



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2018

Modelo 3

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + my + z = m + 2 \\ x + y + mz = -2(m + 1) \\ 4x + y + z = m \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo para $m = 0$. (3 puntos)

2. Considere la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-1, 1]$. (5 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior, el eje de las X y las rectas verticales $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$. (5 puntos)

3. Determina los puntos A, B y C de la recta $x - 12 = \frac{y + 6}{2} = \frac{z - 6}{3}$ que están en los planos coordenados (6 puntos) y determina cual de estos puntos A, B, C está situado entre los otros dos. (4 puntos)

4. Queremos realizar un estudio de las opiniones políticas de los estudiantes de primer curso de la UIB. Por eso hemos tomado una muestra representativa de 500 estudiantes de primer curso y los hemos preguntado qué partido político votaron en las últimas elecciones. De los 500 estudiantes, 200 respondieron que votaron al PP, 100 al PSIB y al resto otras formaciones políticas.

Sabiendo que 200 de los estudiantes eran chicos, que el 40% de los votantes del PP son chicas y que el 50% de los votantes del PSIB son chicos, se pide:

- La probabilidad de que un estudiante haya votado otras formaciones políticas y sea chica. (4 puntos)
- La probabilidad de que un estudiante chico haya votado al PP. (2 puntos)
- La probabilidad de que un estudiante que ha votado otras formaciones políticas sea chica. (4 puntos)

Modelo 3

OPCIÓN B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra la matriz X que verifica:

$$A \cdot X \cdot B = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ puntos})$$

2. Encuentra los valores a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5 & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$ (6 puntos). Determine en qué(s) punto(s) se verifica lo que asegura el teorema. (4 puntos)

3. El plano perpendicular al punto medio del segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Encontrar el área del triángulo ABC. (10 puntos).

4. Consideramos la población de estudiantes que han aprobado la selectividad en la convocatoria de junio un año determinado. Sea X la variable aleatoria que modela la proporción de estudiantes de la población anterior que elige estudiar un grado de humanidades. Esta variable aleatoria X se modela con una distribución normal de media 0.35 y desviación típica 0.1. Se pide:

- ¿cuál es la probabilidad de que en un año cualquiera más del 45% de los estudiantes de la población considerada estudien un grado de humanidades? (5 puntos)
- En los últimos 10 años, ¿en cuántos años el porcentaje de estudiantes de la población considerada que han escogido estudiar un grado de humanidades no ha superado el 30%? (5 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + my + z = m + 2 \\ x + y + mz = -2(m+1) \\ 4x + y + z = m \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo para $m = 0$. (3 puntos)

a) Consideremos la matriz de los coeficientes del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4m^2 + 1 - 4 - m - 4m = 4m^2 - 5m + 1$$

Iguálamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow 4m^2 - 5m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2(4)} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} m = \frac{5+3}{8} = 1 \\ m = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Hay tres situaciones distintas que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq \frac{1}{4}$

En este caso el rango de la matriz de coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $m = 1$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y + z = 3 \\ x + y + z = -4 \\ 4x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ 4x \quad +y \quad +z \quad = 1 \\ -4x \quad -y \quad -z \quad = -3 \\ \hline 0 \quad = -2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ 4x \quad +4y \quad +4z \quad = -16 \\ -4x \quad -y \quad -z \quad = -3 \\ \hline 3y \quad +3z \quad = -19 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + y + z = 3 \\ 3y + 3z = -19 \\ 0 = -2 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $m = \frac{1}{4}$

El sistema queda

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + \frac{1}{4}y + z = \frac{9}{4} \\ x + y + \frac{1}{4}z = -\frac{10}{4} \\ 4x + y + z = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 16x + y + 4z = 9 \\ 4x + 4y + z = -10 \\ 16x + 4y + 4z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 16x + 4y + 4z = 1 \\ -16x - y - 4z = -9 \\ \hline 3y = -8 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 16x + 16y + 4z = -40 \\ -16x - y - 4z = -36 \\ \hline 15y = -76 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 16x + y + 4z = 9 \\ 15y = -76 \\ 3y = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 16x + y + 4z = 9 \\ y = \frac{-76}{15} \\ y = \frac{-8}{3} \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

- b) Para $m=0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos con la regla de Cramer. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + z = 2 \\ x + y = -2 \\ 4x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 4 = 1$$

Obtenemos la solución del sistema.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 - 2}{1} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8 + 8 - 2}{1} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 - 8 + 8}{1} = 2$$

La solución del sistema es $x=0$; $y=-2$; $z=2$

2. Considere la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-1,1]$. (5 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior, el eje de las X y las rectas verticales $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$. (5 puntos)

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$.

La derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

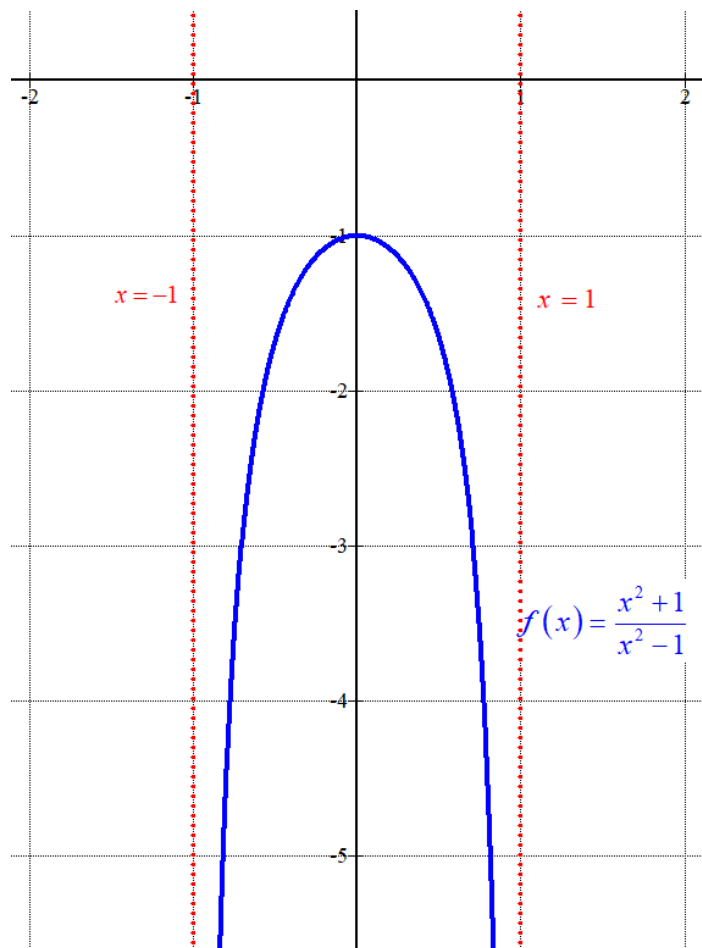
Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

La función presenta un extremo relativo en $x = 0$. Este extremo relativo es un máximo pues la derivada antes de $x = 0$ es positiva y después de $x = 0$ es negativa.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$
-0.9	-9.5
-1/2	-1.66
-1/4	-1.13
0	-1
1/4	-1.13
1/2	-1.66
0.9	-9.5



El área limitada por la gráfica de la función anterior, el eje de las X y las rectas verticales $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$ es el valor absoluto de la integral definida entre -0.5 y 0.5 de la función.

Calculamos primero la integral definida de la función.

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \int \frac{x^2-1+2}{x^2-1} dx = \int \frac{x^2-1}{x^2-1} dx + \int \frac{2}{x^2-1} dx = \\ &= \int dx + \int \frac{2}{x^2-1} dx = \dots\end{aligned}$$

Descomposición en fracciones simples

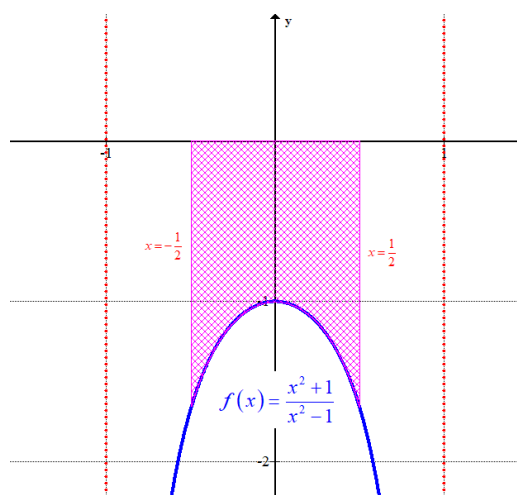
$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2-1} &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 &= A(x+1)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \rightarrow 2 = -2B \rightarrow B = -1 \\ x=1 \rightarrow 2 = 2A \rightarrow A = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{x^2-1} &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

$$\dots = x + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + K$$

Aplicamos este resultado al cálculo del área.

$$\begin{aligned}\int_{-0.5}^{0.5} f(x) dx &= \left[x + \ln|x-1| - \ln|x+1| \right]_{-0.5}^{0.5} = \\ &= \left[0.5 + \ln|0.5-1| - \ln|0.5+1| \right] - \left[-0.5 + \ln|-0.5-1| - \ln|-0.5+1| \right] = \\ &= 0.5 + \ln 0.5 - \ln 1.5 + 0.5 - \ln 1.5 + \ln 0.5 = 1 + 2 \ln 0.5 - 2 \ln 1.5 \simeq -1.197\end{aligned}$$

El área tiene un valor aproximado de 1.197 unidades cuadradas.



3. Determina los puntos A, B y C de la recta $x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3}$ que están en los planos coordenados (6 puntos) y determina cual de estos puntos A, B, C está situado entre los otros dos. (4 puntos)

Los planos coordenados tienen ecuaciones $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Hallamos los puntos A, B y C pedidos.

$$\left. \begin{array}{l} x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -12 = \frac{y+6}{2} \rightarrow -24 = y+6 \rightarrow y = -30 \\ -12 = \frac{z-6}{3} \rightarrow -36 = z-6 \rightarrow z = -30 \end{array} \right. \Rightarrow A(0, -30, -30)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x-12 = \frac{6}{2} = \frac{z-6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-12 = 3 \rightarrow x = 15 \\ 3 = \frac{z-6}{3} \rightarrow 9 = z-6 \rightarrow z = 15 \end{array} \right. \Rightarrow B(15, 0, 15)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3} \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{-6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-12 = -2 \rightarrow x = 10 \\ \frac{y+6}{2} = -2 \rightarrow y+6 = -4 \rightarrow y = -10 \end{array} \right. \Rightarrow C(10, -10, 0)$$

Los puntos son $A(0, -30, -30)$, $B(15, 0, 15)$ y $C(10, -10, 0)$.

Averiguamos cual de los tres puntos está situado entre los otros dos.

Si fuese C el punto situado entre A y B se daría la situación del dibujo.



Los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ deberían tener sentido contrario, por lo que el signo de sus coordenadas debe ser opuesto.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (0, -30, -30) - (10, -10, 0) = (-10, -20, -30) \\ \overrightarrow{CB} = (15, 0, 15) - (10, -10, 0) = (5, 10, 15) \end{array} \right\}$$

Las coordenadas de $\overrightarrow{CA}$ son todas negativas y las de $\overrightarrow{CB}$ son todas positivas. Se cumple lo pedido y el punto C está situado entre A y B.

Existe un error en el dibujo, en la realidad el punto C está más cerca de B que de A.

4. Queremos realizar un estudio de las opiniones políticas de los estudiantes de primer curso de la UIB. Por eso hemos tomado una muestra representativa de 500 estudiantes de primer curso y los hemos preguntado qué partido político votaron en las últimas elecciones. De los 500 estudiantes, 200 respondieron que votaron al PP, 100 al PSIB y al resto otras formaciones políticas.

Sabiendo que 200 de los estudiantes eran chicos, que el 40% de los votantes del PP son chicas y que el 50% de los votantes del PSIB son chicos, se pide:

- La probabilidad de que un estudiante haya votado otras formaciones políticas y sea chica. (4 puntos)
- La probabilidad de que un estudiante chico haya votado al PP. (2 puntos)
- La probabilidad de que un estudiante que ha votado otras formaciones políticas sea chica. (4 puntos)

- a) Como 200 estudiantes votaron al PP y de ellos el 40% son chicas tenemos que hay $200 \cdot 0.4 = 80$ chicas que votaron al PP. Como 100 estudiantes votaron al PSIB y el 50 % son chicas tenemos que 50 chicas votaron al PSIB.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Chico	Chica	
PP		$200 \cdot 0.4 = 80$	200
PSIB	$100 \cdot 0.5 = 50$		100
Otros			
	200		500

Completamos la tabla

	Chico	Chica	
PP	120	80	200
PSIB	50	50	100
Otros	30	170	200
	200	300	500

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un estudiante haya votado otras formaciones políticas y sea chica es $\frac{170}{500} = 0.34$.

- b) Hay 200 chicos entre los encuestados y de ellos 120 han votado al PP.

La probabilidad de que un estudiante chico haya votado al PP es $\frac{120}{200} = 0.6$.

- c) A otras formaciones políticas han votado 200 estudiantes y de ellos 170 son chicas.

La probabilidad de que un estudiante que ha votado otras formaciones políticas sea chica

es $\frac{170}{200} = 0.85$

OPCIÓN B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra la matriz X que verifica:

$$A \cdot X \cdot B = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ puntos})$$

Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X \cdot B = Id \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot Id \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

Hallamos las inversas de las matrices A y B.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \frac{Adj(B^T)}{|B|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 & -3-2 \\ -2-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Encuentra los valores a , b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5 & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$ (6 puntos). Determine en qué(s) punto(s) se verifica lo que asegura el teorema. (4 puntos)

Para que la función verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$ debe ser continua en el intervalo $[0, 4]$, derivable en $(0, 4)$ y $f(0) = f(4)$.

Para que la función sea continua en el intervalo $[0, 4]$ debe ser continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2c + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} cx + 1 = 2c + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + bx + 5 = 4a + 2b + 5 \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c + 1 = 4a + 2b + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a + 2b - 2c + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b - c + 2 = 0}$$

Para que la función sea derivable en el intervalo $[0, 4]$ debe ser derivable en $x = 2$. Para ello deben coincidir las derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 4a + b \\ f'(2^+) = c \\ f'(2^-) = f'(2^+) \end{cases} \Rightarrow 4a + b = c \Rightarrow \boxed{4a + b - c = 0}$$

La tercera condición es que $f(0) = f(4)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 5 \\ f(4) &= 4c + 1 \\ f(0) &= f(4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 = 4c + 1 \Rightarrow 4c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Juntamos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} \boxed{c = 1} \\ 2a + b - c + 2 = 0 \\ 4a + b - c = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b - 1 + 2 = 0 \\ 4a + b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 - 2a \\ 4a + b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a - 1 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = -1 - 2 = -3}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -3$ y $c = 1$.

Para estos valores la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Su derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Buscamos los valores del intervalo $(0, 4)$ que anulan la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{2}{3} \in (-\infty, 2) \\ 1 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

El valor que nos asegura el teorema de Rolle que existe y donde se anula la derivada es

$$x = \frac{2}{3} \in (0, 4).$$

3. El plano perpendicular al punto medio del segmento de extremos P(0, 3, 8) y Q(2, 1, 6) corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Encontrar el área del triángulo ABC. (10 puntos).

Calculemos las coordenadas de cada uno de los vértices del triángulo del que nos piden su área.

El plano perpendicular al punto medio del segmento de extremos P(0, 3, 8) y Q(2, 1, 6) tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por el punto medio del segmento PQ.

Hallamos su ecuación.

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 6) - (0, 3, 8) = (2, -2, -2)$$

$$\text{Pto medio PQ} = R = \frac{(2, 1, 6) + (0, 3, 8)}{2} = (1, 2, 7)$$

$$\left. \begin{array}{l} R(1, 2, 7) \in \pi \\ \vec{n} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{2} = (1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} R(1, 2, 7) \in \pi \\ \pi : x - y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2 - 7 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D - 8 = 0 \Rightarrow D = 8 \Rightarrow \pi : x - y - z + 8 = 0$$

Hallamos los puntos de corte del plano $\pi : x - y - z + 8 = 0$ con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - y - z + 8 = 0 \\ \text{Eje X} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8 \Rightarrow A(-8, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - y - z + 8 = 0 \\ \text{Eje Y} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -y + 8 = 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(0, 8, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - y - z + 8 = 0 \\ \text{Eje Z} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -z + 8 = 0 \Rightarrow z = 8 \Rightarrow C(0, 0, 8)$$

El área del triángulo ABC es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ dividido entre 2.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 8, 0) - (-8, 0, 0) = (8, 8, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 8) - (-8, 0, 0) = (8, 0, 8) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64i - 64k - 64j = (64, -64, -64)$$

$$\text{Área ABC} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{64^2 + (-64)^2 + (-64)^2}}{2} = \boxed{32\sqrt{3} \approx 55.43 \text{ u}^2}$$

4. Consideramos la población de estudiantes que han aprobado la selectividad en la convocatoria de junio un año determinado. Sea X la variable aleatoria que modela la proporción de estudiantes de la población anterior que elige estudiar un grado de humanidades. Esta variable aleatoria X se modela con una distribución normal de media 0.35 y desviación típica 0.1. Se pide:

- a) ¿cuál es la probabilidad de que en un año cualquier más del 45% de los estudiantes de la población considerada estudien un grado de humanidades? (5 puntos)
- b) En los últimos 10 años, ¿en cuántos años el porcentaje de estudiantes de la población considerada que han escogido estudiar un grado de humanidades no ha superado el 30%? (5 puntos)

X = Proporción de estudiantes de entre los que han aprobado la selectividad que elige estudiar un grado de humanidades. $X = N(0.35, 0.1)$

a) Nos piden calcular $P(X > 0.45)$.

$$P(X > 0.45) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{0.45 - 0.35}{0.1}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

	0	
0.0	0.5000	
0.1	0.5398	
0.2	0.5793	
0.3	0.6179	
0.4	0.6554	
0.5	0.6915	
0.6	0.7257	
0.7	0.7580	
0.8	0.7881	
0.9	0.8159	
1.0	0.8413	
1.1	0.8643	
1.2	0.8849	

b) Calculamos $P(X < 0.3)$.

$$P(X < 0.3) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{0.3 - 0.35}{0.1}\right) = P(Z < -0.5) =$$

$$= P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

	0	
0.0	0.5000	
0.1	0.5398	
0.2	0.5793	
0.3	0.6179	
0.4	0.6554	
0.5	0.6915	
0.6	0.7257	
0.7	0.7580	
0.8	0.7881	
0.9	0.8159	
1.0	0.8413	

Por tanto, el número de años respecto de los últimos 10 años en el que el porcentaje de estudiantes que ha escogido estudiar un grado de humanidades no ha superado el 30% está en $10 \cdot 0.3085 = 3.085$. Aproximadamente 3 años.