



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2019

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para qué valores de a el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} (a+2)x + (a-1)y - z = 1 \\ ax - y + z = -1 \\ 11x + ay - z = a \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvalo para $a = 0$. (3 puntos)

2. Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto $(1, 0)$. Determina los coeficientes a , b y c para que tengan la misma recta tangente en este punto y calcúlala. (10 puntos)

3. Determina la posición relativa del plano $x + y + z = 1$ y la recta de ecuaciones

$$x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{-2} \quad (4 \text{ puntos})$$

Calcula la proyección ortogonal de la recta sobre el plano. (6 puntos)

4. Las alturas X de los estudiantes de 18 años de los institutos de Palma se modelan según una ley normal de media $\mu = 1.78$ m y desviación típica $\sigma = 0.65$ m. Se pide:

- Porcentaje de estudiantes de 18 años de los institutos de Palma que miden más de 1.90 m. (4 puntos)
- Cogemos una muestra de 100 estudiantes de 18 años de los institutos de Palma y queremos seleccionar los 30 más altos. ¿Cuál es la altura mínima que debe realizar un estudiante de 18 años de los institutos de Palma para ser seleccionado? (6 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calcule x e y para qué se verifique:

$$b - A \cdot c = A \cdot d \quad (10 \text{ puntos})$$

2. Considere la región delimitada por la función $f(x) = x^2 - x^4$ i el eje de abscisas o eje OX.

Haz un esbozo de la región considerada (6 puntos) y calcula el área de la región. (4 puntos)

3. Considere la recta $\frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ y el plano $x-y=0$. Calcula el área del triángulo formado por el punto de corte entre la recta y el plano, el punto $(1, -1, 1)$ de la recta y la proyección ortogonal de este punto sobre el plano. (10 puntos)

4. En una comunidad de 500 estudiantes de segundo de bachillerato, 200 estudian la opción científica tecnológica. Hay 150 que practican fútbol y 100 que practican baloncesto (entendemos que no hay ninguno que practique fútbol y baloncesto a la vez). De los que practican baloncesto, 70 estudian la opción científica tecnológica, y hay 150 estudiantes que no practican deporte ni realizan la opción científica tecnológica. Se pide:

- Probabilidad de que un estudiante estudie la opción científica tecnológica y no practique deporte. (3 puntos)
- Sabiendo que un estudiante practica fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que estudie la opción científica tecnológica? (3 puntos)
- Son independientes los eventos "practicar fútbol" y "estudiar la opción científica tecnológica". Razona la respuesta. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Discute para qué valores de a el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{rcl} (a+2)x + (a-1)y - z & = & 1 \\ ax - y + z & = & -1 \\ 11x + ay - z & = & a \end{array} \right\}; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvalo para $a = 0$. (3 puntos)

a) Consideremos la matriz de los coeficientes del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{vmatrix} = a+2+11a-11-a^2-11+a^2-a-a^2-2a = -a^2+9a-20$$

Si igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 9a - 20 = 0 \Rightarrow a = \frac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{-2} = \frac{-9 \pm 1}{-2} = \begin{cases} x = \frac{-9+1}{-2} = 4 \\ x = \frac{-9-1}{-2} = 5 \end{cases}$$

Hay tres situaciones distintas que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 4$ y $a \neq 5$

En este caso el rango de la matriz de coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = 4$

$$\text{El sistema queda } \left. \begin{array}{rcl} 6x + 3y - z & = & 1 \\ 4x - y + z & = & -1 \\ 11x + 4y - z & = & 4 \end{array} \right\}. \text{ Triangulamos el sistema.}$$

$$\left. \begin{array}{rcl} 6x + 3y - z & = & 1 \\ 4x - y + z & = & -1 \\ 11x + 4y - z & = & 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 6 \cdot \text{Ecuación } 2^a - 4 \cdot \text{Ecuación } 1^a & & \\ 24x & -6y & +6z = -6 \\ -24x & -12y & +4z = -4 \\ \hline & -18y & +10z = -10 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6 \cdot \text{Ecuación } 3^a - 11 \cdot \text{Ecuación } 1^a & & \\ 66x & +24y & -6z = 24 \\ -66x & -33y & +11z = -11 \\ \hline & -9y & +5z = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 6x + 3y - z & = & 1 \\ & -18y + 10z & = -10 \\ & -9y + 5z & = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Simplifico la ecuación } 2^a \\ \text{La divido por } -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 3y - z = 1 \\ +9y - 5z = 5 \\ -9y + 5z = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -9y + 5z = 13 \\ 9y - 5z = 5 \\ \hline 0 = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 3y - z = 1 \\ +9y - 5z = 5 \\ 0 = 18 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $a = 5$

$$\text{El sistema queda } \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ 5x - y + z = -1 \\ 11x + 5y - z = 5 \end{array} \right\}. \text{ Triangulamos el sistema.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ 5x - y + z = -1 \\ 11x + 5y - z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7 \cdot \text{Ecuación } 2^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 35x - 7y + 7z = -7 \\ -35x - 20y + 5z = -5 \\ \hline -27y + 12z = -12 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 \cdot \text{Ecuación } 3^a - 11 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 77x + 35y - 7z = 35 \\ -77x - 44y + 11z = -11 \\ \hline -9y + 4z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ -27y + 12z = -12 \\ -9y + 4z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Simplifico la ecuación } 2^a \\ \text{Divido por } -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ 9y - 4z = 4 \\ -9y + 4z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -9y + 4z = 24 \\ 9y - 4z = 4 \\ \hline 0 = 28 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ 9y - 4z = 4 \\ 0 = 28 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos con la regla de Cramer.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 1 \\ -y + z = -1 \\ 11x - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & -1 \end{pmatrix} y |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 11 - 11 = -20$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1+1}{-20} = \frac{2}{-20} = \frac{-1}{10}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2+11-11}{-20} = \frac{2}{-20} = \frac{-1}{10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{11+11}{-20} = \frac{22}{-20} = \frac{-11}{10}$$

2. Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto (1, 0). Determina los coeficientes a, b y c para que tengan la misma recta tangente en este punto y calcúlala. (10 puntos)

Si pasan por el punto (1, 0) debe cumplirse:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + a \cdot 1^2 + b = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0$$

$$g(1) = 0 \Rightarrow 1 - c \cdot 1^2 = 0 \Rightarrow 1 - c = 0 \Rightarrow c = 1$$

Al tener la misma tangente debe tener la misma pendiente en el punto (1, 0).

Es decir, $g'(1) = f'(1)$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 4 + 2a + b \\ g'(x) &= 1 - 2x \Rightarrow g'(1) = 1 - 2 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 = 4 + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -5$$

Nos queda por resolver el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left. \begin{aligned} 1 + a + b &= 0 \\ 2a + b &= -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= -1 - b \\ 2a + b &= -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(-1 - b) + b = -5 \Rightarrow -2 - 2b + b = -5 \Rightarrow -b = -3 \Rightarrow b = 3$$

$$a = -1 - 3 = -4$$

El valor de los parámetros es $a = -4$, $b = 3$ y $c = 1$

La tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ en (1,0) es

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 8x + 3 \Rightarrow f'(1) = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$\text{La recta tangente es } y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -x + 1}$$

3. Determina la posición relativa del plano $x + y + z = 1$ y la recta de ecuaciones

$$x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{-2} \quad (4 \text{ puntos})$$

Calcula la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.

(6 puntos)

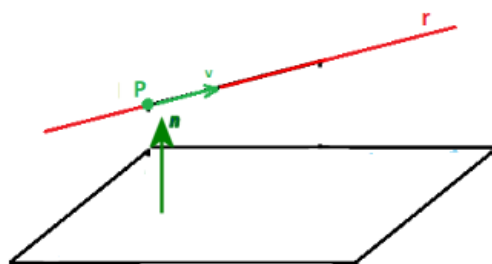
La posición relativa de recta y plano depende (en gran parte) de la posición del vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, 1)$ y del director de la recta $\vec{v} = (1, 1, -2)$.

Veamos si son perpendiculares. En cuyo caso plano y recta son paralelos o el plano contiene a la recta.

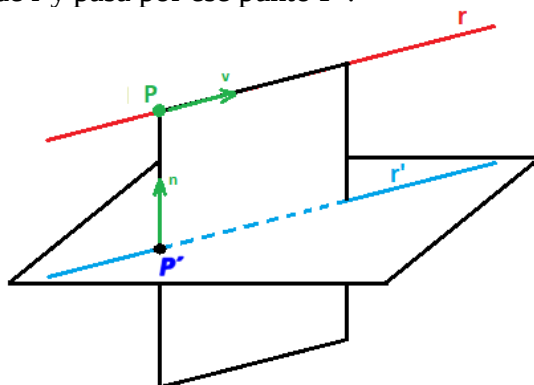
$\vec{n} \cdot \vec{v} = (1, 1, 1)(1, 1, -2) = 1 + 1 - 2 = 0$. Son perpendiculares. Falta ver si la recta está contenida en el plano o no. Basta con ver si uno de sus puntos, por ejemplo, $P(1, 1, 1)$ está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 + 1 + 1 = 1 \text{?}$$

Luego recta y plano son paralelos.



La proyección ortogonal de la recta en el plano, se obtiene según indica el dibujo. Basta proyectar el punto $P(1, 1, 1)$ de la recta en el plano y la recta r' pedida será la que tiene como vector director el mismo de r y pasa por ese punto P' :



Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \text{Pasa por } P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

El punto P' será el corte del plano y esta recta que acabamos de obtener.

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + t + 1 + t + 1 + t = 1 \Rightarrow 3 + 3t = 1 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

El punto P' tiene coordenadas $P' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$

Y la proyección ortogonal es la recta de ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1, 1, -2) \\ \text{Pasa por el punto } P' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x - \frac{1}{3}}{1} = \frac{y - \frac{1}{3}}{1} = \frac{z - \frac{1}{3}}{-2} \Rightarrow \boxed{x - \frac{1}{3} = y - \frac{1}{3} = \frac{z - \frac{1}{3}}{-2}}$$

4. Las alturas X de los estudiantes de 18 años de los institutos de Palma se modelan según una ley normal de media $\mu = 1.78$ m y desviación típica $\sigma = 0.65$ m. Se pide:

- a) Porcentaje de estudiantes de 18 años de los institutos de Palma que miden más de 1.90 m. (4 puntos)
- b) Cogemos una muestra de 100 estudiantes de 18 años de los institutos de Palma y queremos seleccionar los 30 más altos. ¿Cuál es la altura mínima que debe realizar un estudiante de 18 años de los institutos de Palma para ser seleccionado? (6 puntos)

X = Estatura de los estudiantes. $X = N(1.78, 0.65)$

a) Calculamos $P(X > 1.9)$.

$$P(X > 1.9) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{X - 1.78}{0.65} > \frac{1.9 - 1.78}{0.65}\right) =$$

$$= P(Z > 0.1846) = 1 - P(Z < 0.1846) = 1 - \frac{0.5714 + 0.5753}{2} = 1 - 0.5733 = 0.4266$$

El porcentaje de alumnos de más de 1.90 metros es de 42,66%

b) Nos piden la altura h para que $P(X > h) = 0,30$. Averigüémoslo, siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior.

$$P(X > h) = 0,30 \Rightarrow P\left(\frac{X - 1.78}{0.65} > \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 0,30 \Rightarrow P\left(Z > \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 0,3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 0.3 \Rightarrow P\left(Z < \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 0.7$$

Buscando en la tabla de $N(0, 1)$.

$$\frac{h - 1.78}{0.65} = 0.52 \Rightarrow h = 1.78 + 0.52 \cdot 0.65 = \boxed{2.118 \text{ m}}$$

OPCIÓN B

1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calcule x e y para qué se verifique:

$$b - A \cdot c = A \cdot d \quad (10 \text{ puntos})$$

$$b - A \cdot c = A \cdot d \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xy + 2y^2 \\ 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2xy - 2y \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 - xy - 2y^2 \\ \frac{3}{2} - 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2xy - 2y \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 - xy - 2y^2 &= 6x - 2xy - 2y \\ \frac{3}{2} - 2y^2 &= -2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 + xy - 2y^2 &= 6x - 2y \\ 3 - 4y^2 &= -4y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 &= 6x - xy + 2y^2 + 2y \\ 0 &= 4y^2 - 4y - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dots$$

$$0 = 4y^2 - 4y - 3 \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} y = \frac{4+8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{4-8}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\dots \Rightarrow \begin{cases} 2 = 6x - xy + 2y^2 - 2y \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 = 6x - \frac{3}{2}x + 2 \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow 4 = 12x - 3x + 9 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$\dots \Rightarrow \begin{cases} 2 = 6x - xy + 2y^2 - 2y \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 = 6x + \frac{1}{2}x + 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \Rightarrow 4 = 12x + x + 1 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{13}$$

Las soluciones son: $x = \frac{1}{9}$ e $y = \frac{3}{2}$; $x = \frac{1}{13}$ e $y = -\frac{1}{2}$

2. Considere la región delimitada por la función $f(x) = x^2 - x^4$ i el eje de abscisas o eje OX. Haz un esbozo de la región considerada (6 puntos) y calcula el área de la región. (4 puntos)

Veamos donde se corta la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x^4$ con el eje X ($y = 0$).

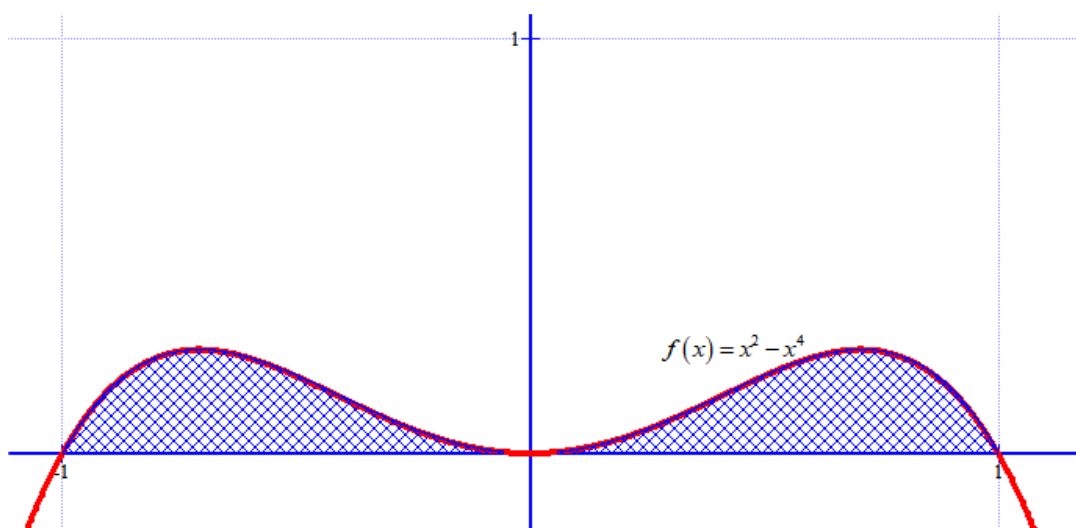
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - x^4 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = x^2 - x^4 \Rightarrow 0 = x^2(1 - x^2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

El recinto es el dibujado. Para hacer la gráfica basta con completar la tabla de valores de -1 a 1 .

El valor del área es muy pequeño. Por la simetría basta hallar el área entre 0 y 1 y el área del recinto pedida será el doble de lo que se obtenga .

$$\int_0^1 x^2 - x^4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^5}{5} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} u^2$$

El área es $2 \cdot \frac{2}{15} = \boxed{\frac{4}{15} u^2}$



3. Considere la recta $\frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ y el plano $x-y=0$. Calcule el área del triángulo formado por el punto de corte entre la recta y el plano, el punto $(1, -1, 1)$ de la recta y la proyección ortogonal de este punto sobre el plano. (10 puntos)

Calculemos las coordenadas de cada uno de los vértices del triángulo del que nos piden su área.

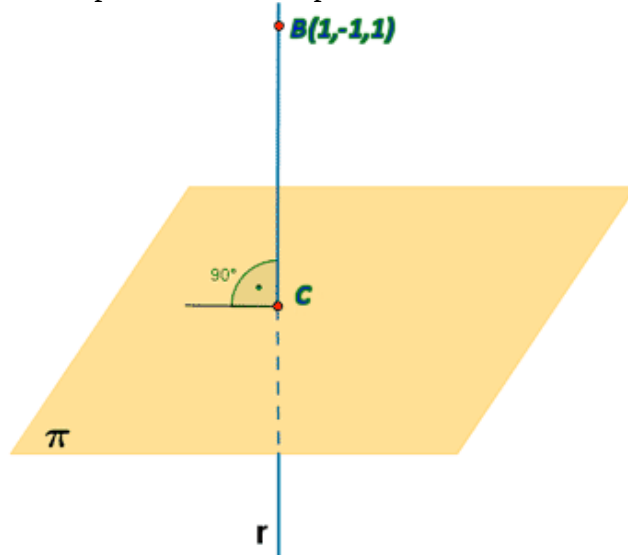
El punto de corte de recta y plano lo hallamos resolviendo el sistema formado por sus respectivas ecuaciones, previamente pasamos la ecuación continua de la recta a paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} x-y=0 \\ x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{array} \right\} \Rightarrow 1+2t+1-t=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1+2t=1-4=-3 \\ y=-1+t=-1-2=-3 \\ z=1-t=1+2=3 \end{array} \right\}$$

El vértice A(-3, -3, 3)

El vértice B(1, -1, 1)

La proyección ortogonal del punto B sobre el plano es el otro vértice.



La recta r tiene ecuación

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{n} = (1, -1, 0) \\ \text{Pasa por } B(1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{array} \right\}$$

El punto C es el punto de corte de la recta y plano

$$\left. \begin{array}{l} x-y=0 \\ x=1+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1+t+1+t=0 \Rightarrow 2+2t=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1+t=1-1=0 \\ y=-1-t=-1+1=0 \\ z=1 \end{array} \right\}$$

El vértice C tiene coordenadas C(0,0,1)

El triángulo de vértices A(-3, -3, 3); B(1, -1, 1) y C(0,0,1) es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen los tres vértices, por ejemplo, $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1, -1, 1) - (-3, -3, 3) = (4, 2, -2) \\ \overrightarrow{AC} &= (0, 0, 1) - (-3, -3, 3) = (3, 3, -2) \end{aligned} \left\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \right.$$
$$= -4i - 6j + 12k - 6k + 8j + 6i = 2i + 2j + 6k = (2, 2, 6)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{44}}{2} = \boxed{\sqrt{11} u^2}$$

4. En una comunidad de 500 estudiantes de segundo de bachillerato, 200 estudian la opción científica tecnológica. Hay 150 que practican fútbol y 100 que practican baloncesto (entendemos que no hay ninguno que practique fútbol y baloncesto a la vez). De los que practican baloncesto, 70 estudian la opción científica tecnológica, y hay 150 estudiantes que no practican deporte ni realizan la opción científica tecnológica. Se pide:

- Probabilidad de que un estudiante estudie la opción científica tecnológica y no practique deporte. (3 puntos)
- Sabiendo que un estudiante practica fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que estudie la opción científica tecnológica? (3 puntos)
- Son independientes los eventos "practicar fútbol" y "estudiar la opción científica tecnológica". Razona la respuesta.

Realicemos una tabla de resumen de todos los datos aportados en el ejercicio

	Opción científica tecnológica	No opción científica tecnológica	
Futbol			150
Baloncesto	70		100
No hacen deporte		150	
	200		500

De aquí podemos completar la tabla.

	Opción científica tecnológica	No opción científica tecnológica	
Futbol	30	120	150
Baloncesto	70	30	100
No hacen deporte	100	150	250
	200	300	500

$$a) P(\text{No hace deporte y opción científica}) = \frac{100}{500} = \boxed{0,2}$$

$$b) P(\text{Estudie opción científica} / \text{Practica futbol}) = \frac{30}{150} = \boxed{0,2}$$

- c) Para que sean independientes debe cumplirse que la probabilidad de la intersección de los sucesos sea igual al producto de las probabilidades de ambos sucesos.

$$P(\text{Practique futbol} \cap \text{estudie opción científica}) = \frac{30}{500} = \frac{3}{50}$$

$$P(\text{Practique futbol}) \cdot P(\text{estudie opción científica}) = \frac{150}{500} \cdot \frac{200}{500} = \frac{30000}{250000} = \frac{3}{25}$$

Evidentemente no son iguales y por tanto son sucesos dependientes.