



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Modelo 3

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Dada la ecuación matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

donde X es la matriz incógnita y

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Para que valores del parámetro a existe la matriz inversa de M? (1 punto)
- (b) Calcula la matriz inversa de M. (3 puntos)
- (c) Para $a = 2$, resuelve la ecuación matricial, si es posible. (3 puntos)
- (d) Para los valores de a para los cuales existe la matriz inversa de M, resuelve la ecuación matricial. (3 puntos)

2. Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

- (a) Determina: el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las coordenadas de los máximos y mínimos y el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. (2 puntos)
- (b) Haz un esbozo de la gráfica. (1 punto)
- (c) Obtén los valores de A y B para los cuales (3 puntos)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

- (d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$. (4 puntos)

3. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

- (a) Calcula un vector posición y un vector director de cada una. (4 puntos)
- (b) Calcula la ecuación vectorial de cada una. (2 puntos)
- (c) Calcula el rango de la matriz formada por los dos vectores directores y el vector diferencia, o vector resta, de los dos vectores posición obtenidos. (2 puntos)
- (d) Del anterior rango, deduce la posición relativa de ambas rectas. (2 puntos)

4. Tenemos tres urnas, la primera contiene 2 bolas azules; la segunda, 1 bola azul y 1 roja; la tercera, 2 bolas rojas. Hagamos el experimento aleatorio "Elegimos una urna al azar y extraemos una bola"

Supone que todas las urnas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.

- (a) Calcula la probabilidad del suceso $R = \text{"bolla extraída roja"}$ (4 puntos).
 (b) Si la bola extraída resulta que es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la urna escogida haya sido la tercera? (5 puntos)

Modelo 3

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices A y B,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) calcula $A \cdot B$ y $(A \cdot B)^t$, donde la "t" indica matriz traspuesta. (4 puntos)
 (b) ¿es posible calcular B^2 ? Si lo es, calcúlala. (1 punto)
 (c) para los diferentes valores de x , calcula el rango de la matriz A. (5 puntos)

2. En un acuario, el estudio de la evolución de la población de peces se ha modelado según la función $t \rightarrow P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t},$$

donde la variable t , que es un número real mayor o igual que cero, medirá el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000 y $P(t)$ indica número de individuos, en millares, en el instante de tiempo t . Según el modelo, calcula:

- (a) La población que había el 1 de enero del año 2000 y la población que habrá al final del año 2020. (1 punto)
 (b) El tamaño de la población (en número de individuos) a largo plazo. (3 puntos)
 (c) El año en el cual se alcanza una población mínima y cuantos individuos habrá. (4 puntos)
 (d) Haz un esbozo de la gráfica de la evolución poblacional $t \rightarrow P(t)$. (2 puntos)

3. Dados los planos

$$(I) 3x - ay + 2z - (a-1) = 0; \quad (II) 2x - 5y + 3z - 1 = 0; \quad (III) x + 3y - (a-1)z = 0;$$

- (a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a , no hay dos que sean paralelos. (4 puntos)
 (b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a . (6 puntos)

4. El peso de un grupo de personas sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

- (a) ¿Cuál es el porcentaje de personas con peso superior a 57 kg? (3 puntos)
 (b) ¿Cuál es el porcentaje de personas que pesan entre 50 y 57 kg? (4 puntos)
 (c) Si se escoge una persona al azar que está dentro del 70% de las personas que menos pesan, como máximo, ¿cuántos kilos habría de pesar? (3 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0; 1)$

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dada la ecuación matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

donde X es la matriz incógnita y

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Para que valores del parámetro a existe la matriz inversa de M? (1 punto)
 (b) Calcula la matriz inversa de M. (3 puntos)
 (c) Para $a = 2$, resuelve la ecuación matricial, si es posible. (3 puntos)
 (d) Para los valores de a para los cuales existe la matriz inversa de M, resuelve la ecuación matricial. (3 puntos)

(a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz M.

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & a \end{vmatrix} = -a - a^2 = 0 \Rightarrow -a(1+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1+a = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el determinante no es nulo y existe la matriz inversa de M.

(b) Calculamos la inversa de M para $a \neq 0$ y $a \neq -1$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^t)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}}{-a - a^2} = \frac{-1}{a + a^2} \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a + a^2} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Para $a = 2$ la matriz es $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y su inversa $M^{-1} = \frac{1}{2+4} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

$$M \cdot X + N = P \Rightarrow M \cdot X = P - N \Rightarrow X = M^{-1}(P - N) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(d) Siendo $a \neq 0$ y $a \neq -1$

$$X = M^{-1}(P - N) \Rightarrow X = \frac{1}{a + a^2} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{a + a^2} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a + a^2} \begin{pmatrix} -2a & -2a \\ 2a & 2a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a(1+a)} (2a) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{1+a} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

(a) Determina: el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las coordenadas de los máximos y mínimos y el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. (2 puntos)

(b) Haz un esbozo de la gráfica. (1 punto)

(c) Obtén los valores de A y B para los cuales (3 puntos)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

(d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$. (4 puntos)

(a) El dominio de la función son todos los valores reales excepto los que anulan el denominador. Dominio = $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

Para estudiar máximos, mínimos y como varía la función utilizamos la derivada.

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2-9} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-9)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Vemos cómo evoluciona la función antes, entre y después de $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$.

- En $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = \frac{8}{((-4)^2-9)^2} = \frac{8}{49} > 0$. La

función crece en $(-\infty, -3)$.

- En $(-3, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{2}{((-1)^2-9)^2} = \frac{2}{64} > 0$. La

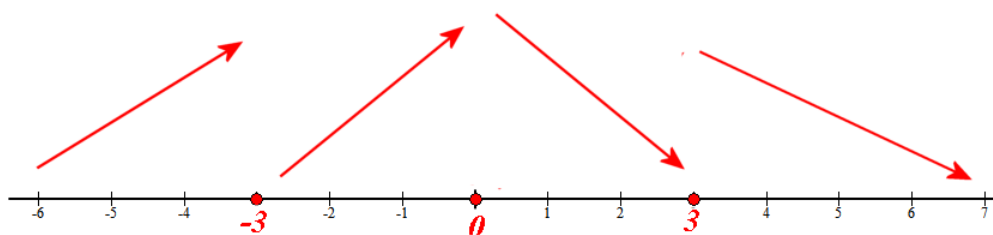
función crece en $(-3, 0)$.

- En $(0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-2}{(1^2-9)^2} = \frac{-2}{64} < 0$. La función

decrece en $(0, 3)$.

- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{-8}{(4^2-9)^2} = \frac{-8}{+} < 0$. La

función decrece en $(3, +\infty)$.



La función crece en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ y decrece en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

Presenta un máximo relativo en $x = 0$. $f(0) = \frac{1}{(0-3)(0+3)} = -\frac{1}{9}$.

El máximo relativo es el punto $M\left(0, -\frac{1}{9}\right)$

No presenta mínimos relativos, pues $x = -3$ y $x = 3$ no pertenecen al dominio de la función.

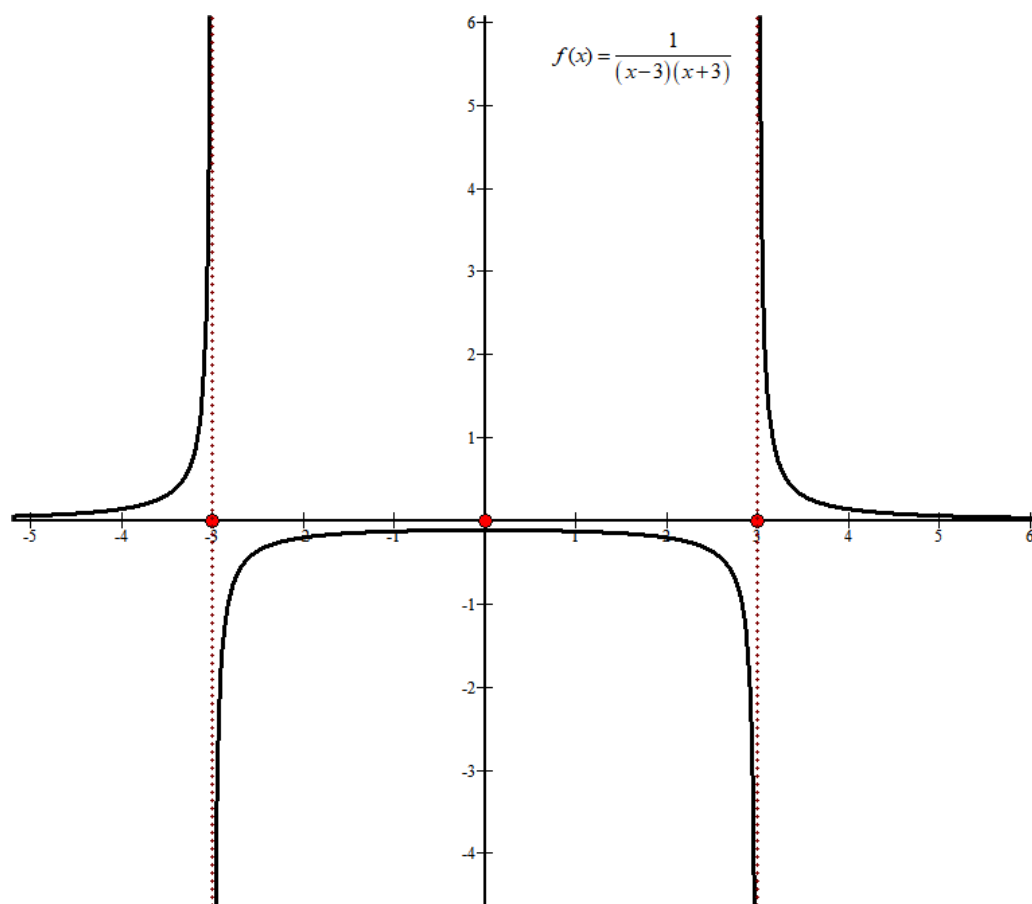
Y serán posibles asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

(b) Añadimos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y = \frac{1}{x^2 - 9}$
-10	0.01
-4	0.142
-2	-0.2
0	-0.1
2	-0.2
4	0.14



(c)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

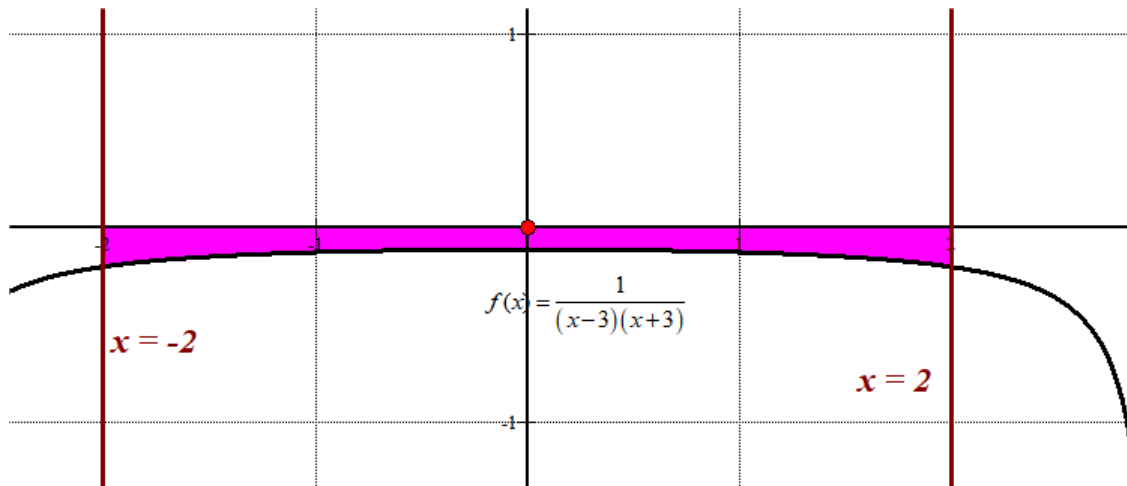
$$1 = A(x+3) + B(x-3)$$

$$x = -3 \rightarrow 1 = -6B \rightarrow B = -\frac{1}{6}$$

$$x = 3 \rightarrow 1 = 6A \rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1/6}{x-3} + \frac{-1/6}{x+3}$$

(d) El área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 2 de la función, pues toma valores negativos en este intervalo.



El área toma un valor pequeño como se observa en el dibujo superior.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 \frac{1}{(x-3)(x+3)} dx = \int_{-2}^2 \frac{1/6}{x-3} + \frac{-1/6}{x+3} dx = \int_{-2}^2 \frac{1/6}{x-3} dx - \int_{-2}^2 \frac{1/6}{x+3} dx = \\ &= \left[\frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| \right]_{-2}^2 = \left[\frac{1}{6} \ln|2-3| - \frac{1}{6} \ln|2+3| \right] - \left[\frac{1}{6} \ln|-2-3| - \frac{1}{6} \ln|-2+3| \right] = \\ &= \left[\frac{1}{6} \ln 1 - \frac{1}{6} \ln 5 \right] - \left[\frac{1}{6} \ln 5 - \frac{1}{6} \ln 1 \right] = -\frac{2}{6} \ln 5 = -\frac{1}{3} \ln 5 \approx -0.36 \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{1}{3} \ln 5 = 0.36$ unidades cuadradas.

3. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

- (a) Calcula un vector posición y un vector director de cada una. (4 puntos)
 (b) Calcula la ecuación vectorial de cada una. (2 puntos)
 (c) Calcula el rango de la matriz formada por los dos vectores directores y el vector diferencia, o vector resta, de los dos vectores posición obtenidos. (2 puntos)
 (d) Del anterior rango, deduce la posición relativa de ambas rectas. (2 puntos)

(a) Calculamos los vectores directores realizando el producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen las rectas.

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_I = (15, 12, -14) \times (8, -1, -5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 15 & 12 & -14 \\ 8 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -60i - 112j - 15k - 96k + 75j - 14i = -74i - 37j - 111k = (-74, -37, -111)$$

$$\vec{v}_I = (-74, -37, -111) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido las coordenadas entre } -37 \\ \text{y obtenemos un vector director con} \\ \text{coordenadas más manejables.} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_I = (2, 1, 3)$$

$$(II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{II} = (9, 5, -2) \times (24, -2, -13) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 5 & -2 \\ 24 & -2 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -65i - 48j - 18k - 120k + 117j - 4i = -69i + 69j - 138k$$

$$\vec{v}_{II} = (-69, 69, -138) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido las coordenadas entre } -69 \\ \text{y obtenemos un vector director con} \\ \text{coordenadas más manejables.} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_{II} = (1, -1, 2)$$

Obtenemos un punto de cada recta dando un valor concreto a la incógnita z.

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -17 + 14z \\ 8x - y = 23 + 5z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -17 + 14z \\ 96x - 12y = 276 + 60z \end{cases}$$

$$\hline 111x = 259 + 74z \Rightarrow 3x = 7 + 2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{7+2z}{3} \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{9}{3} = 3} \Rightarrow 24 - y - 5 = 23 \Rightarrow 24 - 23 - 5 = y \Rightarrow \boxed{y = -4}$$

$$(II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 5y = 5 + 2z \\ 24x - 2y = 67 + 13z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x + 10y = 10 + 4z \\ 120x - 10y = 335 + 65z \end{cases}$$

$$\hline 138x = 345 + 69z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 5 + z \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{5+z}{2} \\ z = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{0}{3} = 0} \Rightarrow 0 - 2y + 65 = 67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 65 - 67 = 2y \Rightarrow -2 = 2y \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

Los vectores y los puntos de cada recta son $\vec{u}_I = (2, 1, 3)$; $\vec{u}_{II} = (1, -1, 2)$; $P_I(3, -4, 1)$; $P_{II}(0, -1, -5)$

(b)

$$(I) \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = -5 + 2\alpha \end{cases}$$

(c)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_I = (2, 1, 3) \\ \vec{u}_{II} = (1, -1, 2) \\ \overrightarrow{P_I P_{II}} = (0, -1, -5) - (3, -4, 1) = (-3, 3, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

¿Esta matriz tiene rango 3?

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 6 + 9 - 9 + 6 - 12 = 0$$

No tiene rango 3. ¿Tiene rango 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

con determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$.

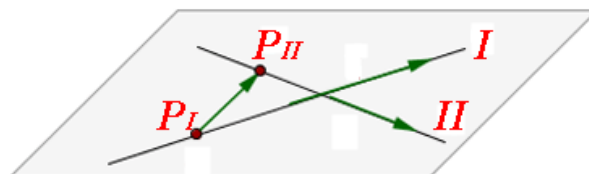
El rango de la matriz es 2.

(d) Al ser 2 el rango de la matriz de los vectores directores de las rectas y el del vector que une un punto de una recta con un punto de la otra se deduce que las rectas están en un mismo plano.

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_I = (2, 1, 3) \\ \vec{u}_{II} = (1, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{3}{2}$$

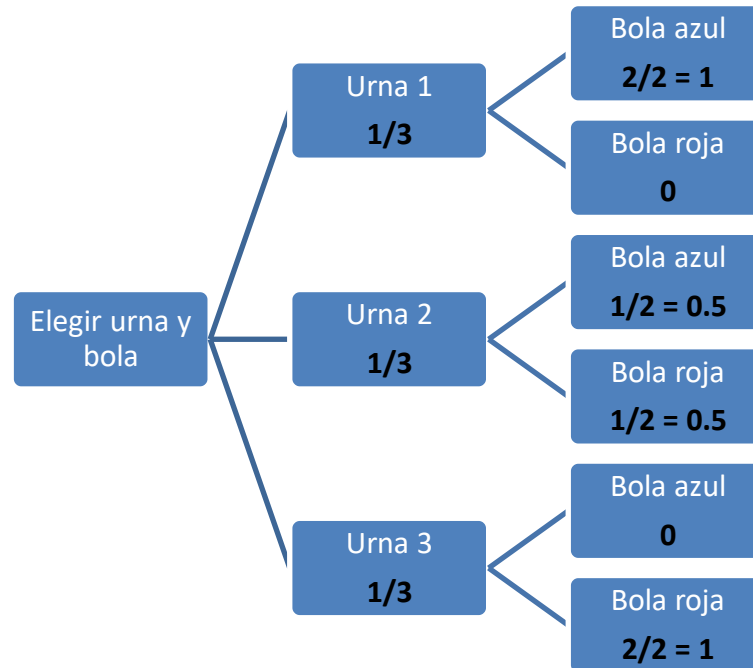
por lo que no son paralelas y entonces deben cortarse en un punto. Las rectas son secantes.



4. Tenemos tres urnas, la primera contiene 2 bolas azules; la segunda, 1 bola azul y 1 roja; la tercera, 2 bolas rojas. Hagamos el experimento aleatorio "Elegimos una urna al azar y extraemos una bola"
- Supone que todas las urnas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.
- (a) Calcula la probabilidad del suceso $R = \text{"bola extraída roja"}$ (5 puntos).
- (b) Si la bola extraída resulta que es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la urna escogida haya sido la tercera? (5 puntos)

Si tenemos la misma probabilidad de elegir a cualquiera de las urnas, la probabilidad de elegir la urna es $1/3$.

Realizamos un diagrama de árbol.



(a) Este suceso se cumple en tres ramas del árbol con las probabilidades que ahora sumamos.

$$\begin{aligned}
 P(R) &= P(\text{Elegir urna 1})P(\text{Sacar bola roja} / \text{Elegir urna 1}) + \\
 &+ P(\text{Elegir urna 2})P(\text{Sacar bola roja} / \text{Elegir urna 2}) + \\
 &+ P(\text{Elegir urna 3})P(\text{Sacar bola roja} / \text{Elegir urna 3}) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1.5}{3} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}
 \end{aligned}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Haber elegido urna 3}^a / \text{Hemos sacado bola roja}) &= \\
 &= \frac{P(\text{Haber elegido urna 3}^a \cap \text{Hemos sacado bola roja})}{P(\text{Sacar bola roja})} = \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{0.5} = \boxed{\frac{2}{3} = 0.66}
 \end{aligned}$$

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices A y B,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) calcula $A \cdot B$ y $(A \cdot B)^t$, donde la “t” indica matriz traspuesta. (4 puntos)
 (b) ¿es posible calcular B^2 ? Si lo es, calcúlala. (1 punto)
 (c) para los diferentes valores de x, calcula el rango de la matriz A. (5 puntos)

(a)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+x & 4+3+0 \\ 4+0+8 & 8+6+0 \\ 6+0+12 & 12+9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+x & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 2+x & 12 & 18 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{¿Es posible?}$$

$\xrightarrow{3 \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \times 2}$ ¡No es posible!

Para que una matriz se pueda multiplicar por ella misma debe de tener el mismo número de filas que de columnas (debe ser cuadrada).

(c) La matriz A es de dimensión 3×3 . Su rango es 3 o menor.

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 144 + 144 + 36x - 36x - 144 - 144 = 0$$

El determinante siempre es 0 y el rango de A nunca es 3, independientemente del valor de “x”.

¿El rango de A es 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª (es proporcional a la 2ª) y

columna 1ª (es proporcional a la 2ª) $\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 6x = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Este menor tiene determinante nulo cuando $x = 4$.

Cuando $x = 4$ el rango de A es 1.

Cuando $x \neq 4$ el determinante del menor anterior es no nulo y el rango de A es 2.

2. En un acuario, el estudio de la evolución de la población de peces se ha modelado según la función $t \rightarrow P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t},$$

donde la variable t , que es un número real mayor o igual que cero, medirá el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000 y $P(t)$ indica número de individuos, en millares, en el instante de tiempo t . Según el modelo, calcula:

- (a) La población que había el 1 de enero del año 2000 y la población que habrá al final del año 2020. (1 punto)
 (b) El tamaño de la población (en número de individuos) a largo plazo. (3 puntos)
 (c) El año en el cual se alcanza una población mínima y cuantos individuos habrá. (4 puntos)
 (d) Haz un esbozo de la gráfica de la evolución poblacional $t \rightarrow P(t)$. (2 puntos)

(a) Nos piden el valor de $P(0)$ y el valor de $P(20)$.

$P(0) = \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$. Significa que había 1000 peces al inicio del año 2000.

$P(20) = \sqrt{20+1} - \sqrt{20} = 0,1104$. Significa que había 110 peces a final del año 2020.

(b) A largo plazo es determinar el límite de la función $P(t)$ cuando t se acerca a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \infty - \infty = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{t+1} - \sqrt{t})(\sqrt{t+1} + \sqrt{t})}{(\sqrt{t+1} + \sqrt{t})} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{t+1})^2 - (\sqrt{t})^2}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1-t}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \frac{1}{+\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

La población de peces tiende a ser cero. Tiende a desaparecer.

(c) Utilizamos la derivada.

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t+1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+1}} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{2\sqrt{t^2+t}} \\ P'(t) &= 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{2\sqrt{t^2+t}} = 0 \Rightarrow \sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{t} = \sqrt{t+1} \Rightarrow (\sqrt{t})^2 = (\sqrt{t+1})^2 \Rightarrow t = t+1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ No es posible.} \end{aligned}$$

No hay ningún punto crítico y por tanto no hay máximo ni mínimo relativo de la función.

Vemos el signo de la derivada en un punto cualquiera y la derivada tendrá el mismo signo

$$\text{en cualquier otro punto. } t = 9 \rightarrow P'(9) = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{9+1}}{2\sqrt{9^2+9}} = -0.08 < 0.$$

Esta función siempre es decreciente, empezando con 1000 peces y decreciendo su número hasta acabar en 0 peces.

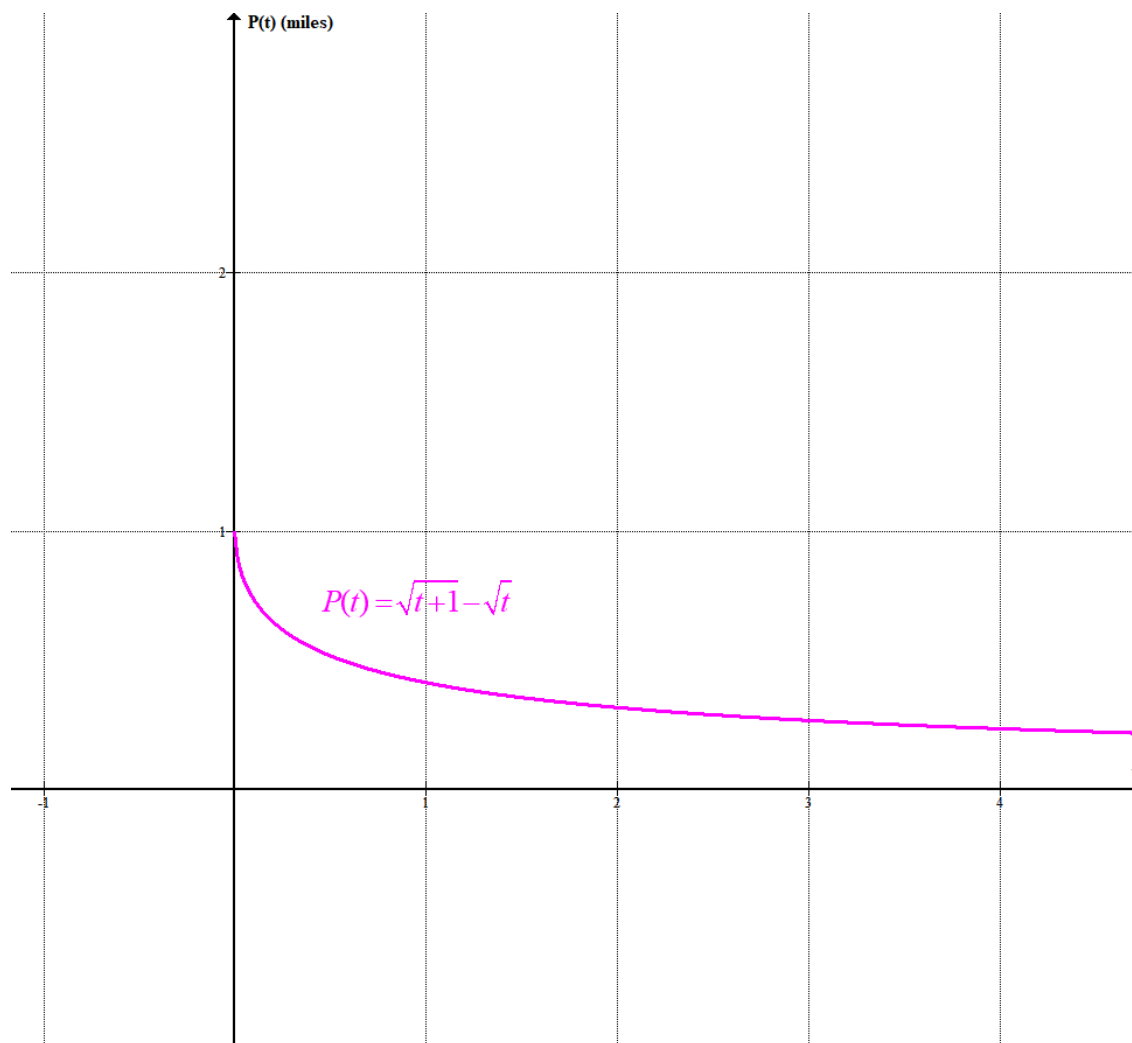
(d) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

Dominio = $[0, +\infty)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$$

No tiene máximos ni mínimos relativos.
La función siempre decrece.

t	$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$
0	1
1	$\sqrt{2} - 1 = 0.414$
3	$2 - \sqrt{3} = 0.268$
8	$3 - \sqrt{8} = 0.171$
99	$10 - \sqrt{99} = 0.05$



3. Dados los planos

$$(I) 3x - ay + 2z - (a - 1) = 0; \quad (II) 2x - 5y + 3z - 1 = 0; \quad (III) x + 3y - (a - 1)z = 0;$$

(a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a , no hay dos que sean paralelos. (4 puntos)

(b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a . (6 puntos)

(a) Para que sean paralelos deben tener los vectores normales con coordenadas proporcionales y por tanto, tener la misma dirección.

$$\left. \begin{aligned} (I) &\equiv 3x - ay + 2z - (a - 1) = 0 \Rightarrow \vec{n}_I = (3, -a, 2) \\ (II) &\equiv 2x - 5y + 3z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{II} = (2, -5, 3) \\ (III) &\equiv x + 3y - (a - 1)z = 0 \Rightarrow \vec{n}_{III} = (1, 3, -a + 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$¿I / II? \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{-a}{-5} = \frac{2}{3} ? \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{2}{3} ? \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

$$¿II / III? \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-5}{3} = \frac{3}{-a+1} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

$$¿I / III? \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{-a}{3} = \frac{2}{-a+1} ? \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{3}{1} = \frac{-a}{3} &\rightarrow 9 = -a \\ \frac{3}{1} = \frac{2}{-a+1} &\rightarrow -3a + 3 = 2 \rightarrow a = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Los planos nunca pueden ser paralelos entre sí, pues plano (I) no es paralelo a (II), el plano (II) nunca es paralelo a (III) y tampoco es paralelo el (I) con el (III).

(b) Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left\{ \begin{aligned} 3x - ay + 2z - (a - 1) &= 0 \\ 2x - 5y + 3z - 1 &= 0 \\ x + 3y - (a - 1)z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 3x - ay + 2z &= a - 1 \\ 2x - 5y + 3z &= 1 \\ x + 3y - (a - 1)z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

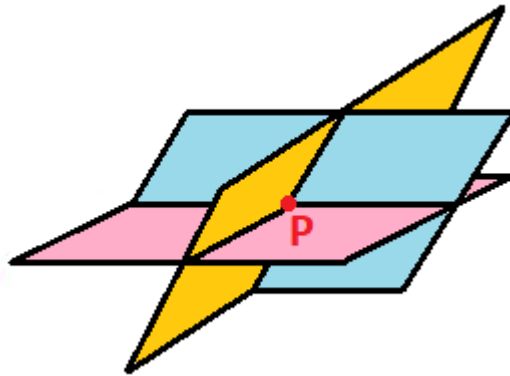
$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{vmatrix} = 15a - 15 - 3a + 12 + 10 - 2a^2 + 2a - 27 = -2a^2 + 14a - 20$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 + 14a - 20 = 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = a \\ \frac{7-3}{2} = 2 = a \end{cases}$$

Primer caso. $a \neq 2$ y $a \neq 5$.

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y el rango es 3, al igual que el rango de la ampliada y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado. Tiene una solución única. Esta solución única son las coordenadas de un punto P donde coinciden los tres planos.

**Segundo caso.** $a = 2$.

En esta situación el determinante es nulo y el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna } 3^a$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 4 = -11 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ¿Tiene rango 3?}$$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna $1^a \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 5 - 9 - 0 - 2 = 0.$$

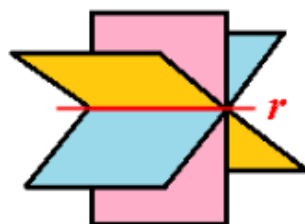
El rango de A/B no es 3, por lo que es igual al rango de A, que es 2.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones. Estas soluciones son la recta en la que coinciden los tres planos.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 3^a = \text{Ecuación } 1^a \\ \text{Quitamos la ecuación } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Coinciden en la recta de ecuación $r: \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$



Tercer caso. $a = 5$.

En esta situación el determinante es nulo y el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 10 = -5 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ ¿Tiene rango 3?}$$

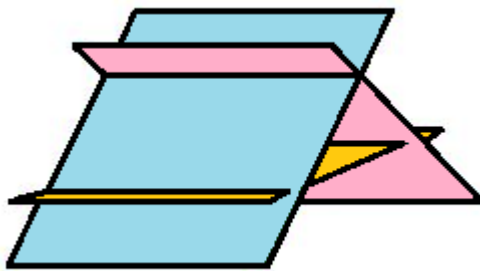
Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 80 - 36 - 0 - 20 = 30 \neq 0.$$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible. No tiene solución. Como entre ellos dos a dos no son paralelos la situación debe ser la del dibujo, definen rectas paralelas dos a dos.



4. El peso de un grupo de personas sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

(a) ¿Cuál es el porcentaje de personas con peso superior a 57 kg? (3 puntos)

(b) ¿Cuál es el porcentaje de personas que pesan entre 50 y 57 kg? (4 puntos)

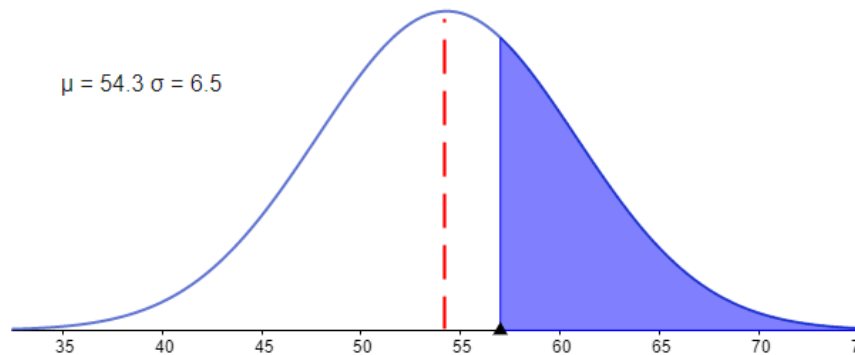
(c) Si se escoge una persona al azar que está dentro del 70% de las personas que menos pesan, como máximo, ¿cuántos kilos habría de pesar? (3 puntos)

X = Peso de una persona en kg. $X = N(54.3, 6.5)$

(a) Calculamos $P(X > 57)$

$$P(X > 57) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{57 - 54.3}{6.5}\right) = P(Z > 0.415) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.415) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - \frac{0.6591 + 0.6628}{2} = 1 - 0.66095 = \boxed{0.33905}$$



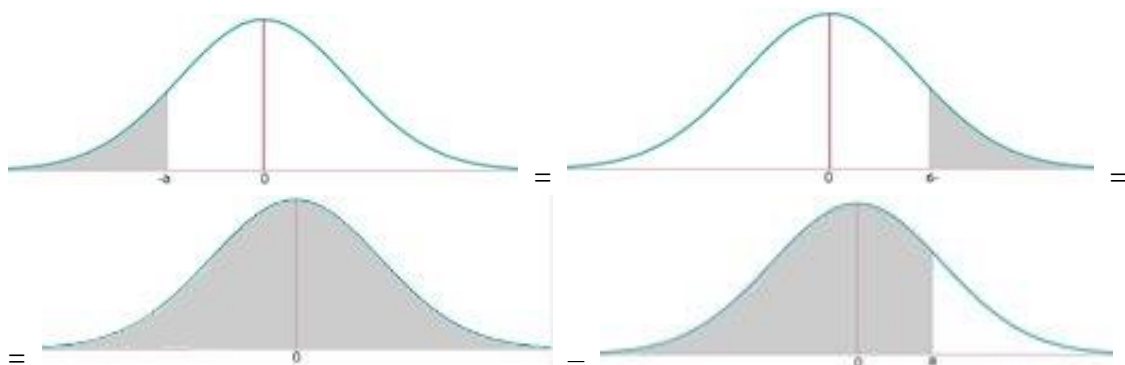
(b) Calculamos $P(50 < X < 57)$.

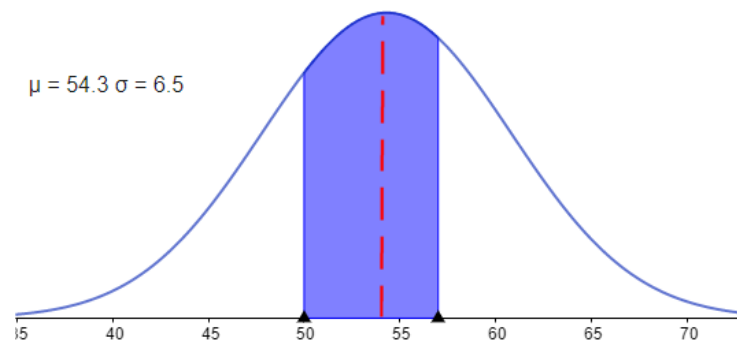
$$P(50 < X < 57) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{50 - 54.3}{6.5} < Z < \frac{57 - 54.3}{6.5}\right) =$$

$$= P(-0.66 < Z < 0.415) = P(Z \leq 0.415) - P(Z \leq -0.66) =$$

$$= P(Z \leq 0.415) - P(Z \geq 0.66) = P(Z \leq 0.415) - (1 - P(Z \leq 0.66)) =$$

$$= 0.66095 - 1 + 0.7454 = \boxed{0.40635}$$





(c) Averiguamos el peso “a” tal que $P(X \leq a) = 0.7$.

$$P(X \leq a) = 0.7 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 54.3}{6.5}\right) = 0.7$$

Buscamos en la tabla $N(0, 1)$ esta probabilidad 0.7

$$\frac{0.52 + 0.53}{2} = \frac{a - 54.3}{6.5} \Rightarrow 0.525 \cdot 6.5 = a - 54.3 \Rightarrow \boxed{a = 57.7125}$$

Debe pesar como mucho 57.7 kilos.

