



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2017

Modelo 2

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. Supongamos que P_1 , P_2 , P_3 y P_4 son las calificaciones de los problemas sobre 10. La calificación final se obtiene de aplicar la fórmula

siguiente: $\frac{4}{15}(P_1 + P_3 + P_4) + \frac{1}{5}P_2$. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje

(matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para que valores de m el sistema siguiente es compatible.

$$\left. \begin{array}{l} mx + 3z = m, \\ x + 2y - z = 1, \\ 2x + y - z = 2. \end{array} \right\} \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo en el caso o casos en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

2. El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t) = -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10$$

donde t viene dado en días y va desde el día $t = 1$ (lunes) hasta el día $t = 8$ (lunes de la siguiente semana).

a) Determine el día de la semana que llovió más y el que llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió estos dos días? (6 puntos)

b) Haga un pequeño dibujo de la función anterior durante los 8 días. (4 puntos)

3. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$,

a) demuestre que se cruzan. (4 puntos)

b) calcule la distancia entre las rectas. (6 puntos)

4. Lanzamos dos dados de 6 caras no trucados y consideramos los siguientes sucesos:

S_7 : "la suma de los resultados de ambos dados es 7".

P : "el producto de los resultados de ambos dados es impar".

a) Calcula las probabilidades de que ocurran los sucesos anteriores. (6 puntos)

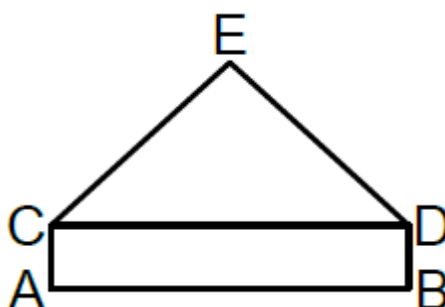
b) ¿Son independientes S_7 y P ? Razona la respuesta. (4 puntos)

Modelo 2

OPCIÓN B

1. Tenemos tres grifos para llenar un depósito de agua y suponemos que el caudal que cae por cada grifo es constante. Si utilizamos el grifo 1, tardamos 10 horas para llenar el depósito, si utilizamos los grifos 1 y 2, tardamos 4 horas, y si los utilizamos los tres, tardamos una hora. Suponiendo que la suma de los caudales de los tres grifos es 10 litros por minuto, calcule el caudal del agua de cada grifo (8 puntos) y el volumen del depósito (2 puntos).

2. Debemos diseñar una ventana como la que sale en la figura adjunta, o sea, el polígono ACEDB, de 30 metros de perímetro. Se trata de un rectángulo con un triángulo equilátero encima. Calcula las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima. (10 puntos)



3. Considere las rectas siguientes dependientes de un parámetro λ :

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda t, \\ r: y = -1 + t, \\ z = 3 - 2t. \end{array} \right\}, \quad s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}$$

- Calcula el valor de λ para que r y s se corten. (4 puntos)
- Calcula el punto de intersección para el valor de λ calculado. (3 puntos)

4. El test de inteligencia (CI) es una prueba de que en teoría mide la inteligencia del individuo y da un valor que aproximadamente tiene de media 100. O sea, el nivel 100 se supone que es el nivel de inteligencia de una persona normal. Supongamos ahora que el nivel de inteligencia de una determinada población sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 10.

- Calcula el porcentaje de la población que se considera superdotada. Una persona se considera superdotada si tiene un nivel de inteligencia superior a 130. (3 puntos)
- Calcula el porcentaje de la población con un nivel de inteligencia entre 90 y 110. (3 puntos)
- Nos dicen que el 70% de la población tiene un nivel de inteligencia menor que un cierto umbral. Calcula este umbral. (4 puntos)



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2017

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Discute para que valores de m el sistema siguiente es compatible.

$$\left. \begin{array}{l} mx + 3z = m, \\ x + 2y - z = 1, \\ 2x + y - z = 2. \end{array} \right\} \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo en el caso o casos en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

a) Consideremos la matriz de coeficientes del sistema $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 0 & 3 & m \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2m + 0 + 3 - 12 - 0 + m = -m - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -9}$$

Analizamos las dos situaciones distintas que se nos plantean.

CASO 1. $m \neq -9$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

El rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $m = -9$

Para este valor hallamos el rango de A y de A/B .

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & -9 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss

para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & -9 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \\ -2 \quad -4 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + 9 \cdot \text{Fila } 2^a \\ -9 \quad 0 \quad 3 \quad -9 \\ 9 \quad 18 \quad -9 \quad 9 \\ \hline 0 \quad 18 \quad -6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 18 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -18 \quad 6 \quad 0 \\ 0 \quad 18 \quad -6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-9 \quad 0 \quad 3 \quad -9}^{A/B} \\ 0 \quad 18 \quad -6 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A/B es 2, al igual que el rango de A y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

El sistema es compatible para cualquier valor de m .

- b) Para $m = -9$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos partiendo de la matriz equivalente obtenida en el apartado anterior.

$$\text{El sistema queda } \begin{pmatrix} \overbrace{-9 \quad 0 \quad 3 \quad -9}^{A/B} \\ 0 \quad 18 \quad -6 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -9x + 3z = -9 \\ 18y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + z = -3 \\ 3y - z = 0 \end{cases}. \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\begin{cases} -3x + z = -3 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -3 + 3x \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y + 3 - 3x = 0 \Rightarrow y + 1 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -1 + x \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 + \alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 3\alpha \end{cases}$$

$$\text{Las soluciones del sistema son } \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 + \alpha ; \alpha \in \mathbb{R} . \\ z = -3 + 3\alpha \end{cases}$$

2. El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t) = -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10$$

donde t viene dado en días y va desde el día $t = 1$ (lunes) hasta el día $t = 8$ (lunes de la siguiente semana).

a) Determine el día de la semana que llovió más y el que llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió estos dos días? (6 puntos)

b) Haga un pequeño dibujo de la función anterior durante los 8 días. (4 puntos)

a) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{aligned} Q'(t) &= -\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2} \\ Q'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow -3t^2 + 24t - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{8+4}{2} = \boxed{6=t} \\ \frac{8-4}{2} = \boxed{2=t} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: martes y sábado. Sustituimos sus valores en la segunda derivada.

$$Q'(t) = -\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2} \Rightarrow Q''(t) = -\frac{6t}{8} + \frac{6}{2} = -\frac{3t}{4} + 3 \Rightarrow \begin{cases} Q''(2) = -\frac{3 \cdot 2}{4} + 3 = \frac{6}{4} > 0 \\ Q''(6) = -\frac{3 \cdot 6}{4} + 3 = \frac{-6}{4} < 0 \end{cases}$$

Al ser la segunda derivada positiva en $t = 2$ tenemos un mínimo relativo.

Al ser la segunda derivada negativa en $t = 6$ tenemos un máximo relativo.

Valoramos la función en estos valores y en los extremos del intervalo para determinar el máximo y mínimo absoluto.

$$Q(1) = -\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9 \cdot 1}{2} + 10 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} + 10 = 6.875$$

$$Q(2) = -\frac{2^3}{8} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{9 \cdot 2}{2} + 10 = -1 + 6 - 9 + 10 = 6 \text{ ¡Mínimo!}$$

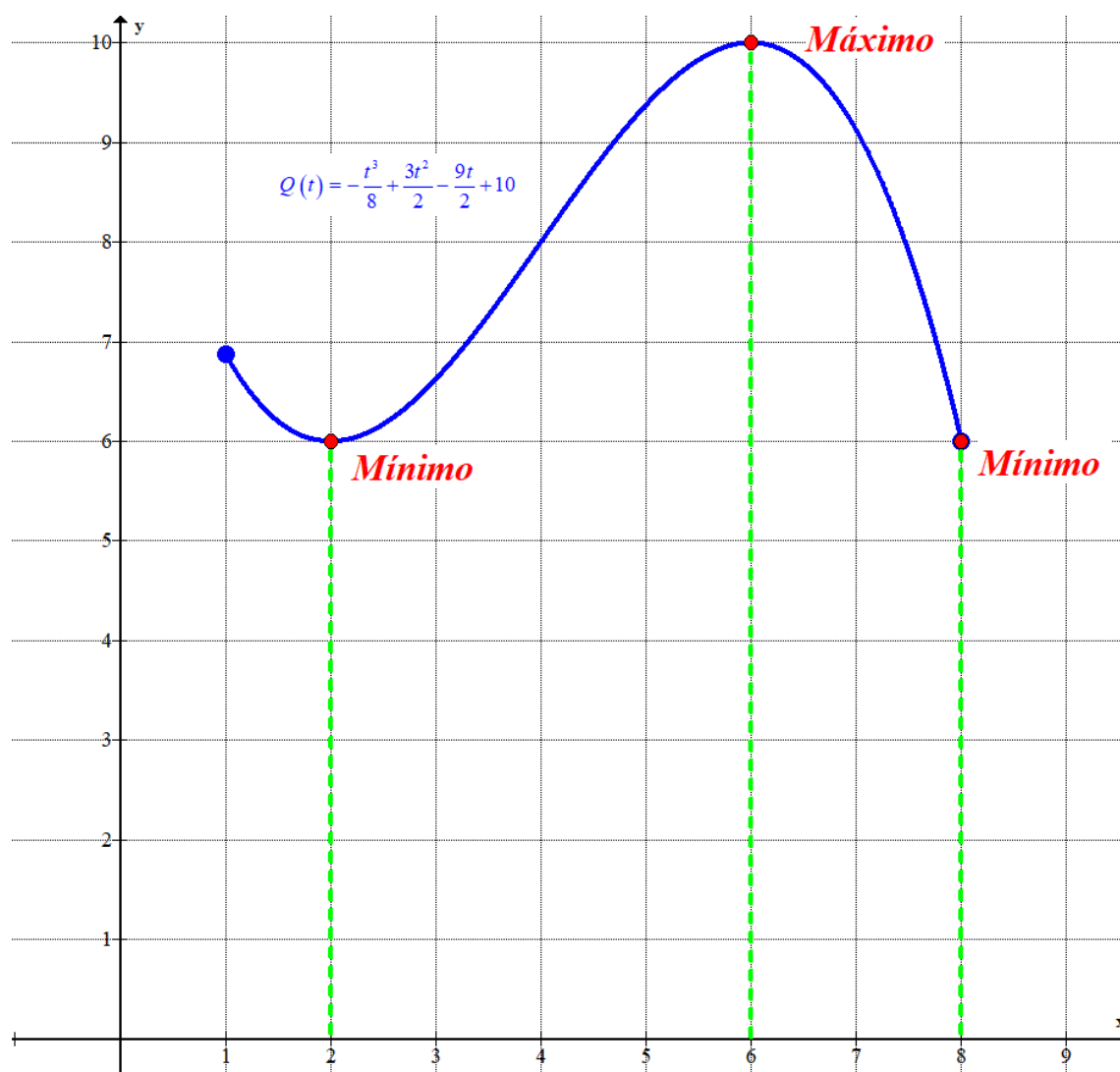
$$Q(6) = -\frac{6^3}{8} + \frac{3 \cdot 6^2}{2} - \frac{9 \cdot 6}{2} + 10 = -27 + 54 - 27 + 10 = 10 \text{ ¡Máximo!}$$

$$Q(8) = -\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10 = -64 + 96 - 36 + 10 = 6 \text{ ¡Mínimo!}$$

El mínimo de lluvias son 6 litros por metro cuadrado que se produjeron el martes (día 2) y el lunes de la semana siguiente (día 8).

El máximo de lluvias son 10 litros por metro cuadrado que se produjeron el sábado (día 6).

b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior podemos esbozar la gráfica de la función.



3. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$,

a) demuestre que se cruzan. (4 puntos)

b) calcule la distancia entre las rectas. (6 puntos)

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, 2, -2) \\ Q_s(0, 2, -1) \end{cases}$$

Comprobamos si las coordenadas de los vectores directores son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{-1}{-2}$$

Las coordenadas no son proporcionales y las rectas ni son coincidentes ni paralelas. Las rectas se cortan o cruzan.

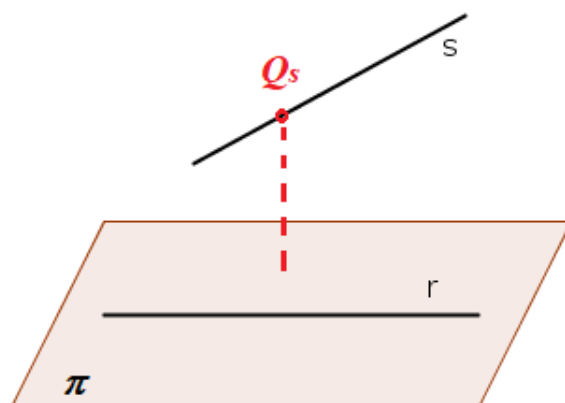
Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 2, -1) - (1, 0, -1) = (-1, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, -2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 2 + 8 = 10 \neq 0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las rectas se cruzan (tienen distinta dirección en planos paralelos)

b) Hallamos el plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s . La distancia entre las rectas es el valor de la distancia de Q_s al plano π .



El plano π tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 0, -1) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (1, 2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6(x-1) - y + 4(z+1) - 3(z+1) + 4y + 2(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x + 6 - y + 4z + 4 - 3z - 3 + 4y + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : -4x + 3y + z + 5 = 0}$$

Hallamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : -4x + 3y + z + 5 = 0 \\ Q_s(0, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = d(Q_s, \pi) = \frac{|-4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 1 + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{26}} \approx 1.96 \text{ unidades}$$

4. Lanzamos dos dados de 6 caras no trucados y consideramos los siguientes sucesos:

S_7 : “la suma de los resultados de ambos dados es 7”.

P : “el producto de los resultados de ambos dados es impar”.

a) Calcula las probabilidades de que ocurran los sucesos anteriores. (6 puntos)

b) ¿Son independientes S_7 y P ? Razona la respuesta. (4 puntos)

Al lanzar dos dados no trucados los sucesos elementales que podemos obtener vienen expresados en la tabla siguiente.

	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5	5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6	6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

a) De los 36 resultados posibles sólo hay 6 cuya suma sea 7: 1 6, 2 5, 3 4, 4 3, 5 2 y 6 1.

Aplicando la regla de Laplace tenemos que $P(S_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667$.

Para que el producto sea impar los dos resultados deben ser impares. De los 36 resultados posibles sólo hay 9 en los que ambos sean impares: 1 1, 1 3, 1 5, 3 1, 3 3, 3 5, 5 1, 5 3 y

5 5. Aplicando la regla de Laplace tenemos que $P(P) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25$.

b) Para que sean independientes los sucesos debe cumplirse que $P(S_7 \cap P) = P(S_7)P(P)$

$$S_7 \cap P = \{1\ 6, 2\ 5, 3\ 4, 4\ 3, 5\ 2, 6\ 1\} \cap \{1\ 1, 1\ 3, 1\ 5, 3\ 1, 3\ 3, 3\ 5, 5\ 1, 5\ 3, 5\ 5\} = \emptyset$$

Los sucesos S_7 y P no tienen nada en común pues no es posible sumar 7 con dos números impares. La probabilidad del suceso intersección es 0.

$$\left. \begin{array}{l} P(S_7 \cap P) = 0 \\ P(S_7) = \frac{1}{6} \\ P(P) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow P(S_7 \cap P) = 0 \neq \frac{1}{24} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = P(S_7) \cdot P(P)$$

Al no cumplirse la igualdad los sucesos S_7 y P no son independientes.

OPCIÓN B

1. Tenemos tres grifos para llenar un depósito de agua y suponemos que el caudal que cae por cada grifo es constante. Si utilizamos el grifo 1, tardamos 10 horas para llenar el depósito, si utilizamos los grifos 1 y 2, tardamos 4 horas, y si los utilizamos los tres, tardamos una hora. Suponiendo que la suma de los caudales de los tres grifos es 10 litros por minuto, calcule el caudal del agua de cada grifo (8 puntos) y el volumen del depósito (2 puntos).

Llamamos “x” al caudal del grifo 1 (litros por hora), “y” al caudal del grifo 2, “z” al caudal del grifo 3 y “V” al volumen del depósito.

“Si utilizamos el grifo 1, tardamos 10 horas para llenar el depósito” $\rightarrow 10x = V$

“Si utilizamos los grifos 1 y 2, tardamos 4 horas” $\rightarrow 4x + 4y = V$

“Si los utilizamos los tres, tardamos una hora” $\rightarrow x + y + z = V$

“La suma de los caudales de los tres grifos es 10 litros por minuto” $\rightarrow x + y + z = 60 \cdot 10$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

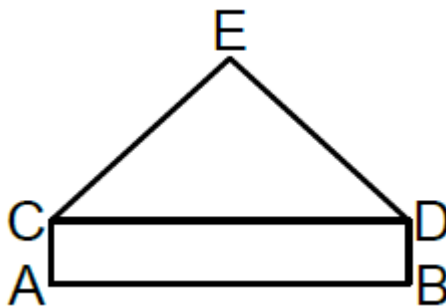
$$\left. \begin{array}{l} 10x = V \\ 4x + 4y = V \\ x + y + z = V \\ x + y + z = 60 \cdot 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x = V \\ 4x + 4y = V \\ x + y + z = V \\ x + y + z = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x = V \\ 4x + 4y = V \\ x + y + z = V \\ \boxed{V = 600} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 10x = 600 \rightarrow \boxed{x = \frac{600}{10} = 60} \\ \Rightarrow 4x + 4y = 600 \\ x + y + z = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \cdot 60 + 4y = 600 \\ 60 + y + z = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

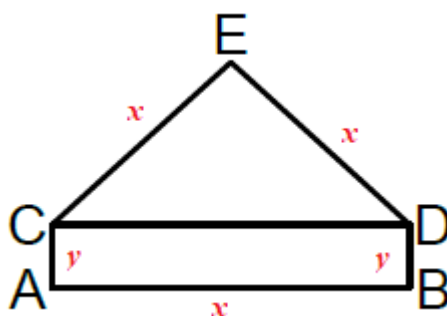
$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow 4y = 600 - 240 \rightarrow \boxed{y = \frac{360}{4} = 90} \\ y + z = 600 - 60 = 540 \end{array} \right\} \Rightarrow 90 + z = 540 \Rightarrow \boxed{z = 540 - 90 = 450}$$

El caudal del grifo 1 es de 60 litros por hora, el grifo 2 tiene un caudal de 90 litros por hora y el grifo 3 un caudal de 450 litros por hora.

2. Debemos diseñar una ventana como la que sale en la figura adjunta, o sea, el polígono ACEDB, de 30 metros de perímetro. Se trata de un rectángulo con un triángulo equilátero encima. Calcula las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima. (10 puntos)



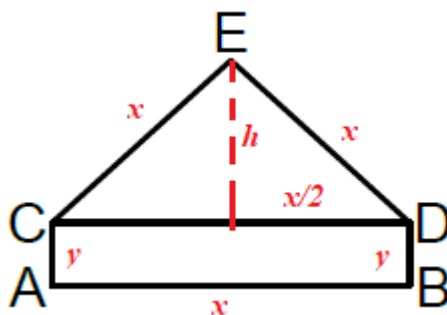
Le ponemos nombre a los lados del polígono.



Iguualamos el perímetro a 30: $3x + 2y = 30$. Despejamos “y”.

$$3x + 2y = 30 \Rightarrow 2y = 30 - 3x \Rightarrow y = \frac{30 - 3x}{2}$$

Determinamos la expresión del área de la ventana como la suma del área del rectángulo más el área del triángulo equilátero.



Determinamos primero la expresión de “h”.

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 \Rightarrow x^2 - \frac{x^2}{4} = h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = xy + \frac{x \cdot h}{2} \\ y = \frac{30 - 3x}{2} \\ h = \frac{\sqrt{3}}{2} x \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x \frac{30 - 3x}{2} + \frac{x}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{30x - 3x^2}{2} + \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{60x - 6x^2 + x^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A(x) = \frac{60x + x^2(-6 + \sqrt{3})}{4}$$

Calculamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{60x + x^2(-6 + \sqrt{3})}{4} \Rightarrow A'(x) = \frac{60 + 2x(-6 + \sqrt{3})}{4} = \frac{30 + x(-6 + \sqrt{3})}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{30 + x(-6 + \sqrt{3})}{2} = 0 \Rightarrow 30 + x(-6 + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-6 + \sqrt{3}) = -30 \Rightarrow x = \frac{30}{6 - \sqrt{3}} \approx 7.03$$

Tenemos un punto crítico $x = \frac{30}{6 - \sqrt{3}}$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$A'(x) = \frac{30 + x(-6 + \sqrt{3})}{2} \Rightarrow A''(x) = \frac{-6 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow A''(7.03) = \frac{-6 + \sqrt{3}}{2} \approx -2.1 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función área presenta un máximo relativo en

$$x = \frac{30}{6 - \sqrt{3}}.$$

Calculamos el valor de “y”.

$$y = \frac{30 - 3 \frac{30}{6 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{180 - 30\sqrt{3} - 90}{2(6 - \sqrt{3})} = \frac{90 - 30\sqrt{3}}{2(6 - \sqrt{3})} = \frac{30(3 - \sqrt{3})}{2(6 - \sqrt{3})} = \frac{15(3 - \sqrt{3})}{6 - \sqrt{3}} \approx 4.4563$$

Las dimensiones del rectángulo que hacen máxima el área son $x = \frac{30}{6 - \sqrt{3}}$ e $y = \frac{15(3 - \sqrt{3})}{6 - \sqrt{3}}$.

3. Considere las rectas siguientes dependientes de un parámetro λ :

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda t, \\ r: y = -1 + t, \\ z = 3 - 2t. \end{array} \right\}, \quad s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}$$

a) Calcula el valor de λ para que r y s se corten. (4 puntos)

b) Calcula el punto de intersección para el valor de λ calculado. (3 puntos)

a) Determinamos un punto y un vector director de cada recta.

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda t, \\ r: y = -1 + t, \\ z = 3 - 2t. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (\lambda, 1, -2) \\ P_r(1, -1, 3) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (\lambda, 2\lambda, -1) \\ Q_s(2, 0, 3) \end{cases}$$

Para que las rectas se corten el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$ debe ser nulo.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (2, 0, 3) - (1, -1, 3) = (1, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (\lambda, 1, -2) \\ \vec{v}_s = (\lambda, 2\lambda, -1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ \lambda & 2\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 2\lambda + 4\lambda + \lambda = 3\lambda - 1$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = 0 \Rightarrow 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{3}}$$

Comprobamos que para el valor encontrado los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = \left(\frac{1}{3}, 1, -2\right) \\ \vec{v}_s = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \neq \frac{1}{\frac{2}{3}} \neq \frac{-2}{-1}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales y las rectas no son coincidentes ni paralelas.

Para $\lambda = \frac{1}{3}$ los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales y el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$ es nulo. Las rectas r y s se cortan.

b) Para hallar el punto de corte de las rectas resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones,

$$s: \frac{x-2}{1/3} = \frac{y}{2/3} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1\right) \\ Q_s(2, 0, 3) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3}\alpha \\ y = \frac{2}{3}\alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} s: \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3}\alpha \\ y = \frac{2}{3}\alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \\ r: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{1}{3}\alpha = 1 + \frac{1}{3}t \\ \frac{2}{3}\alpha = -1 + t \\ 3 - \alpha = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + \alpha = 3 + t \\ 2\alpha = -3 + 3t \\ \alpha = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 2t = 3 + t \\ 4t = -3 + 3t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}(-3) = 0 \\ y = -1 - 3 = -4 \\ z = 3 - 2(-3) = 9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(0, -4, 9)}$$

El punto de intersección de las dos rectas es $P(0, -4, 9)$.

4. El test de inteligencia (CI) es una prueba de que en teoría mide la inteligencia del individuo y da un valor que aproximadamente tiene de media 100. O sea, el nivel 100 se supone que es el nivel de inteligencia de una persona normal. Supongamos ahora que el nivel de inteligencia de una determinada población sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 10.
- Calcula el porcentaje de la población que se considera superdotada. Una persona se considera superdotada si tiene un nivel de inteligencia superior a 130. (3 puntos)
 - Calcula el porcentaje de la población con un nivel de inteligencia entre 90 y 110. (3 puntos)
 - Nos dicen que el 70% de la población tiene un nivel de inteligencia menor que un cierto umbral. Calcula este umbral. (4 puntos)

$X = \text{CI resultado del test de inteligencia. } X = N(100, 10)$

a) Calculamos $P(X > 130)$.

$$P(X > 130) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{130 - 100}{10}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9987 = \boxed{0.0013}$$

	0
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332
1.6	0.9452
1.7	0.9554
1.8	0.9641
1.9	0.9713
2.0	0.9772
2.1	0.9821
2.2	0.9861
2.3	0.9893
2.4	0.9918
2.5	0.9938
2.6	0.9953
2.7	0.9965
2.8	0.9974
2.9	0.9981
3.0	0.9987
3.1	0.9990

Hay un 0.13 % de la población que se considera superdotada.

b) Calculamos $P(90 < X < 110)$.

$$\begin{aligned}
 P(90 < X < 110) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{90-100}{10} < Z < \frac{110-100}{10}\right) = \\
 &= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = \\
 &= P(Z < 1) - P(Z > 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N}(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8413 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.6826}
 \end{aligned}$$

	0	
0.0	0.5000	(
0.1	0.5398	(
0.2	0.5793	(
0.3	0.6179	(
0.4	0.6554	(
0.5	0.6915	(
0.6	0.7257	(
0.7	0.7580	(
0.8	0.7881	(
0.9	0.8159	(
1.0	0.8413	(
1.1	0.8643	(

Un 68.26 % de la población tiene un nivel de inteligencia entre 90 y 110.

- c) Nos dicen que $P(X < a) = 0.70$. Determinamos el valor de a . Al ser la probabilidad mayor de 0.5 el nivel de inteligencia debe ser mayor que la media (100).

$$P(X < a) = 0.70 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-100}{10}\right) = 0.7 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N}(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-100}{10} = \frac{0.52 + 0.53}{2} = 0.525 \Rightarrow a - 100 = 5.25 \Rightarrow \boxed{a = 105.25}$$

	0	1	2	3	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0

El 70% de la población tiene un nivel de inteligencia inferior a 105.25.