



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2019

Modelo 2

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = m \\ 6x + 6y + m^2z = -9 \end{array} \right\} ;$$

(7 puntos)

b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado.

(3 puntos)

2. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 puntos), los intervalos de crecimiento y decrecimiento (3 puntos) y haz un esbozo de su gráfica para x entre -3 y 3 . (4 puntos)

3. Determina un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right\}$$

y también paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. (10 puntos)

4. El peso de los adultos de 40 años de una cierta comunidad se modela con una distribución normal de media $\mu = 85$ kg y desviación típica $\sigma = 15$ kg. Nos piden:

- ¿Qué porcentaje de la población tiene sobrepeso? Entendemos que una persona adulta de 40 años tiene sobrepeso si pesa más de 100 kg. (4 puntos)
- Consideramos al colectivo de los individuos más delgados de la comunidad. Si nos dicen que este colectivo representa al 40% de todos los individuos de la comunidad, ¿cuál es el peso máximo de un individuo del colectivo? (6 puntos)

Modelo 2

OPCIÓN B

1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

Encuentra x, y, z para que se cumpla:

$$A \cdot b - 2c = d$$

(10 puntos)

2. Considere la región delimitada por la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje de abscisas o eje OX y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$. Haz un esbozo de la región (6 puntos) y calcula el área de la región. (4 puntos)

3. Considere los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ y $C(0, 1, 1)$. Calcula el área del triángulo que forman los puntos A, B y C (5 puntos) y determina el ángulo que forman los vectores AB y AC. (5 puntos)

4. Se ha realizado un estudio sobre el miedo a volar y el nivel de estrés en una cierta comunidad. Nos dicen que el 60% de los individuos no tienen miedo a volar, el 50% tiene un nivel bajo de estrés, el 25%, un nivel medio, y el 5% tiene un nivel alto de estrés y miedo a volar. Sabiendo, además, que el 5% de los individuos tiene un nivel medio de estrés y no tiene miedo a volar, se pide:

- a) Probabilidad de que un individuo de la comunidad tenga un nivel de estrés medio y miedo a volar. (3 puntos)
- b) Sabiendo que un individuo tiene miedo a volar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés? (3 puntos)
- c) ¿Son independientes los eventos "nivel de estrés bajo" y "miedo a volar"? Razona la respuesta. (4 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = m \\ 6x + 6y + m^2z = -9 \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{vmatrix} = 4m^2 - 18 + 24 - 12 - 6m^2 + 24 = -2m^2 + 18$$

Lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 + 18 = 0 \Rightarrow 2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \sqrt{9} = \pm 3$$

Analizamos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq 3$ y $m \neq -3$

En este caso la matriz de coeficientes tiene rango 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $m = 3$

La matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ tiene determinante nulo, por lo que su rango no es 3. Tiene un menor}$$

de orden 2 con determinante no nulo (quitando la fila y columna 3ª).

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es 2.}$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix} \text{ tomamos el menor de orden 3 quitando la columna 1ª y su}$$

$$\text{determinante es } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 27 + 36 + 18 - 81 = 0. \text{ El rango de } A/B \text{ no es 3.}$$

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 2ª y 3ª columna y la 3ª fila.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \text{ El rango de } A/B \text{ es 2}$$

Como $\text{rango } A = \text{rango } A/B = 2 \neq n^\circ \text{ incógnitas}$ el sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $m = -3$

La matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ tiene determinante nulo, por lo que su rango no es 3. Tiene un menor}$$

de orden 2 con determinante no nulo (quitando la fila y columna 3ª).

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix} \text{ tomamos el menor de orden 3 quitando la columna 1ª y su}$$

$$\text{determinante es } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 27 - 36 + 18 + 81 = 89 \neq 0. \text{ El rango de A/B es 3.}$$

Como $\text{rango A} \neq \text{rango A/B}$ el sistema es incompatible.

$$\text{b) Es compatible indeterminado para } m = 3 \text{ y el sistema queda } \left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ 6x + 6y + 9z = -9 \end{array} \right\}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ 6x + 6y + 9z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido entre 3 la ecuación 3ª} \\ 2x + y - z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = -3 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ 2x + 2y + 3z = -3 \\ -2x - y + z = -3 \\ \hline y + 4z = -6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ 4x + 2y - 2z = 6 \\ -4x - 3y - 2z = 0 \\ \hline -y - 4z = 6 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ -y - 4z = 6 \\ y + 4z = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ y + 4z = -6 \\ -y - 4z = 6 \\ \hline 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ -y - 4z = 6 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = -2z \\ -y = 4z + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = -2z \\ y = -4z - 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 3(-4z - 6) = -2z \Rightarrow 4x - 12z - 18 = -2z$$

$$4x = 10z + 18 \Rightarrow x = \frac{10z + 18}{4} = \frac{5z + 9}{2}$$

$$\text{La solución es } x = \frac{9 + 5t}{2}; y = -6 - 4t; z = t.$$

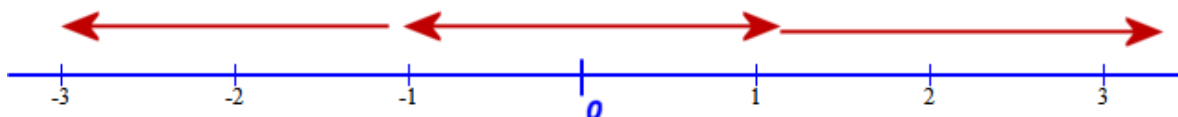
2. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 puntos), los intervalos de crecimiento y decrecimiento (3 puntos) y haz un esbozo de su gráfica para x entre -3 y 3 . (4 puntos)

Calculamos la derivada de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

Igualamos a cero la derivada.

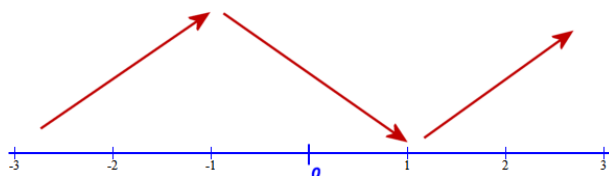
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos los cambios de signo de la derivada antes, entre y después de esos valores.



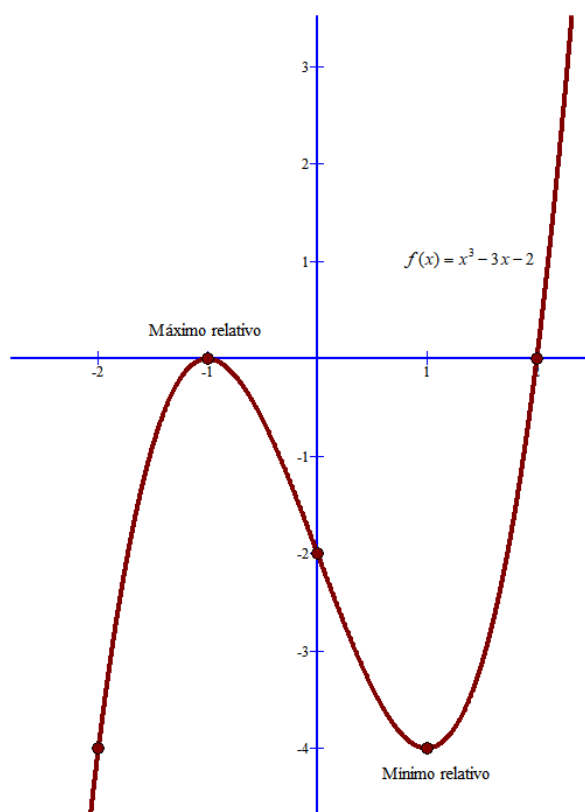
- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos el valor $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos el valor $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos el valor $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.



La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$. Para dibujarla hacemos una tabla de valores.

x	$y = x^3 - 3x - 2$
-2	$-8 + 6 - 2 = -4$
-1	$-1 + 3 - 2 = 0$
0	-2
1	$1 - 3 - 2 = -4$
2	$8 - 6 - 2 = 0$



3. Determina un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

y también paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. (10 puntos)

Calculamos el vector de la recta dada, despejando y pasando a la ecuación paramétrica de la recta.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

El vector director de la recta es $\vec{v} = (-1, 1, -1)$.

El vector director de la otra recta es $\vec{u} = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) = (1, 0, -1)$

El plano pedido pasa por el punto $P(0, 0, 0)$ y tiene vectores directores $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ y $\vec{u} = (1, 0, -1)$. Obtenemos su ecuación.

$$\pi : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y - z - y = 0 \Rightarrow -x - 2y - z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y + z = 0}$$

4. El peso de los adultos de 40 años de una cierta comunidad se modela con una distribución normal de media $\mu = 85$ kg y desviación típica $\sigma = 15$ kg. Nos piden:

- ¿Qué porcentaje de la población tiene sobrepeso? Entendemos que una persona adulta de 40 años tiene sobrepeso si pesa más de 100 kg. (4 puntos)
- Consideramos al colectivo de los individuos más delgados de la comunidad. Si nos dicen que este colectivo representa al 40% de todos los individuos de la comunidad, ¿cuál es el peso máximo de un individuo del colectivo? (6 puntos)

X = Peso de un adulto de 40 años. $X = N(85, 15)$

a) Calculamos $P(X > 100)$.

$$P(X > 100) = 1 - P(X < 100) = \{\text{Tipificamos}\} = 1 - P\left(\frac{X - 85}{15} < \frac{100 - 85}{15}\right) =$$

$$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}$$

El porcentaje de población de 40 años con sobrepeso es de 15,87%

b) Llamamos p al peso máximo del colectivo. Debe cumplirse $P(X < p) = 0,4$.

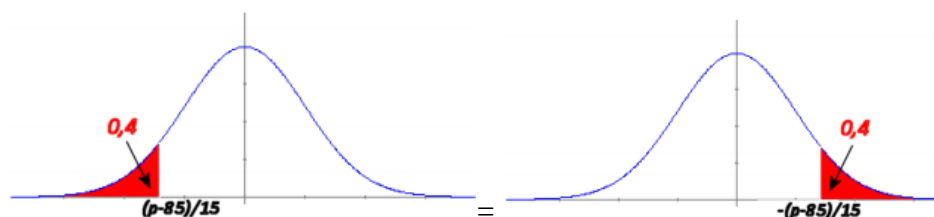
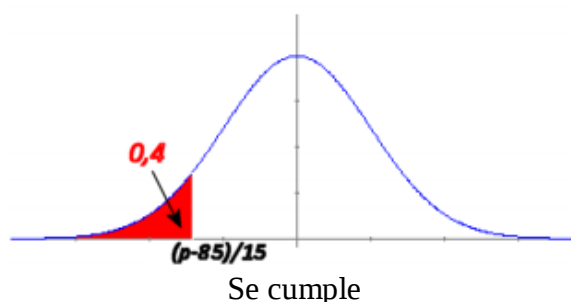
$$P(X < p) = 0,4$$

Tipificamos

$$P\left(\frac{X - 85}{15} < \frac{p - 85}{15}\right) = 0,4$$

$$P\left(Z < \frac{p - 85}{15}\right) = 0,4$$

Como es menor de 0,5 la situación es



$$P\left(Z < \frac{p - 85}{15}\right) = 0,4 \Rightarrow P\left(Z > -\frac{p - 85}{15}\right) = 0,4$$



$$P\left(Z > -\frac{p-85}{15}\right) = 0,4 \Rightarrow 1 - P\left(Z < -\frac{p-85}{15}\right) = 0,4 \Rightarrow P\left(Z < -\frac{p-85}{15}\right) = 0,6$$

Buscamos en la tabla $N(0, 1)$

$$-\frac{p-85}{15} = \frac{0,25+0,26}{2} \Rightarrow p-85 = -15 \frac{0,25+0,26}{2}$$

$$p = 85 - 15 \cdot 0,266 = 81,175 \text{ kg}$$

El peso máximo del colectivo es de 81.175 kg.

Modelo 2

OPCIÓN B

1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

Encuentra x, y, z para que se cumpla:

$$A \cdot b - 2c = d \quad (10 \text{ puntos})$$

$$A \cdot b - 2c = d \Rightarrow A \cdot b = 2c + d$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+z \\ 2+z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=2+z \\ x+2y=2+z \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z+y=2+z \\ z+2y=2+z \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-z \\ 2y=2 \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-z \\ y=1 \\ x=z \end{cases} \Rightarrow$$

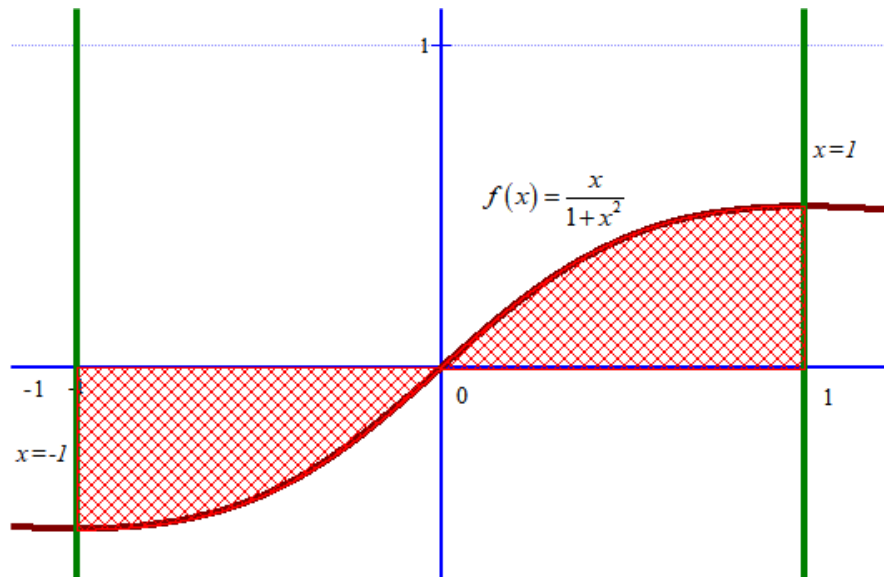
$$\Rightarrow \begin{cases} 1=2-z \\ y=1 \\ x=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

La solución es $x = y = z = 1$

2. Considere la región delimitada por la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje de abscisas o eje OX y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$. Haz un esbozo de la región (6 puntos) y calcula el área de la región. (4 puntos)

Para hacer un dibujo de la gráfica entre -1 y 1 , realizamos una tabla de valores

x	$y = \frac{x}{1+x^2}$
-1	$-0,5$
$-0,5$	$-0,4$
0	0
$0,5$	$0,4$
1	$0,5$



Para calcular el área de la región coloreada hay que hacer la integral definida de 0 a 1 de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ y el área pedida será el doble de lo obtenido (por la simetría de la función).

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 \right) = \frac{1}{2} \left(\left[\ln(1+1^2) \right] - \left[\ln(1+0^2) \right] \right) = \frac{1}{2} (\ln 2)$$

Área = $2 \cdot \frac{1}{2} (\ln 2) = \ln 2 = 0,69 u^2$, que coincide aproximadamente con lo que se observa en el dibujo de la gráfica.

3. Considere los puntos A(0, 0, 0), B(1, 1, 0) y C(0, 1, 1). Calcule el área del triángulo que forman los puntos A, B y C (5 puntos) y determine el ángulo que forman los vectores AB y AC. (5 puntos)

El área del triángulo definido por los puntos dados es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen dichos vértices.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) - (0, 0, 0) = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i + k - j = i - j + k = (1, -1, 1)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(1, -1, 1)|}{2} = \frac{\sqrt{1+1+1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

El ángulo que forman los vectores AB y AC lo calculamos con la fórmula del producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$(1, 1, 0) \cdot (0, 1, 1) = \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$1 = 2 \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$$

El ángulo es de 60°

4. Se ha realizado un estudio sobre el miedo a volar y el nivel de estrés en una cierta comunidad. Nos dicen que el 60% de los individuos no tienen miedo a volar, el 50% tiene un nivel bajo de estrés, el 25%, un nivel medio, y el 5% tiene un nivel alto de estrés y miedo a volar. Sabiendo, además, que el 5% de los individuos tiene un nivel medio de estrés y no tiene miedo a volar, se pide:

- Probabilidad de que un individuo de la comunidad tenga un nivel de estrés medio y miedo de volar. (3 puntos)
- Sabiendo que un individuo tiene miedo a volar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés? (3 puntos)
- ¿Son independientes los eventos "nivel de estrés bajo" y "miedo a volar"? Razona la respuesta. (4 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia donde se organicen y visualicen mejor los datos dados.

	Estrés bajo	Estrés medio	Estrés alto	
Miedo a volar			5	
Sin miedo a volar		5		60
	50	25		100

Completamos la tabla, sabiendo que cada línea debe sumar lo que indique el valor total situado a su derecha o debajo.

	Estrés bajo	Estrés medio	Estrés alto	
Miedo a volar	15	20	5	40
Sin miedo a volar	35	5	20	60
	50	25	25	100

Con los datos que nos proporciona esta última tabla respondemos a las preguntas.

a) $P(\text{Tener nivel medio de estrés y miedo a volar}) = 20\% = \boxed{0,2}$

b) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Nivel bajo de estrés/Tiene miedo a volar}) = \frac{P(\text{Tiene miedo a volar y nivel bajo de estrés})}{P(\text{Tiene miedo a volar})} =$$

$$= \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = \boxed{0,375}$$

c) Para ser independientes debe cumplirse:

$$P(\text{Nivel bajo de estrés y miedo a volar}) = P(\text{Nivel bajo de estrés}) \cdot P(\text{Tiene miedo a volar})$$

$$\text{¿} \frac{15}{100} = \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{100} \text{?}$$

$$\text{¿} \frac{15}{100} = \frac{2000}{10000} \text{?}$$

$$\text{¿} \frac{15}{100} = \frac{20}{100} \text{? No es cierto}$$

Los sucesos “Nivel bajo de estrés” y “Miedo a volar” no son independientes.