$ la función es $B(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$. Sabemos que es continua.

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

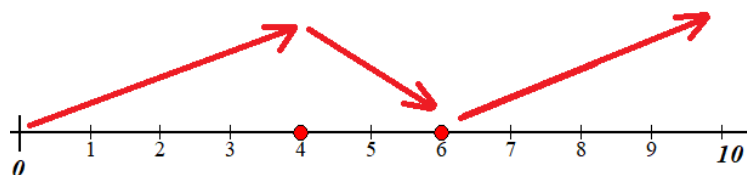
$$B(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases} \Rightarrow B'(t) = \begin{cases} 8 - 2t & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ 2 & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 8 - 2t = 0 \rightarrow 2t = 8 \rightarrow t = 4 \in [0, 6) \\ 2 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Comprobamos la evolución de la función antes de $t = 4$, entre 4 y 6 y después de 6.

- En el intervalo $[0, 4)$ tomamos $t = 1$ y su derivada vale $B'(1) = 8 - 2 = 6 > 0$. La función beneficio crece en el intervalo $[0, 4)$.
- En el intervalo $(4, 6)$ tomamos $t = 5$ y su derivada vale $B'(5) = 8 - 10 = -2 < 0$. La función beneficio decrece en el intervalo $(4, 6)$.
- En el intervalo $(6, 10]$ tomamos $t = 8$ y su derivada vale $B'(8) = 2 > 0$. La función beneficio crece en el intervalo $(6, 10]$.

La función sigue el esquema siguiente.

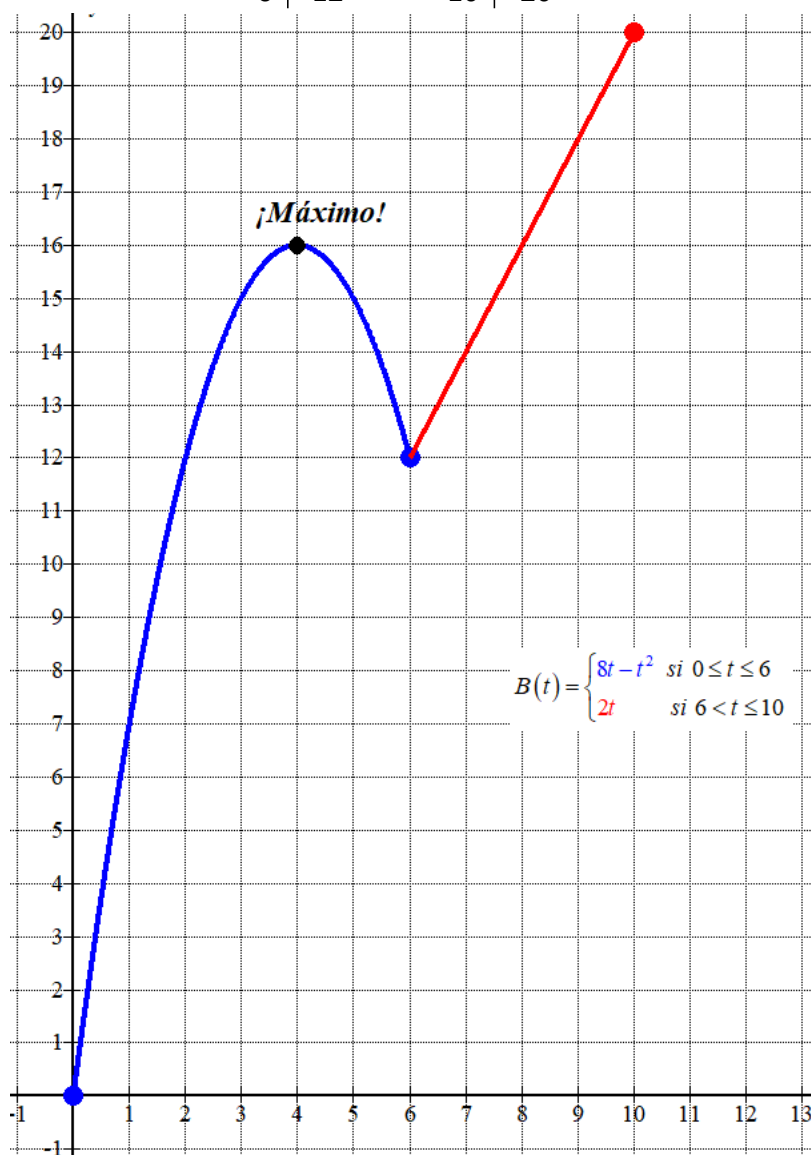


La función crece en $[0,4) \cup (6,10]$ y decrece en $(4,6)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica. Sabemos que es un trozo de parábola y un trozo de recta.

$$0 \leq t \leq 6 \qquad 6 < t \leq 10$$

t	$B(t)$	t	$B(t)$
0	0	7	14
4	16	8	16
6	12	10	20



- c) Por lo estudiado en el apartado anterior y observando la gráfica podemos decir que en los 6 primeros años el máximo beneficio se obtiene el cuarto año, siendo este beneficio máximo de 16.

APARTADO 2. Cuestión 2. (3 puntos) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt[4]{3x-1}} \cdot (1 \text{ punto})$

b) $g(x) = e^{2x-1} \ln(x+2) \cdot (1 \text{ punto})$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} \cdot (1 \text{ punto})$

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x}{\sqrt[4]{3x-1}} = -\frac{x}{(3x-1)^{1/4}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1 \cdot (3x-1)^{1/4} - x \cdot \frac{1}{4}(3x-1)^{1/4-1} \cdot 3}{\left((3x-1)^{1/4}\right)^2} = \\ &= -\frac{(3x-1)^{1/4} - x \cdot \frac{3}{4}(3x-1)^{-3/4}}{(3x-1)^{1/2}} = -\frac{\sqrt[4]{3x-1} - \frac{3x}{4(\sqrt[4]{3x-1})^3}}{\sqrt{3x-1}} = -\frac{\frac{4(\sqrt[4]{3x-1})^4 - 3x}{4(\sqrt[4]{3x-1})^3}}{\sqrt{3x-1}} = \\ &= -\frac{4(3x-1) - 3x}{4(\sqrt[4]{3x-1})^3 \sqrt{3x-1}} = -\frac{12x - 4 - 3x}{4(\sqrt[4]{3x-1})^3 (\sqrt[4]{3x-1})^2} = \frac{4-9x}{4(3x-1)\sqrt[4]{3x-1}} \end{aligned}$$

b) $g(x) = e^{2x-1} \ln(x+2) \Rightarrow g'(x) = 2e^{2x-1} \ln(x+2) + e^{2x-1} \frac{1}{x+2}$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} \Rightarrow h'(x) = \frac{\frac{1(1+x) - 1(x-1)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{1+x}}} = \frac{\frac{2}{(1+x)^2}}{\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}}} = \frac{2\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2 \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^2 \sqrt{x-1}}$

APARTADO 3. Cuestión 1. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 6$. Calcular su área.

Hallamos los puntos de corte de las dos parábolas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x + 2 \\ g(x) = -x^2 + 6 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 6 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = x \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \end{cases}$$

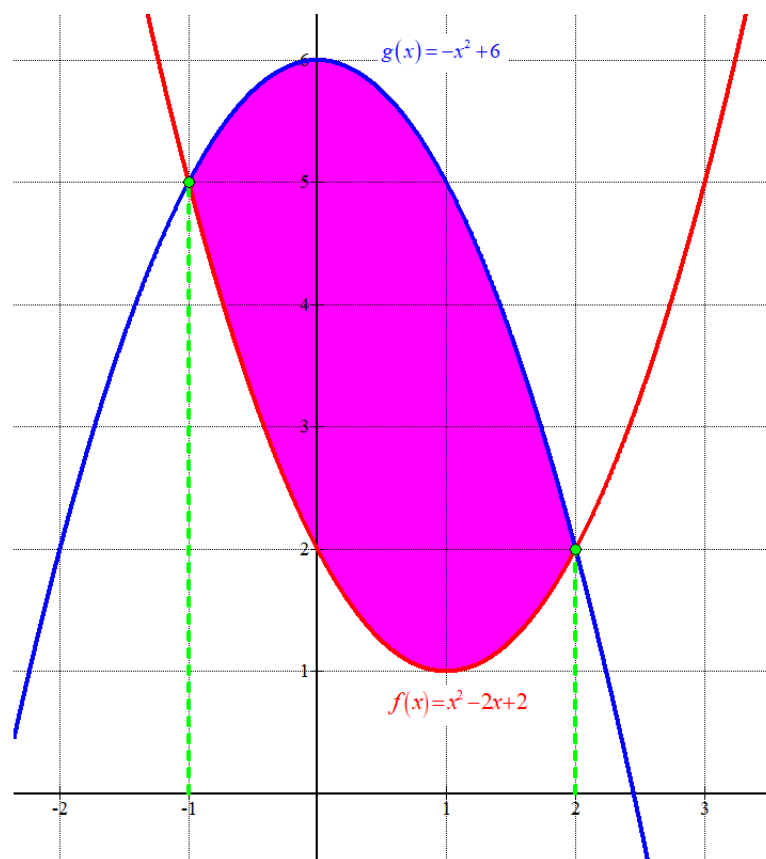
Hacemos una tabla de valores, dibujamos las dos gráficas y el recinto limitado por ellas.

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

x	$y = x^2 - 2x + 2$
-1	5
0	2
1	1
2	2

$$g(x) = -x^2 + 6$$

x	$y = -x^2 + 6$
-1	5
0	6
1	5
2	2



El área del recinto es el valor de la integral definida entre -1 y 2 de $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^2 g(x) - f(x) dx = \int_{-1}^2 -x^2 + 6 - (x^2 - 2x + 2) dx = \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 dx = \\ &= \left[-2\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = \left[-2\frac{2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2 \right] - \left[-2\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4(-1) \right] = \\ &= -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = \boxed{9 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área del recinto tiene un valor de 9 unidades cuadradas.

APARTADO 3. Cuestión 2. (2 puntos) Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f , la recta $x = -2$ y el eje OX.

Buscamos los puntos de corte de la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+1=0 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2} \notin (-\infty, 0) \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \in [0, +\infty) \end{cases}$$

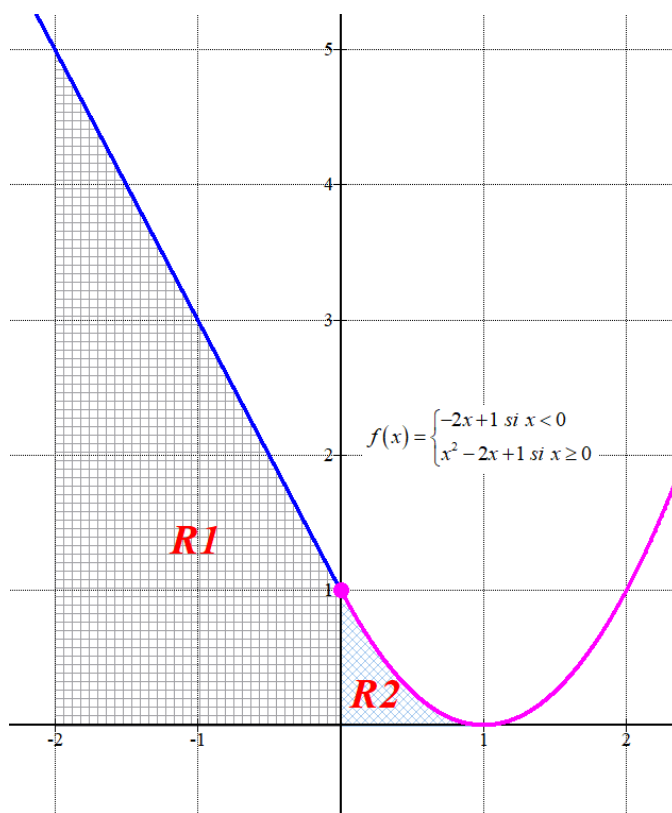
Eje OX $\rightarrow y = 0$

Hacemos una tabla de valores y representamos el recinto del cual queremos hallar el área.

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

x	$y = -2x + 1$
-2	5
-1	3
0	1

x	$y = x^2 - 2x + 1$
0	1
1	0



El área del recinto acotado limitado por la gráfica de f , la recta $x = -2$ y el eje OX es el valor de la integral de la función entre -2 y 1 . Como la función cambia de definición en $x = 0$ dividimos el cálculo del área en 2 trozos, uno entre -2 y 0 , el otro entre 0 y 1 .

Área de R1.

$$\text{Área R1} = \int_{-2}^0 -2x + 1 dx = \left[-x^2 + x \right]_{-2}^0 = \left[-0^2 + 0 \right] - \left[-(-2)^2 + (-2) \right] = 6$$

Área de R2.

$$\text{Área R2} = \int_0^1 x^2 - 2x + 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 + 0 \right] = \frac{1}{3}$$

El área del recinto acotado limitado por la gráfica de f , la recta $x = -2$ y el eje OX tiene un valor de $6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3} \approx 6.333$ unidades cuadradas.

APARTADO 4. Cuestión 1. (2,5 puntos)

En un partido de fútbol cuatro jugadores, A, B, C y D, lanzan en este orden un penalti cada uno. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de marcar de cada uno de ellos es de $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$, respectivamente. Calcular:

- a) La probabilidad de que todos marquen gol. **(0,75 puntos)**
- b) La probabilidad de que ninguno marque. **(0,75 puntos)**
- c) La probabilidad de que al menos uno de ellos marque. **(1 punto)**

- a) Que marque gol un jugador no influye en que marque gol o no el siguiente jugador, por lo que la probabilidad de que todos marquen gol es el producto de las probabilidades de que marque gol cada uno de los jugadores.

Llamamos G_1 , G_2 , G_3 y G_4 a los sucesos marcar gol el jugador A, B, C o D, respectivamente.

$$P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4) = P(G_1) \cdot P(G_2) \cdot P(G_3) \cdot P(G_4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{40} = 0.225$$

- b) La probabilidad de que ninguno marque gol es el producto de las probabilidades de que no marque gol cada uno de los jugadores.

$$P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4}) = P(\overline{G_1}) \cdot P(\overline{G_2}) \cdot P(\overline{G_3}) \cdot P(\overline{G_4}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{150} \approx 0.0067$$

- c) El suceso “Al menos uno de ellos marque” es el complementario de “Ninguno de ellos marca gol” cuya probabilidad hemos calculado en el apartado anterior.

$$P(\text{Al menos uno marca gol}) = 1 - P(\text{Ninguno marca gol}) = 1 - \frac{1}{150} = \frac{149}{150} \approx 0.9933$$

APARTADO 4. Cuestión 2. (2,5 puntos)

El saldo en la cuenta bancaria de los estudiantes de segundo de bachillerato de un instituto de Murcia se distribuye según la distribución normal $N(100,15)$. Calcule:

- a) La probabilidad de que un estudiante tenga menos de 80 euros. **(0,75 puntos)**
 b) La probabilidad de que un estudiante tenga entre 90 y 110 euros. **(1 punto)**
 c) Si la media fuese desconocida y tuviésemos una muestra de tamaño 36, ¿cuál sería el error máximo admisible para un intervalo de confianza del 95% para el saldo medio en la cuenta bancaria de estos estudiantes? **(0,75 puntos)**

X = Saldo en la cuenta bancaria de los estudiantes de segundo de bachillerato. $X = N(100, 15)$

- a) Nos piden calcular $P(X < 80)$.

$$P(X < 80) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{80-100}{15}\right) = P(Z < -1.33) =$$

$$= P(Z > 1.33) = 1 - P(Z < 1.33) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9082 = \boxed{0.0818}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.

La probabilidad de que un estudiante tenga menos de 80 euros es de 0.0818.

- b) Nos piden calcular $P(90 \leq X \leq 110)$.

$$P(90 \leq X \leq 110) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{90-100}{15} \leq Z \leq \frac{110-100}{15}\right) =$$

$$= P(-0.67 \leq Z \leq 0.67) = P(Z \leq 0.67) - P(Z \leq -0.67) =$$

$$= P(Z \leq 0.67) - [1 - P(Z \leq 0.67)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} =$$

$$= 0.74861 - [1 - 0.7486] = \boxed{0.4972}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794

La probabilidad de que un estudiante tenga entre 90 y 110 euros es de 0.4972.

- c) X = Saldo en la cuenta bancaria de los estudiantes de segundo de bachillerato. $X = N(\mu, 15)$
La muestra es de 36 estudiantes

Para un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

El error del intervalo de confianza viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{36}} = 4.9$$

El error máximo admisible para un intervalo de confianza del 95% para el saldo medio en la cuenta bancaria de estos estudiantes es de 4.9 euros.