



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2018

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + my + z = m + 2 \\ mx + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo para $m = -2$. (3 puntos)

2. Calcula las dimensiones de una caja con las dos tapas de base cuadrangular de volumen 64 metros cúbicos de superficie mínima. Comprueba que la solución obtenida es un mínimo. (10 puntos)

3. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta las rectas: (10 puntos)

$$r : x = 2y = z - 1, \quad s : 3x = 2y - 2 = 6z$$

4. En una clase de segundo de bachillerato, el 60% de los alumnos son chicas, el 40% aprobaron Lengua Castellana y el 20% son chicas que aprobaron Lengua Castellana. Se pide:

- Cuál es la probabilidad de encontrar a una persona que sea chico y suspenda Lengua Castellana? (5 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que un chico suspenda Lengua Castellana? (2 puntos)
- Si un alumno ha aprobado Lengua Castellana, ¿cuál es la probabilidad de que sea un chico? (3 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. Determina que relaciones han de existir entre a, b, c y d para qué se verifique $AM = MA$, siendo A y M las matrices siguientes: (10 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Considera la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-1, 1]$. (6 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X. (4 puntos)

3. Calcula la distancia entre las rectas siguientes: (10 puntos)

$$r: \begin{cases} z + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

4. El número de pasos que da el profesor Jaimito durante una hora de clase se modela con una distribución normal de media 100 pasos y desviación típica 20.5 pasos.

- a) Calcula la probabilidad de que el profesor dé más de 125 pasos durante una clase. (4 puntos)
- b) Nos dicen que en el 45% de las clases que da el profesor éste da menos de x pasos. Encuentra este valor x . (6 puntos)



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2018

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + my + z = m + 2 \\ mx + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo para $m = -2$. (3 puntos)

a) Consideremos la matriz de coeficientes del sistema $A = \begin{pmatrix} 4 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m + 3m - 1 - m^2 + 12 = -m^2 + 2m + 15$$

Iguálamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 + 2m + 15 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 8}{-2} = \begin{cases} m = \frac{-2+8}{-2} = -3 \\ m = \frac{-2-8}{-2} = 5 \end{cases}$$

Hay tres situaciones distintas que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq -3$ y $m \neq 5$

En este caso el rango de la matriz de coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $m = -3$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 3y + z = -1 \\ -3x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 4x + 12y + 4z = 0 \\ -4x + 3y - z = 1 \\ \hline 15y + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación } 2^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -12x + 4y - 4z = 0 \\ 12x - 9y + 3z = -3 \\ \hline -5y - z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + z = -1 \\ -5y - z = -3 \\ 15y + 3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 15y + 3z = 1 \\ -15y - 3z = -9 \\ \hline 0 = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + z = -1 \\ -5y - z = -3 \\ 0 = -8 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $m=5$

El sistema queda

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 4x+5y+z &= 7 \\ 5x+y-z &= 0 \\ x+3y+z &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\text{Ecuación 2ª} - 5 \cdot \text{Ecuación 3ª} \\ 5x &+ y - z = 0 \\ -5x &-15y -5z = 0 \\ \hline &-14y -6z = 0 \end{aligned} \right\} \\ \\ \left\{ \begin{aligned} &4 \cdot \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 4x &+12y +4z = 0 \\ -4x &-5y -z = -7 \\ \hline &7y +3z = -7 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 4x+5y+z &= 7 \\ -14y-6z &= 0 \\ 7y+3z &= -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 4x+5y+z &= 7 \\ -7y-3z &= 0 \\ 7y+3z &= -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ 7y &+3z = -7 \\ -7y &-3z = 0 \\ \hline &0 = -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 4x+5y+z &= 7 \\ -7y-3z &= 0 \\ &0 = -7 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

- b) Para $m=-2$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos con la regla de Cramer. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\left. \begin{aligned} 4x-2y+z &= 0 \\ -2x+y-z &= 0 \\ x+3y+z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4+2-6-1-4+12 = 7$$

Obtenemos la solución del sistema.

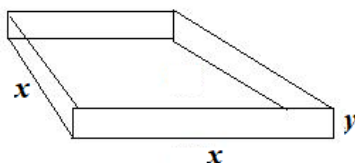
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{7} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{7} = 0 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{7} = 0$$

La solución del sistema es $x = y = z = 0$.

OTRA FORMA DE DETERMINAR LA SOLUCIÓN.

Para $m=-2$ el sistema es compatible determinado y queda $\left. \begin{aligned} 4x-2y+z &= 0 \\ -2x+y-z &= 0 \\ x+3y+z &= 0 \end{aligned} \right\}$. Al ser un sistema homogéneo tiene la solución trivial y como es única su solución es $x = y = z = 0$.

2. Calcula las dimensiones de una caja con las dos tapas de base cuadrangular de volumen 64 metros cúbicos de superficie mínima. Comprueba que la solución obtenida es un mínimo. (10 puntos)



El volumen de la caja es $V(x, y) = x^2 \cdot y$. Como debe tener un volumen de 64 metros cúbicos obtenemos la igualdad $x^2 \cdot y = 64$ y despejando tenemos que $y = \frac{64}{x^2}$.

Queremos minimizar la superficie de la caja con tapa. La expresión de esta superficie es la suma de la base, la tapa y las cuatro caras laterales.

$$S(x, y) = x^2 + x^2 + 4xy \Rightarrow S(x, y) = 2x^2 + 4xy \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{64}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 4x \frac{64}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x}$$

Determinamos los puntos críticos de esta función averiguando cuando se anula la derivada.

$$S(x) = 2x^2 + \frac{256}{x} \Rightarrow S'(x) = 4x - \frac{256}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 4x - \frac{256}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{256}{x^2} \Rightarrow 4x^3 = 256 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

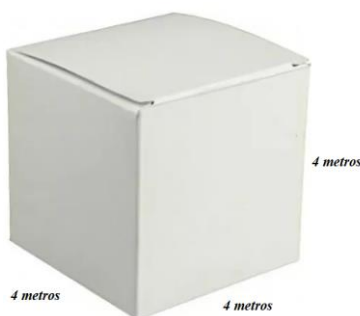
Tenemos un punto crítico de la función superficie de la caja para el lado de la base $x = 4$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x) = 4x - \frac{256}{x^2} = 4x - 256x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 4 + 2 \cdot 256x^{-3} = 4 + \frac{256}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S''(4) = 4 + \frac{256}{4^3} = 8 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva para $x = 4$, en dicho valor la función presenta un mínimo relativo. Para $x = 4$ tenemos que $y = \frac{64}{4^2} = 4$ metros.

Las dimensiones de la caja de base cuadrangular y con tapa con superficie mínima y con volumen 64 metros cúbicos tiene 4 metros de lado en la base y 4 metros de altura.



3. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta las rectas: (10 puntos)

$$r : x = 2y = z - 1, \quad s : 3x = 2y - 2 = 6z$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de cada una de las rectas.

$$r : x = 2y = z - 1 \Rightarrow \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 2) \\ P_r(0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s : 3x = 2y - 2 = 6z \Rightarrow \frac{3x}{6} = \frac{2y-2}{6} = \frac{6z}{6} \Rightarrow \frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s : \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 3, 1) \\ Q_s(0, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Un punto A de la recta r tiene coordenadas $A(2\lambda, \lambda, 1+2\lambda)$. Un punto B de la recta s tiene coordenadas $B(2\alpha, 1+3\alpha, \alpha)$.

Buscamos los valores de α y λ tales que los puntos O, A y B estén alineados. Para ello se debe cumplir que $\vec{OA} = b \cdot \vec{OB}$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{OA} &= (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) - (0, 0, 0) = (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) \\ \vec{OB} &= (2\alpha, 1+3\alpha, \alpha) - (0, 0, 0) = (2\alpha, 1+3\alpha, \alpha) \\ \vec{OA} &= b \cdot \vec{OB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) = b(2\alpha, 1+3\alpha, \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 2b\alpha \rightarrow \lambda = b\alpha \\ \lambda = b(1+3\alpha) \rightarrow \lambda = b + 3b\alpha \\ 1+2\lambda = b\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\alpha = b + 3b\alpha \\ 1+2b\alpha = b\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = b + 2b\alpha \\ b\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = b + 2(-1) \Rightarrow \boxed{b = 2} \Rightarrow 2\alpha = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2 \cdot \frac{-1}{2} = -1}$$

Sustituyendo λ por -1 el punto A de la recta r es $A(-2, -1, -1)$.

Sustituyendo α por $-\frac{1}{2}$ el punto B de la recta s es $B\left(2 \cdot \frac{-1}{2}, 1 - \frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right) \rightarrow B\left(-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

La recta t pedida pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y tiene como vector director $\vec{OA} = (-2, -1, -1)$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_t = \vec{OA} &= (-2, -1, -1) \\ O(0, 0, 0) &\in t \end{aligned} \right\} \Rightarrow t : \begin{cases} x = -2\beta \\ y = -\beta \\ z = -\beta \end{cases}$$

4. En una clase de segundo de bachillerato, el 60% de los alumnos son chicas, el 40% aprobaron Lengua Castellana y el 20% son chicas que aprobaron Lengua Castellana. Se pide:
- a) Cuál es la probabilidad de encontrar a una persona que sea chico y suspenda Lengua Castellana? (5 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un chico suspenda Lengua Castellana? (2 puntos)
- c) Si un alumno ha aprobado Lengua Castellana, ¿cuál es la probabilidad de que sea un chico? (3 puntos)

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Chicos	Chicas	
Aprueban Lengua		20	40
Suspenden Lengua			
		60	100

Completamos la tabla

	Chicos	Chicas	
Aprueban Lengua	20	20	40
Suspenden Lengua	20	40	60
	40	60	100

Hay un 20% de estudiantes que son chicos y suspenden Lengua. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que una persona sea chico y suspenda Lengua es 0.20.

a) Hay un 40 % de chicos y un 20% son chicos que suspenden Lengua.

La probabilidad de que un chico suspenda Lengua Castellana es $\frac{20}{40} = 0.5$.

b) Hay un 40 % que aprueban Lengua y un 20% son chicos que aprueban Lengua.

La probabilidad de que sea chico la persona que ha aprobado Lengua es $\frac{20}{40} = 0.5$

OPCIÓN B

1. Determina que relaciones han de existir entre a, b, c y d para qué se verifique $AM = MA$, siendo A y M las matrices siguientes: (10 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a+b \\ d & -c+d \end{pmatrix}$$

$$AM = MA \Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a+b \\ d & -c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a+b \\ a+c = d \\ b+d = -c+d \rightarrow b = -c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -d = -a-c \\ a+c = d \end{cases} \Rightarrow \boxed{d = a+c}$$

Las relaciones que deben cumplirse para que $AM = MA$ son; $b = -c$ y $d = a+c$

2. Considera la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-1, 1]$. (6 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X. (4 puntos)

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$, por lo que en el intervalo $[-1, 1]$ la función existe y es continua.

Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2-x) - (-1)(x^2)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$$

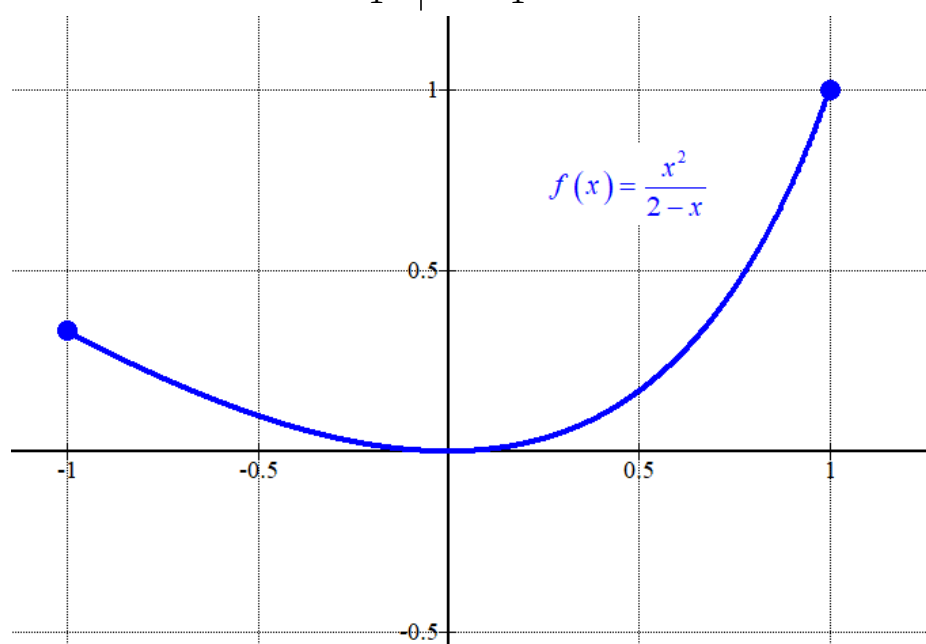
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

El punto crítico $x = 0$ pertenece al intervalo $[-1, 1]$. Será un máximo o un mínimo relativo.

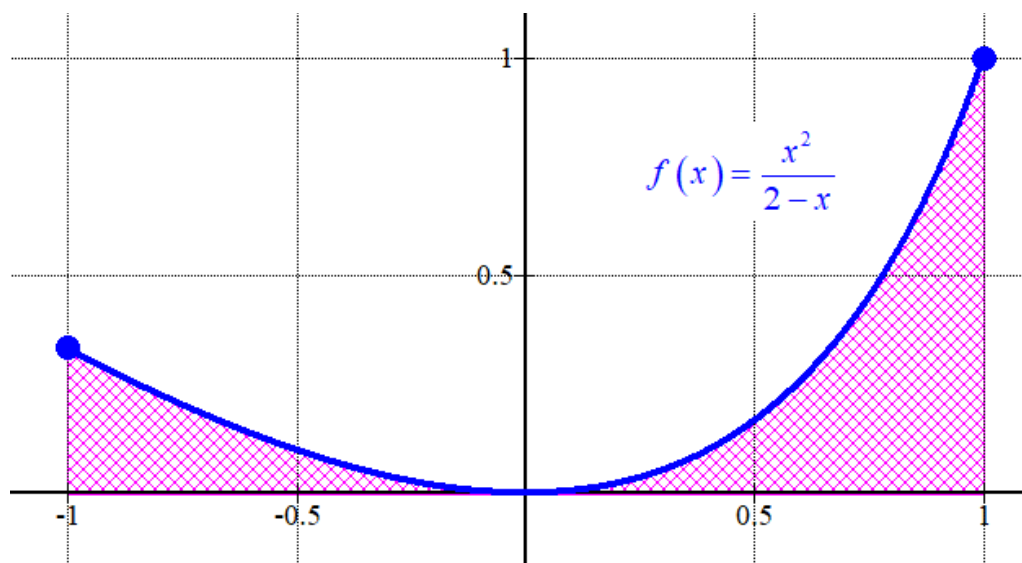
Como $f'(-1) = \frac{4(-1) - (-1)^2}{(2-(-1))^2} = \frac{-5}{9} < 0$ y $f'(1) = \frac{4 \cdot 1 - 1^2}{(2-1)^2} = 3 > 0$ la función decrece antes y crece después de $x = 0$. La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores y esbozamos la gráfica de la función en $[-1, 1]$.

x	$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$
-1	1/3
-0.5	0.1
0	0
0.5	0.16
1	1



El área que nos piden calcular es la del dibujo.



Contando cuadraditos el área es muy pequeña, menor de 1 unidad cuadrada.

Calculamos su valor exacto utilizando el cálculo integral.

El área es el valor de la integral definida de la función entre -1 y 1 .

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2-x} dx = \dots$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{-x^2+2x} & \frac{2-x}{-x-2} & \\ \frac{2x}{2x} & & \Rightarrow \frac{x^2}{2-x} = -x-2 + \frac{4}{2-x} \\ \frac{-2x+4}{4} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{-1}^1 -x-2 + \frac{4}{2-x} dx = \left[-\frac{x^2}{2} - 2x - 4 \ln|2-x| \right]_{-1}^1 = \\ &= \left[-\frac{1^2}{2} - 2(1) - 4 \ln|2-1| \right] - \left[-\frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) - 4 \ln|2-(-1)| \right] = \\ &= -\frac{1}{2} - 2 - 4 \ln 1 + \frac{1}{2} - 2 + 4 \ln 3 = \boxed{4 \ln 3 - 4 \approx 0.39} \end{aligned}$$

El área tiene un valor aproximado de 0.39 unidades cuadradas.

3. Calcula la distancia entre las rectas siguientes:

(10 puntos)

$$r: \begin{cases} z+y=5 \\ z=4 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x-z=3 \\ y=0 \end{cases}$$

Determinamos la posición relativa de las dos rectas. Para ello obtenemos un vector director y un punto de cada una de las rectas.

$$r: \begin{cases} z+y=5 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+y=5 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, 0) \\ P_r(0, 1, 4) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} 2x-z=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=z \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=-3+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, 0, 2) \\ Q_s(0, 0, -3) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{0} \neq \frac{0}{2}$$

Las rectas ni son paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 0, -3) - (0, 1, 4) = (0, -1, -7) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

Para hallar la distancia entre las rectas determinamos el plano paralelo a la recta r que contiene la recta s . La distancia entre las dos rectas será la distancia de un punto cualquiera de r al plano hallado.

Empezamos hallando la ecuación del plano π paralelo a la recta r que contiene la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(0, 0, -3) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, 0, 0) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow \pi: y = 0$$

Hallamos la distancia del punto $P_r(0, 1, 4)$ al plano $\pi: y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 1, 4) \\ \pi: y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = d(P_r, \pi) = \frac{|1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = 1$$

La distancia entre las rectas r y s es de 1 unidad.

4. El número de pasos que da el profesor Jaimito durante una hora de clase se modela con una distribución normal de media 100 pasos y desviación típica 20.5 pasos.

a) Calcula la probabilidad de que el profesor dé más de 125 pasos durante una clase. (4 puntos)

b) Nos dicen que en el 45% de las clases que da el profesor éste da menos de x pasos.

Encuentre este valor x . (6 puntos)

X = El número de pasos que da el profesor Jaimito durante una hora de clase.

$X = N(100, 20.5)$

a) Nos piden calcular $P(X > 125)$.

$$P(X > 125) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{125-100}{20.5}\right) = P(Z > 1.22) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.22) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8888 = 0.1112$$

	0	1	2	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.

b) Nos dicen que $P(X < x) = 0.45$. Determinamos el valor de x . Al ser la probabilidad menor de 0.5 la cantidad de pasos debe ser menor de la media (100 pasos).

$$P(X < x) = 0.45 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{x-100}{20.5}\right) = 0.45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad} < 0.5 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{x-100}{20.5} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z > -\frac{x-100}{20.5}\right) = 0.45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq -\frac{x-100}{20.5}\right) = 0.45 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{x-100}{20.5}\right) = 1 - 0.45 = 0.55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{x-100}{20.5} = \frac{0.12+0.13}{2} = 0.125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+100 = 0.125 \cdot 20.5 \Rightarrow 100 - 0.125 \cdot 20.5 = x \Rightarrow \boxed{x = 97.4375}$$

	0	1	2	3	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948

En el 45% de las clases que da el profesor éste da menos de 97.4375 pasos.