



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2017

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. Supongamos que P_1 , P_2 , P_3 y P_4 son las calificaciones de los problemas sobre 10. La calificación final se obtiene de aplicar la fórmula

siguiente: $\frac{4}{15}(P_1 + P_2 + P_3) + \frac{1}{5}P_4$. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje

(matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

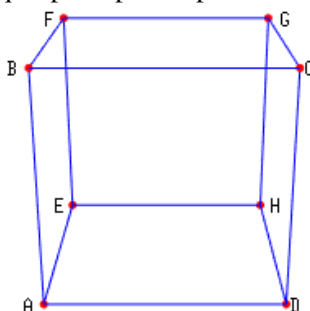
Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Las edades de Joan, Miquel y Gabriel suman 70 años. La edad de Joan, el doble de la edad de Miquel y el triple de la edad de Gabriel suman 160 años y la edad de Gabriel es igual a la suma de las edades de Joan y Miquel. Calcula las edades de Joan, Miguel y Gabriel (7 puntos) y qué año nació cada uno. (3 puntos)

2. Entre dos torres de 15 y 25 metros de altura, respectivamente, hay una distancia de 30 metros. En medio de las dos torres debemos poner otra torreta de 5 metros de altura y debemos extender un cable que una los extremos de arriba de la primera torre con la torreta y los extremos de arriba de ésta con la segunda torre. ¿Dónde debemos situar la torreta de 5 metros para que la longitud total del cable sea mínima? (7 puntos). ¿Qué vale la longitud del cable en este caso? (3 puntos)

3. Consideramos el cubo que aparece en la figura adjunta. Supongamos que el punto C tiene coordenadas (1, 1, 1), las aristas del cubo son paralelas a los ejes coordenados (o sea, la arista AE es paralela al eje X, la arista AD, al eje Y y la arista AB, al eje Z) y los lados del cubo tienen longitud 2. Calcula el plano que pasa por los puntos A, E, C y G (7 puntos) y la recta perpendicular al plano anterior que pasa por el punto D. (3 puntos)



4. El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas se modela como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

- Calcula la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos. (3 puntos)
- Calcula la probabilidad de que un alumno esté concentrado entre 10 y 30 minutos. (3 puntos)
- Nos dicen que la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de x minutos vale 0.75. Calcula este valor de x minutos. (4 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. a) Discute para que valores de a el sistema siguiente es compatible.

$$\left. \begin{array}{l} ax + y - 2z = -1, \\ -x + ay + z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ y + z = 3. \end{array} \right\} \quad (6 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo en el caso que sea compatible. (4 puntos)

2. Considera la función $f(x) = x \cdot |x - 1|$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[0, 2]$. (6 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X. (4 puntos)

3. Dados los puntos $A(1, 0, 3)$ y $B(1, 3, 4)$, determine los puntos situados en el plano $z = 1$ que formen con los puntos A y B un triángulo equilátero. (6 puntos) Calcula el volumen del tetraedro formado por los 3 puntos anteriores y el origen de coordenadas. (4 puntos)

4. Supongamos que los estudiantes de la UIB sólo tienen dos sistemas operativos en sus teléfonos móviles: Android e IOS (el de los iPhone). El 80% de los estudiantes de la UIB tienen el sistema operativo Android. El 25% de las chicas estudiantes de la UIB tienen IOS en su teléfono móvil y el 45% de los estudiantes de la UIB son chicos.

a) Calcula la probabilidad de que un chico de la UIB tenga IOS en su teléfono móvil. (6 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que un estudiante que tenga Android en el teléfono móvil sea chica. (4 puntos)



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2017

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Las edades de Joan, Miquel y Gabriel suman 70 años. La edad de Joan, el doble de la edad de Miquel y el triple de la edad de Gabriel suman 160 años y la edad de Gabriel es igual a la suma de las edades de Joan y Miquel. Calcula las edades de Joan, Miquel y Gabriel (7 puntos) y qué año nació cada uno. (3 puntos)

Llamamos “x” a la edad de Joan, “y” a la edad de Miquel y “z” a la edad de Gabriel.

“Las edades de Joan, Miquel y Gabriel suman 70 años” $\rightarrow x + y + z = 70$

“La edad de Joan, el doble de la edad de Miquel y el triple de la edad de Gabriel suman 160 años” $\rightarrow x + 2y + 3z = 160$.

“La edad de Gabriel es igual a la suma de las edades de Joan y Miquel” $\rightarrow z = x + y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ x + 2y + 3z = 160 \\ z = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ x + 2y + 3z = 160 \\ z - y = x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z - y + y + z = 70 \\ z - y + 2y + 3z = 160 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z = 70 \rightarrow \boxed{z = \frac{70}{2} = 35} \\ y + 4z = 160 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 4 \cdot 35 = 160 \Rightarrow \boxed{y = 160 - 140 = 20} \Rightarrow$$

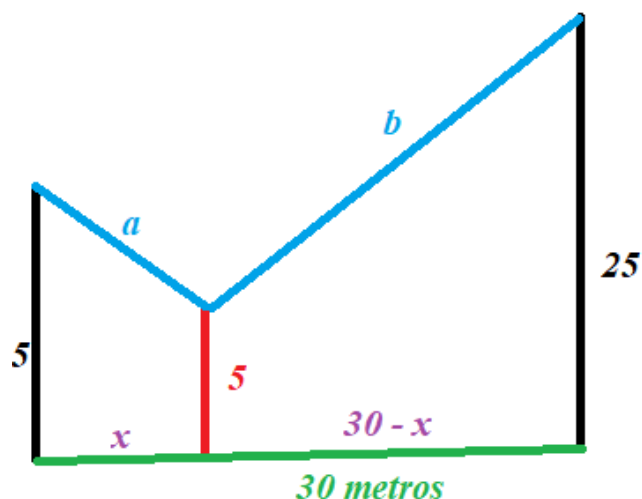
$$\Rightarrow \boxed{x = 35 - 20 = 15}$$

La edad de Joan es 15 años, la de Miquel 20 años y la de Gabriel 35 años.

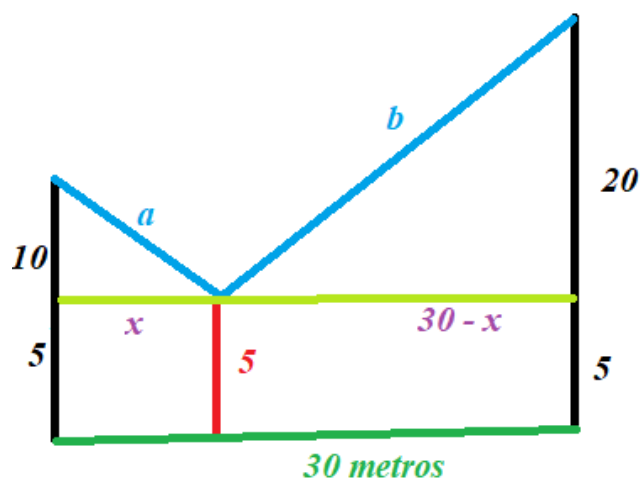
Joan nació en el año $2017 - 15 = 2002$, Miquel nació el año $2017 - 20 = 1997$ y Gabriel nació el año $2017 - 35 = 1982$.

2. Entre dos torres de 15 y 25 metros de altura, respectivamente, hay una distancia de 30 metros. En medio de las dos torres debemos poner otra torreta de 5 metros de altura y debemos extender un cable que una los extremos de arriba de la primera torre con la torreta y los extremos de arriba de ésta con la segunda torre. ¿Dónde debemos situar la torreta de 5 metros para que la longitud total del cable sea mínima? (7 puntos). ¿Qué vale la longitud del cable en este caso? (3 puntos)

La situación planteada es la del dibujo.



Le añadimos una línea imaginaria para obtener triángulos y poder aplicar el teorema de Pitágoras.



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de catetos “10” y “x”.

$$10^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{100 + x^2}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de catetos “20” y “30 - x”.

$$20^2 + (30 - x)^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{400 + x^2 + 900 - 60x} \Rightarrow b = \sqrt{1300 + x^2 - 60x}$$

La longitud del cable es la suma de a y b .

$$L(x) = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{1300 + x^2 - 60x}$$

Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{100+x^2}} + \frac{2x-60}{2\sqrt{1300+x^2-60x}} = \frac{x}{\sqrt{100+x^2}} + \frac{x-30}{\sqrt{1300+x^2-60x}}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{100+x^2}} + \frac{x-30}{\sqrt{1300+x^2-60x}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{100+x^2}} = -\frac{x-30}{\sqrt{1300+x^2-60x}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{100+x^2}} = \frac{30-x}{\sqrt{1300+x^2-60x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{100+x^2})^2} = \frac{(30-x)^2}{(\sqrt{1300+x^2-60x})^2} \Rightarrow \frac{x^2}{100+x^2} = \frac{900+x^2-60x}{1300+x^2-60x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(1300+x^2-60x) = (100+x^2)(900+x^2-60x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1300x^2 + \cancel{x^4} - \cancel{60x^3} = 90000 + 100x^2 - 6000x + 900x^2 + \cancel{x^4} - \cancel{60x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300x^2 + 6000x - 90000 = 0 \Rightarrow x^2 + 20x - 300 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(1)(-300)}}{2} = \frac{-20 \pm 40}{2} = \begin{cases} \frac{-20-40}{2} = -30 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ \frac{-20+40}{2} = \boxed{10 = x} \end{cases}$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 10$.

- Antes de 10 tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$$L'(5) = \frac{5}{\sqrt{100+5^2}} + \frac{5-30}{\sqrt{1300+5^2-60 \cdot 5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} + \frac{-25}{5\sqrt{41}} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{5}{\sqrt{41}} \approx -0.33 < 0. \text{ La}$$

función decrece en $(0, 10)$.

- Después de 10 tomamos $x = 20$ y la derivada vale

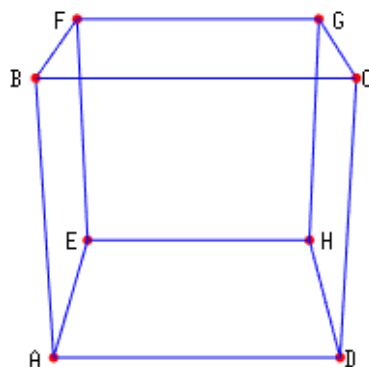
$$L'(20) = \frac{20}{\sqrt{100+20^2}} + \frac{20-30}{\sqrt{1300+20^2-60 \cdot 20}} \approx 0.447 > 0. \text{ La función crece en el}$$

intervalo $(10, 30)$.

La función tiene un mínimo en $x = 10$. La torreta debe colocarse a 10 metros de la torre más baja.

Como $L(10) = \sqrt{100+10^2} + \sqrt{1300+10^2-60 \cdot 10} = 30\sqrt{2} \approx 42.4264$ la longitud del cable tiene un valor aproximado de 42.4 metros.

3. Consideramos el cubo que aparece en la figura adjunta. Supongamos que el punto C tiene coordenadas $(1, 1, 1)$, las aristas del cubo son paralelas a los ejes coordenados (o sea, la arista AE es paralela al eje X, la arista AD, al eje Y y la arista AB, al eje Z) y los lados del cubo tienen longitud 2. Calcula el plano que pasa por los puntos A, E, C y G (7 puntos) y la recta perpendicular al plano anterior que pasa por el punto D. (3 puntos)



El lado AE tiene longitud 2 y es paralelo al eje X por lo que el vector $\overrightarrow{EA} = (2, 0, 0)$.

De la misma manera el vector $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 0)$ y $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2)$.

También tenemos que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{FB} = (2, 0, 0)$ al ser vectores con la misma dirección, mismo sentido e igual longitud.

De la misma forma $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$ y $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF} = (0, 0, 2)$.

Hallamos las coordenadas de los vértices del cubo.

El vértice G lo obtenemos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{CG}$:

$$G = C + \overrightarrow{CG} = (1, 1, 1) - \overrightarrow{GC} = (1, 1, 1) - (2, 0, 0) = (-1, 1, 1)$$

El vértice D lo obtenemos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{CD}$:

$$D = C + \overrightarrow{CD} = (1, 1, 1) - \overrightarrow{DC} = (1, 1, 1) - (0, 0, 2) = (1, 1, -1)$$

El vértice A lo obtenemos sumando al punto D el vector $\overrightarrow{DA}$:

$$A = D + \overrightarrow{DA} = (1, 1, -1) - \overrightarrow{AD} = (1, 1, -1) - (0, 2, 0) = (1, -1, -1)$$

El vértice E lo obtenemos sumando al punto A el vector $\overrightarrow{AE}$:

$$E = A + \overrightarrow{AE} = (1, -1, -1) - \overrightarrow{EA} = (1, -1, -1) - (2, 0, 0) = (-1, -1, -1)$$

Calculamos el plano π que pasa por los puntos A, E, C y G. Este plano tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{EA}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi : \begin{cases} A(1, -1, -1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{EA} = (2, 0, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, -1, -1) - (1, 1, 1) = (0, -2, -2) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(z+1)+4(y+1)=0 \Rightarrow -4z-4+4y+4=0 \Rightarrow 4y-4z=0 \Rightarrow \boxed{\pi: y-z=0}$$

El plano que pasa por los puntos A, E, C y G tiene ecuación $\pi: y - z = 0$.

La recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto D tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : y - z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (0, 1, -1)$$

$$r : \begin{cases} D(1, 1, -1) \in r \\ \vec{u}_r = \vec{n} = (0, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto D tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$$

4. El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas se modela como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

- a) Calcula la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos. (3 puntos)
 b) Calcula la probabilidad de que un alumno esté concentrado entre 10 y 30 minutos. (3 puntos)
 c) Nos dicen que la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de x minutos vale 0.75. Calcula este valor de x minutos. (4 puntos)

X = El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas (en minutos).

$X = N(15, 5)$

- a) Nos piden calcular $P(X > 20)$.

$$P(X > 20) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{20-15}{5}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

	0
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643

- b) Nos piden calcular $P(10 < X < 30)$.

$$P(10 < X < 30) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{10-15}{5} < Z < \frac{30-15}{5}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < -1) =$$

$$= P(Z < 3) - P(Z > 1) = P(Z < 3) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9987 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.84}$$

	0
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332
1.6	0.9452
1.7	0.9554
1.8	0.9641
1.9	0.9713
2.0	0.9772
2.1	0.9821
2.2	0.9861
2.3	0.9893
2.4	0.9918
2.5	0.9938
2.6	0.9953
2.7	0.9965
2.8	0.9974
2.9	0.9981
3.0	0.9987

- c) Nos dicen que $P(X > x) = 0.75$. Determinamos el valor de x . Al ser la probabilidad mayor de 0.5 la cantidad de minutos debe ser menor de la media (15 minutos).

$$P(X > x) = 0.75 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{x-15}{5}\right) = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad} > 0.5 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{x-15}{5} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z < -\frac{x-15}{5}\right) = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{x-15}{5} = \frac{0.67 + 0.68}{2} = 0.675 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 15 = 0.675 \cdot 5 \Rightarrow 15 - 0.675 \cdot 5 = x \Rightarrow \boxed{x = 11.625}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823

El 75% de los alumnos puede estar concentrado más de 11.625 minutos.

OPCIÓN B

1. a) Discute para que valores de a el sistema siguiente es compatible.

$$\left. \begin{aligned} ax + y - 2z &= -1, \\ -x + ay + z &= 2, \\ 3x + y - z &= 0, \\ y + z &= 3. \end{aligned} \right\} \quad (6 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo en el caso que sea compatible. (4 puntos)

a) Consideremos la matriz de coeficientes del sistema $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ -1 & a & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$\text{es } A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible los rangos de A y de A/B deben ser iguales, por lo que el determinante de A/B debe ser nulo. En caso contrario el rango de A/B sería 4 y el de A puede ser como mucho 3 (serían distintos).

Calculamos el determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 2a & 2 & -4 & -2 \\ 2a-1 & a+2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{Fila } 4^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3a & 3 & -6 & -3 \\ 3a & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 1 & -2 & -1 \\ 2a-1 & a+2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3a & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2a-1 & a+2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3a & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(2a-1) - 3a(a+2) - 36 + 9a + 15(a+2) + 4(2a-1) =$$

$$= -10a + 5 - 3a^2 - 6a - 36 + 9a + 15a + 30 + 8a - 4 = -3a^2 + 16a - 5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 + 16a - 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 60}}{2(-3)} = \frac{-16 \pm 14}{-6} = \begin{cases} \frac{-16+14}{-6} = \frac{1}{3} = a \\ \frac{-16-14}{-6} = 5 = a \end{cases}$$

Analizamos las dos situaciones distintas en las que el sistema puede ser compatible.

CASO 1. $a = \frac{1}{3}$

Para este valor hallamos el rango de A y de A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1/3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de

orden 3 que resulta de quitar la 2ª fila y la 4ª columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1/3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} + 0 - 6 + 0 - 3 + \frac{1}{3} = \frac{-25}{3} \neq 0.$$

Este menor de orden 3 con determinante no nulo es válido para el rango de A y el de A/B.

El rango de A/B es 3, al igual que el rango de A y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = 5$

Para este valor hallamos el rango de A y de A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden

3 que resulta de quitar la 2ª fila y la 4ª columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 0 - 6 + 0 - 3 + 5 = 1 \neq 0.$$

Este menor de orden 3 con determinante no nulo es válido para el rango de A y el de A/B.

El rango de A/B es 3, al igual que el rango de A y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

b) Para $a = \frac{1}{3}$ el sistema es compatible determinado.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} \frac{1}{3}x + y - 2z = -1, \\ -x + \frac{1}{3}y + z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ y + z = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 6z = -3, \\ -3x + y + 3z = 6, \\ 3x + y - z = 0, \\ y + z = 3. \end{cases} \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = -3, \\ -3x + y + 3z = 6, \\ 3x + y - z = 0, \\ y = 3 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3(3 - z) - 6z = -3, \\ -3x + 3 - z + 3z = 6, \\ 3x + 3 - z - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 9 - 3z - 6z = -3, \\ -3x + 2z = 3, \\ 3x - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} = \text{Ecuación 2ª} \\ x - 9z = -12 \\ -3x + 2z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 9z - 12 \\ -3x + 2z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(9z - 12) + 2z = 3 \Rightarrow -27z + 36 + 2z = 3 \Rightarrow -25z = -33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{33}{25}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 9 \frac{33}{25} - 12 = \frac{-3}{25}} \\ \boxed{y = 3 - \frac{33}{25} = \frac{42}{25}} \end{array} \right.$$

La solución del sistema es $x = \frac{-3}{25}$; $y = \frac{42}{25}$; $z = \frac{33}{25}$.

Para $a = 5$ el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} 5x + y - 2z = -1, \\ -x + 5y + z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ y + z = 3. \end{array} \right\}$. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + y - 2z = -1, \\ -x + 5y + z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ y = 3 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 3 - z - 2z = -1, \\ -x + 5(3 - z) + z = 2, \\ 3x + 3 - z - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 3z = -4 \\ -x + 15 - 5z + z = 2 \\ 3x - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 3z = -4 \\ -x - 4z = -13 \\ 3x - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 3z = -4 \\ 13 - 4z = x \\ 3x - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(13 - 4z) - 3z = -4 \\ 3(13 - 4z) - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 65 - 20z - 3z = -4 \\ 39 - 12z - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -23z = -69 \\ -14z = -42 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{z = \frac{69}{23} = 3} \\ \boxed{z = \frac{42}{14} = 3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 13 - 4 \cdot 3 = 1} \\ \boxed{y = 3 - 3 = 0} \end{array} \right.$$

La solución del sistema es $x = 1$; $y = 0$; $z = 3$.

2. Considera la función $f(x) = x \cdot |x-1|$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[0, 2]$. (6 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X. (4 puntos)

Expresamos $f(x)$ como una función a trozos.

$$f(x) = x \cdot |x-1| = \begin{cases} x(1-x) = x - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x(x-1) = x^2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La gráfica son dos trozos de parábola. Hallamos los vértices de las parábolas.

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \in (-\infty, 1) \\ 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin (1, +\infty) \end{cases}$$

Hay un vértice del primer trozo de parábola en $x = \frac{1}{2}$.

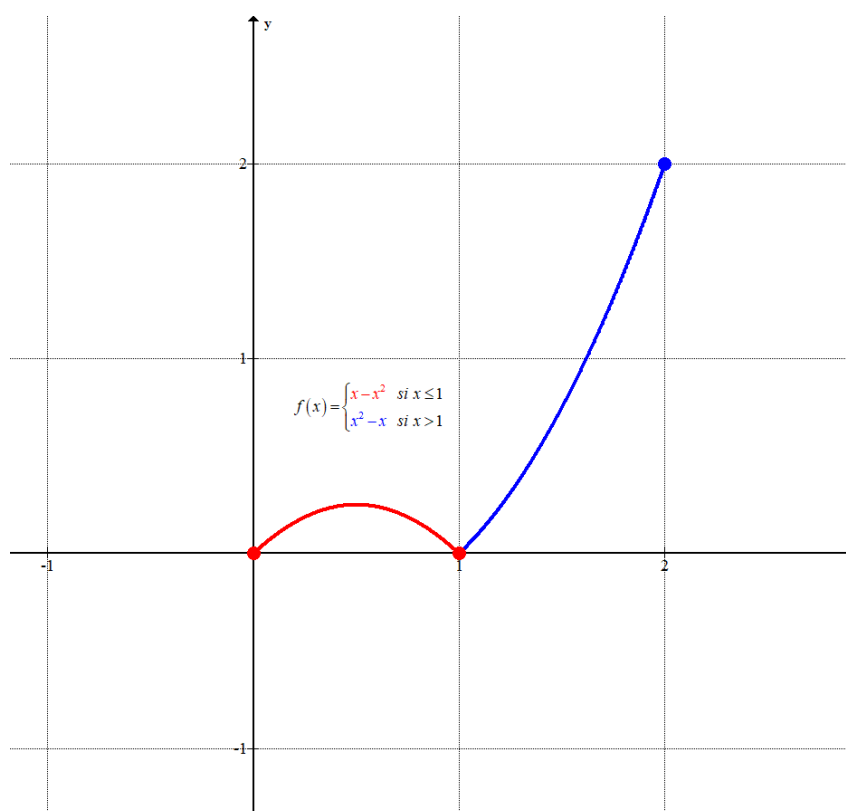
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función en el intervalo $[0, 2]$.

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

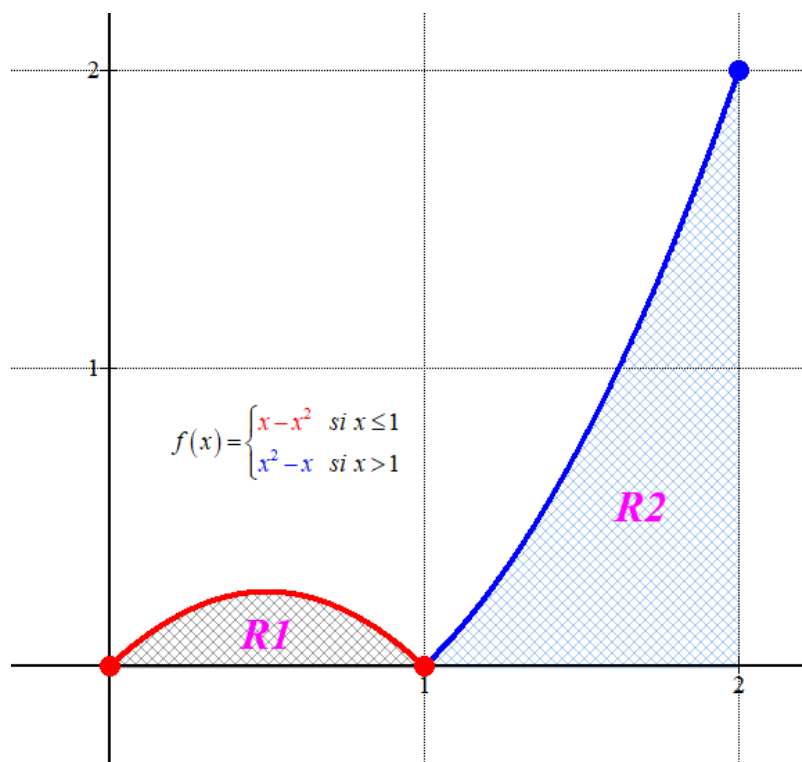
$x \leq 1$

$x > 1$

x	$f(x) = x - x^2$	x	$f(x) = x^2 - x$
0	0	1.5	0.75
0.5	0.25	1.75	1.3125
1	0	2	2



El área que nos piden calcular es la del dibujo.



El área de la región R1 es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\begin{aligned} \text{Área R1} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

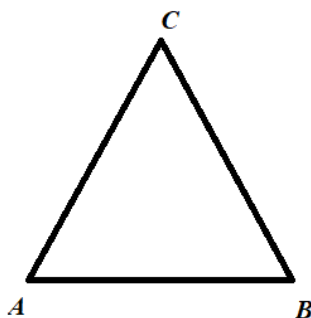
El área de la región R2 es el valor de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$\begin{aligned} \text{Área R2} &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x^2 - x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right] - \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right] = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

El área total es la suma de las áreas de las dos regiones: $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ unidad cuadrada.

3. Dados los puntos $A(1, 0, 3)$ y $B(1, 3, 4)$, determine los puntos situados en el plano $z = 1$ que formen con los puntos A y B un triángulo equilátero. (6 puntos) Calcula el volumen del tetraedro formado por los 3 puntos anteriores y el origen de coordenadas. (4 puntos)

Un punto C del plano $z = 1$ tiene coordenadas $C(a, b, 1)$.



Un triángulo equilátero tiene todos los lados de la misma longitud. Determinamos dicha longitud averiguando la distancia de A a B (uno de los lados del triángulo).

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, 3) \\ B(1, 3, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 3, 4) - (1, 0, 3) = (0, 3, 1)$$

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Aplicamos la condición $d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{10}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, 3) \\ B(1, 3, 4) \\ C(a, b, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (a, b, 1) - (1, 0, 3) = (a-1, b, -2) \\ \overrightarrow{BC} = (a, b, 1) - (1, 3, 4) = (a-1, b-3, -3) \end{array} \right.$$

$$d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{10} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + b^2 + (-2)^2} = \sqrt{10} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a-1)^2 + b^2 + 4 = 10 \rightarrow (a-1)^2 = 6 - b^2 \\ (a-1)^2 + (b-3)^2 + 9 = 10 \rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 6 - b^2 + b^2 - 6b + 9 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6b = -14 \Rightarrow \boxed{b = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}} \Rightarrow (a-1)^2 = 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \Rightarrow (a-1)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow a-1 = \sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{3}}$$

Existen dos puntos del plano que cumplen lo pedido: $C_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)$ y $C_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)$.

El volumen del tetraedro ABC_1O es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}_1]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} = (1, 0, 3) \\ \vec{OB} = (1, 3, 4) \\ \vec{OC}_1 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}_1] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 0 + 7 - 9 \frac{3-\sqrt{5}}{3} - 0 - 4 \frac{7}{3} = \frac{9 + 21 - 27 + 9\sqrt{5} - 28}{3} = \frac{-25 + 9\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Volumen } OABC_1 = \frac{1}{6} \frac{|-25 + 9\sqrt{5}|}{3} = \boxed{\frac{25 - 9\sqrt{5}}{18} \approx 0.271 \text{ u}^3}$$

El volumen del tetraedro ABC_2O es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}_2]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} = (1, 0, 3) \\ \vec{OB} = (1, 3, 4) \\ \vec{OC}_2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}_2] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 0 + 7 - 9 \frac{3+\sqrt{5}}{3} - 0 - 4 \frac{7}{3} = \frac{9 + 21 - 27 - 9\sqrt{5} - 28}{3} = \frac{-25 - 9\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Volumen } OABC_1 = \frac{1}{6} \frac{|-25 - 9\sqrt{5}|}{3} = \boxed{\frac{25 + 9\sqrt{5}}{18} \approx 2.507 \text{ u}^3}$$

4. Supongamos que los estudiantes de la UIB sólo tienen dos sistemas operativos en sus teléfonos móviles: Android e IOS (el de los iPhone). El 80% de los estudiantes de la UIB tienen el sistema operativo Android. El 25% de las chicas estudiantes de la UIB tienen IOS en su teléfono móvil y el 45% de los estudiantes de la UIB son chicos.

a) Calcula la probabilidad de que un chico de la UIB tenga IOS en su teléfono móvil.

(6 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que un estudiante que tenga Android en el teléfono móvil sea chica. (4 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia.

	Android	IOS	
Chico			45
Chica		0.25x	x
	80		100

Completamos la tabla.

	Android	IOS	
Chico	38.75	6.25	45
Chica	41.25	0.25 · 55 = 13.75	55
	80	20	100

a) Hay un 45 % de chicos en la UIB y un 6.25 tiene IOS en su móvil. La probabilidad de que

un chico de la UIB tenga IOS en su teléfono móvil es de $\frac{6.25}{45} = \frac{5}{36} \approx 0.13889$.

b) Hay un 80 % de los estudiantes con Android y un 41.25 % de chicas con Android.

La probabilidad de que un estudiante que tenga Android en el teléfono móvil sea chica es

$$\frac{41.25}{80} = \frac{33}{64} = 0.515625$$