



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Modelo 2

Conteste de forma clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las dos opciones, A y B, propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza el uso de las que puedan almacenar o transmitir información.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ ax + z = 0, \\ x + (1 + a)y + az = a + 1, \end{cases}$$

determina el parámetro a , y resuelva siempre que se pueda, de manera que el sistema:

- (a) tenga solución única, (4 puntos)
- (b) tenga infinitas soluciones, (4 puntos)
- (c) no tenga solución. (2 puntos)

2. Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$

- (a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. (2 puntos)
- (b) Haz un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$ y calcula: los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos y el comportamiento de la función en el infinito. (4 puntos)
- (c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función dada y la recta $y = 2$. (4 puntos)

3. Considera el punto $P = (2, -1, 1)$ y la recta r dada por

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} (r)$$

- (a) Calcula la expresión de la ecuación continua de la recta r . (2 puntos)
- (b) Calcula la ecuación del plano, π , perpendicular a la recta r que pasa por el punto P . (2 puntos)
- (c) Calcula el punto, Q , de intersección del plano π con la recta r . (3 puntos)
- (d) De todas las rectas que pasan por el punto $P = (2, -1, 1)$, calcula aquella que corta perpendicularmente a la recta r . (3 puntos)

4. El número de horas de vida de una cierta bacteria (tipo A) se distribuye según una normal de media 110 horas y desviación típica de 0,75 horas. Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar una bacteria:

- (a) su número de horas de vida sobrepase las 112,25 horas. (4 puntos)
 (b) su número de horas de vida sea inferior a 109,25 horas. (4 puntos)

De otra bacteria (tipo B) se sabe que el número de horas de vida se distribuye según una normal de media 110 horas, pero se desconoce su desviación típica. Experimentalmente se ha comprobado que la probabilidad de que una bacteria tipo B viva más de 125 horas es 0,1587. Calcula la desviación típica de la distribución del número de horas de vida de las bacterias tipo B. (2 puntos)

Modelo 2

OPCIÓN B

1. Una empresa tiene tres minas: A, B y C, i en cada una, el mineral extraído contiene los elementos químicos: níquel (Ni), cobre (Cu) e hierro (Fe), en diferente concentración. Las concentraciones son:

- Mina A: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
- Mina B: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
- Mina C: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

Para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro en total, ¿cuántas toneladas de mineral se han de extraer de cada mina?

- (a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado. (4 puntos)
 (b) Clasifica el sistema. (2 puntos)
 (c) Resuelve el sistema. (4 puntos)

2. Considera la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$.

- (a) Calcula su dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
 (b) Calcula una primitiva cualquiera de $f(x)$. (4 puntos)
 (c) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (3 puntos)

3. Dada la recta r y el plano π

$$(r) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad (\pi) \quad 3x - my + z = 1,$$

Busca si existe algún valor del parámetro m para el cual

- (a) el plano y la recta son paralelos. (4 puntos)
 (b) o bien, el plano contiene la recta. (3 puntos)
 (c) o bien, el plano y la recta se cortan exactamente en un punto. (3 puntos)
 En cada caso, si existe, calcúlalo.

4. Una empresa de fabricación de impresoras tiene dos centros de producción, la fábrica europea (E) y la fábrica asiática (A). El 1% de las impresoras de la fábrica E y el 3% de las impresoras de la fábrica A se producen con un defecto. El mercado de un determinado país se abastece de impresoras procedentes de la fábrica E en un 80%, mientras que el resto procede de la fábrica A.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora de este país tenga el defecto? (4 puntos)
 (b) Si el país tiene, aproximadamente, dos millones de impresoras fabricadas por esta empresa, ¿cuántas tendrán el defecto? (2 puntos)
 (c) Si se elige al azar una impresora de ese país y resulta ser una impresora defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica E? (4 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0; 1)$

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ ax + z = 0, \\ x + (1+a)y + az = a+1, \end{cases}$$

determina el parámetro a , y resuelva siempre que se pueda, de manera que el sistema:

- | | |
|---------------------------------|------------|
| (a) tenga solución única, | (4 puntos) |
| (b) tenga infinitas soluciones, | (4 puntos) |
| (c) no tenga solución. | (2 puntos) |

Discutimos el sistema y luego respondemos a lo planteado en cada apartado.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = 1 - a^2 - 1 - a = -a^2 - a$$

Vemos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - a = 0 \Rightarrow -a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones distintas.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a = 0$.

El determinante de A es 0 y su rango no es 3. Pero no lo vamos a discutir por rangos, dado que al sustituir el valor de $a = 0$ el sistema es muy sencillo de resolver.

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \\ x + y = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 1}^a = \text{Ecuación 3}^a \\ \text{Quito ecuación 3}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 0, \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

Sus soluciones son $\boxed{x = 1 - t; \quad y = t; \quad z = 0 \quad t \in \mathbb{R}}$

CASO 3. $a = -1$.

El sistema queda con unas ecuaciones muy sencillas de resolver. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ -x + z = 0, \\ x - z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a = - \text{Ecuación 3}^a \\ \text{Quitamos ecuación 3}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ -x + z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = x \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

Las soluciones son $\boxed{x=t; \quad y=1-t; \quad z=t \quad t \in \mathbb{R}}$

(a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema tiene solución única. Lo resolvemos por Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = 1 - a^2 - 1 - a = -a^2 - a \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+1 & 1+a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{-a^2 - a} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{-a^2 - a}{-a^2 - a} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{-a^2 - a} = 0$$

La solución es $\boxed{x=0; \quad y=1; \quad z=0}$

(b) Para $a=0$ y $a=-1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Resuelto en la discusión del sistema.

Las soluciones para $a=0$ son $\boxed{x=1-t; \quad y=t; \quad z=0 \quad t \in \mathbb{R}}$.

Para $a=-1$ las soluciones son $\boxed{x=t; \quad y=1-t; \quad z=t \quad t \in \mathbb{R}}$.

(c) Para ningún valor de a el sistema no tiene solución.

2. Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$

- (a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. (2 puntos)
- (b) Haz un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$ y calcula: los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos y el comportamiento de la función en el infinito. (4 puntos)
- (c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función dada y la recta $y = 2$. (4 puntos)

- (a) Calculamos el valor de la función y la derivada de la función en $x = -1$ y sustituimos en la fórmula de la ecuación de la recta tangente en $x = a \rightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2 \\ f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = 0(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

- (b) Puntos de corte con los ejes.

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^3 - 0 = 0$$

Un punto de corte es $O(0, 0)$.

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

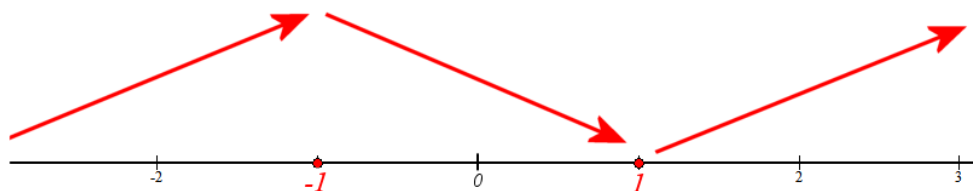
Otros dos puntos de corte con los ejes son $P(-\sqrt{3}, 0)$ y $Q(\sqrt{3}, 0)$

Extremos relativos.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 12 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, +1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, +1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 12 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.



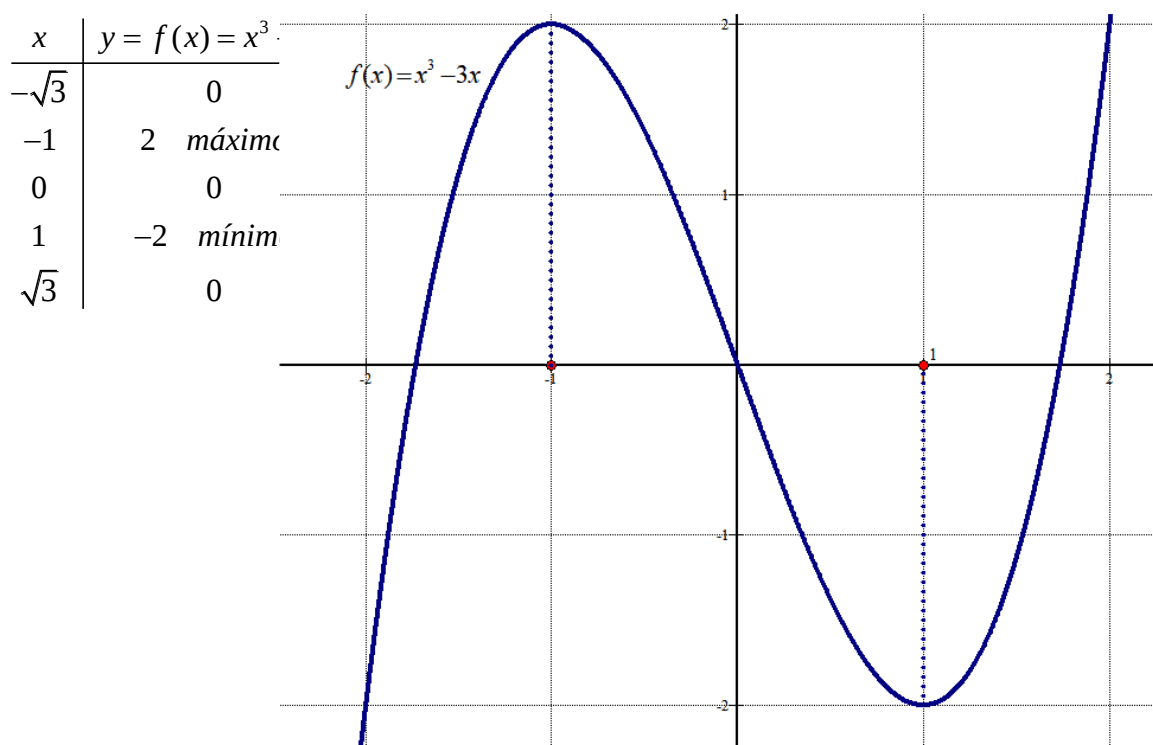
La función presenta un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

Comportamiento en el infinito.

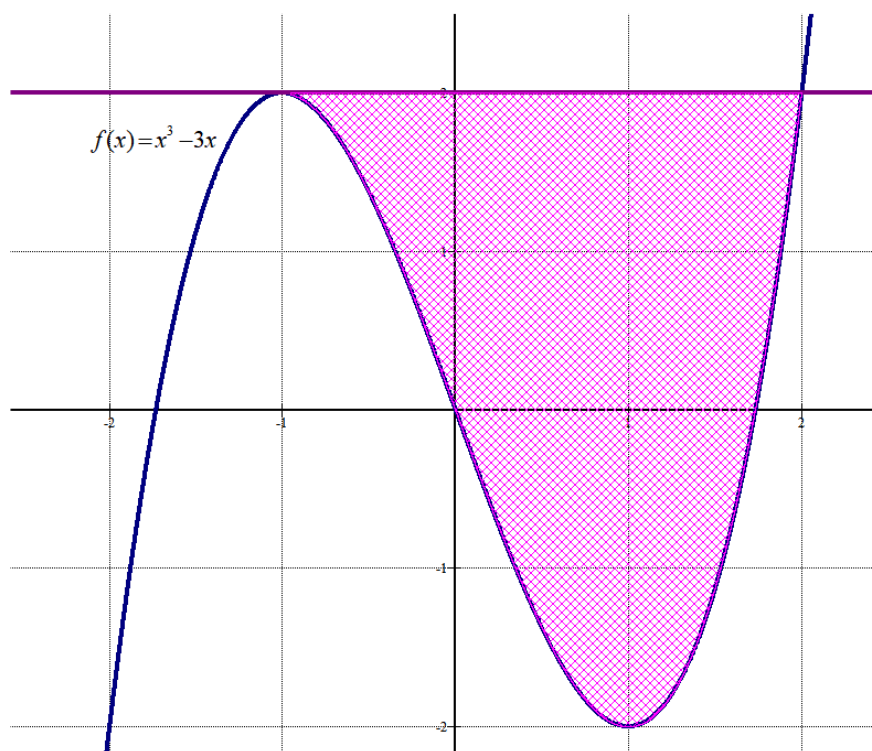
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x = -\infty$$

Añadimos una tabla de valores.



- (c) Si al dibujo de la gráfica le añadimos el de la recta horizontal $y = 2$ determinamos el recinto del cual nos piden calcular su área.



Aunque en la gráfica se observa que se cortan en $x = -1$ y en $x = 2$ hallamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = x^3 - 3x \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 3x = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \boxed{x = -1} \text{ es raíz}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2 = x} \text{ es raíz} \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Contando los cuadrados rayados del dibujo el área tiene un valor entre 6 y 7 u².
Hallamos su valor exacto con el uso de la integral definida entre -1 y 2 de $y = 2$ menos $y = f(x) = x^3 - 3x$.

$$\text{Área} = \int_{-1}^2 2 - (x^3 - 3x) dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 =$$

$$= \left[4 - \frac{16}{4} + 3\frac{4}{2} \right] - \left[2(-1) - \frac{(-1)^4}{4} + 3\frac{(-1)^2}{2} \right] =$$

$$= 4 - 4 + 6 + 2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{27}{4} = \boxed{6.75 \text{ u}^2}$$

3. Considera el punto $P = (2, -1, 1)$ y la recta r dada por

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} (r)$$

- (a) Calcula la expresión de la ecuación continua de la recta r . (2 puntos)
 (b) Calcula la ecuación del plano, π , perpendicular a la recta r que pasa por el punto P . (2 puntos)
 (c) Calcula el punto, Q , de intersección del plano π con la recta r . (3 puntos)
 (d) De todas las rectas que pasan por el punto $P = (2, -1, 1)$, calcula aquella que corta perpendicularmente a la recta r . (3 puntos)

- (a) Hallamos el vector director de la recta r como el producto vectorial de los vectores normales de cada plano que define la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} = (2, -3, 4) \\ \vec{n} = (1, 2, -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 9i + 4j + 4k + 3k + 6j - 8i = i + 10j + 7k = (1, 10, 7)$$

Hallamos un punto de la recta, resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x = -2y + 3z + 2 \end{cases} \Rightarrow 2(-2y + 3z + 2) - 3y + 4z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y + 6z + 4 - 3y + 4z - 1 = 0 \Rightarrow -7y + 10z + 3 = 0 \Rightarrow z = \frac{-3 + 7y}{10}$$

$$\text{Tomamos } y = -1 \Rightarrow z = \frac{-3 - 7}{10} = -1 \Rightarrow x = 2 - 3 + 2 = 1 \quad P_r(1, -1, -1)$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 10, 7) \\ P_r(1, -1, -1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{10} = \frac{z+1}{7}$$

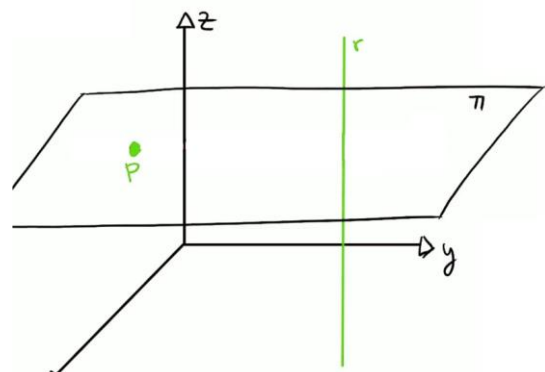
- (b) Si el plano π es perpendicular a la recta r entonces el vector normal del plano es el director de la recta.

$$\begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 10, 7) \\ P = (2, -1, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x + 10y + 7z + D = 0 \\ P = (2, -1, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 10 + 7 + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi \equiv x + 10y + 7z + 1 = 0$.



(c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 10y + 7z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{array} \right\} (r) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 10y + 7z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ x + 2y - 3z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x + 2y - 3z = 2 \\ -x - 10y - 7z = 1 \\ \hline -8y - 10z = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ -2x - 20y - 14z = 2 \\ \hline -23y - 10z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 10y + 7z = -1 \\ -23y - 10z = 3 \\ -8y - 10z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ -8y - 10z = 3 \\ 23y + 10z = -3 \\ \hline 15y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 10y + 7z = -1 \\ -23y - 10z = 3 \\ 15y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 10y + 7z = -1 \\ -23y - 10z = 3 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

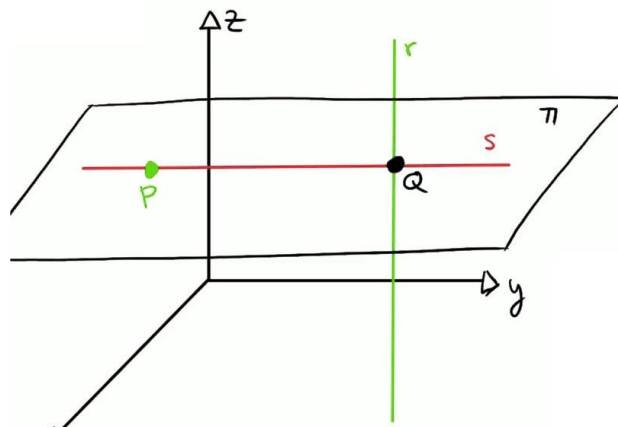
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 7z = -1 \\ -10z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 7z = -1 \\ z = \frac{3}{-10} \end{array} \right\} \Rightarrow x - \frac{21}{10} = -1 \Rightarrow x = -1 + \frac{21}{10} = \frac{11}{10}$$

El punto de corte tiene coordenadas $Q\left(\frac{11}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right)$

(d) La recta s perpendicular a r está contenida en el plano π . Por lo que la recta s pasa por Q punto de corte de recta y plano. Así la ecuación de la recta pedida es la ecuación de la recta que pasa por P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} Q\left(\frac{11}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right) \\ P(2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{11}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right) - (2, -1, 1) = \left(\frac{-9}{10}, 1, \frac{-13}{10}\right) \\ P(2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = 10\vec{v} = (-9, 10, -13) \\ P(2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 9\lambda \\ s \equiv y = -1 + 10\lambda \\ z = 1 - 13\lambda \end{array} \right\}$$



4. El número de horas de vida de una cierta bacteria (tipo A) se distribuye según una normal de media 110 horas y desviación típica de 0,75 horas. Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar una bacteria:

(a) su número de horas de vida sobrepase las 112,25 horas. (4 puntos)

(b) su número de horas de vida sea inferior a 109,25 horas. (4 puntos)

De otra bacteria (tipo B) se sabe que el número de horas de vida se distribuye según una normal de media 110 horas, pero se desconoce su desviación típica. Experimentalmente se ha comprobado que la probabilidad de que una bacteria tipo B viva más de 125 horas es 0,1587. Calcula la desviación típica de la distribución del número de horas de vida de las bacterias tipo B. (2 puntos)

X = Número de horas de vida de una bacteria tipo A. $X = N(110, 0.75)$

(a) Nos piden calcular $P(X > 112.25)$.

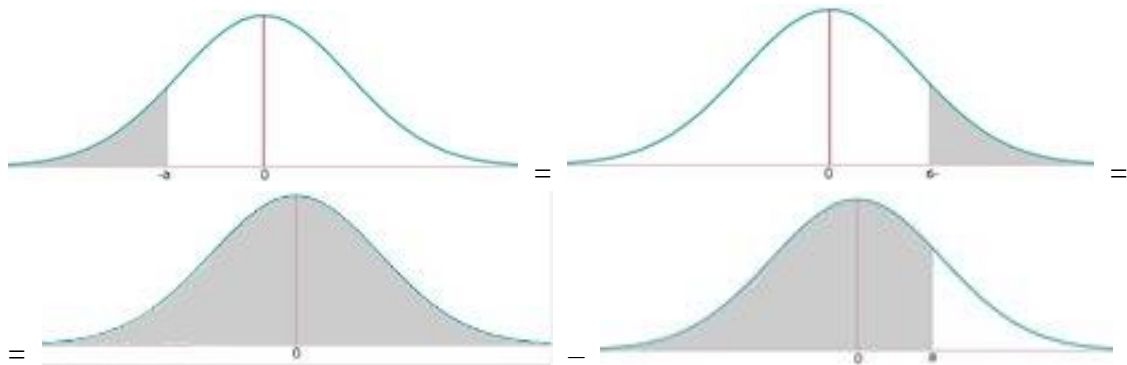
$$P(X > 112.25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{112.25 - 110}{0.75}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0.9987 = \boxed{0.0013}$$

(b) Nos piden calcular $P(X < 109.25)$.

$$P(X < 109.25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{109.25 - 110}{0.75}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$



La nueva distribución es Y = Número de horas de vida de una bacteria tipo B. $Y = N(110, \sigma)$. Sabemos que $P(Y > 125) = 0.1587$. Determinamos el valor de la desviación típica σ .

$$P(Y > 125) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{125 - 110}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{15}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{15}{\sigma}\right) = 0.1587 \Rightarrow P\left(Z < \frac{15}{\sigma}\right) = 1 - 0.1587 = 0.8413 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Miro en la tabla } N(0,1)\} \Rightarrow \frac{15}{\sigma} = 1 \Rightarrow \boxed{\sigma = 15}$$

Modelo 2

OPCIÓN B

1. Una empresa tiene tres minas: A, B y C, i en cada una, el mineral extraído contiene los elementos químicos: níquel (Ni), cobre (Cu) e hierro (Fe), en diferente concentración. Las concentraciones son:

- Mina A: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
- Mina B: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
- Mina C: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

Para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro en total, ¿cuántas toneladas de mineral se han de extraer de cada mina?

- (a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado. (4 puntos)
 (b) Clasifica el sistema. (2 puntos)
 (c) Resuelve el sistema. (4 puntos)

- (a) Llamamos “x” a las toneladas de mineral extraído de la mina A, “y” a las toneladas de mineral extraído de la mina B y “z” a las toneladas de mineral extraído de la mina C. Hacemos una tabla con los datos.

	Níquel	Cobre	Hierro
Mina A (x)	0,01x	0,02x	0,03x
Mina B (y)	0,02y	0,05y	0,07y
Mina C (z)	0,01z	0,03z	0,01z
TOTALES	0,01x + 0,02y + 0,01z	0,02x + 0,05y + 0,03z	0,03x + 0,07y + 0,01z

Como hay que obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro el sistema es:

$$\left. \begin{array}{l} 0,01x + 0,02y + 0,01z = 7 \\ 0,02x + 0,05y + 0,03z = 18 \\ 0,03x + 0,07y + 0,01z = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \\ 3x + 7y + z = 1600 \end{array}$$

- (b) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 18 + 14 - 15 - 4 - 21 = 37 - 40 = -3 \neq 0.$$

El rango de la matriz $A = 3 = \text{Rango de } A/B = \text{número de incógnitas}.$

El sistema tiene una única solución.

- (c) Lo resolvemos utilizando Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 700 \\ 2 & 5 & 3 & 1800 \\ 3 & 7 & 1 & 1600 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 700 & 2 & 1 \\ 1800 & 5 & 3 \\ 1600 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3500 + 9600 + 12600 - 8000 - 3600 - 14700}{-3} = \frac{-600}{-3} = 200$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 700 & 1 \\ 2 & 1800 & 3 \\ 3 & 1600 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1800 + 6300 + 3200 - 5400 - 1400 - 4800}{-3} = \frac{-300}{-3} = 100$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 700 \\ 2 & 5 & 1800 \\ 3 & 7 & 1600 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8000 + 10800 + 9800 - 10500 - 6400 - 12600}{-3} = \frac{-900}{-3} = 300$$

Debe extraer 200 toneladas de mineral de la mina A, 100 toneladas de la mina B y 300 toneladas de la mina C.

2. Considera la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$.

- (a) Calcula su dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
 (b) Calcula una primitiva cualquiera de $f(x)$. (4 puntos)
 (c) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (3 puntos)

- (a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

Para estudiar el crecimiento o decrecimiento utilizamos la derivada.

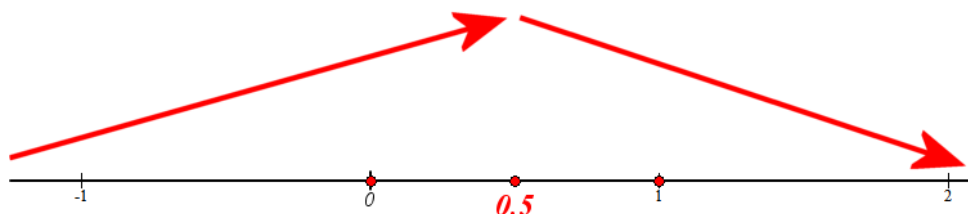
$$f(x) = \frac{3}{x^2 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - 3(2x - 1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{-6x + 3}{(x^2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-6x + 3}{(x^2 - x)^2} = 0 \Rightarrow -6x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{6} = 0.5$$

Tenemos a $x = 0.5$ como punto crítico, además tenemos $x = 0$ y $x = 1$ como excluidos del dominio. La recta real se divide en cuatro zonas. Vamos comprobando la monotonía en cada zona.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{9}{(1+1)^2} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, 0.5)$ tomamos $x = 0.25$ y la derivada vale $f'(0.25) = \frac{-1.5 + 3}{(1+1)^2} > 0$. La función crece en $(0, 0.5)$.
- En $(0.5, 1)$ tomamos $x = 0.75$ y la derivada vale $f'(0.75) = \frac{-4.5 + 3}{(1+1)^2} < 0$. La función decrece en $(0.5, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-12 + 3}{(2^2 - 2)^2} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (0, 0.5)$ y decrece en $(0.5, 1) \cup (1, +\infty)$



- (b) Calculamos la integral indefinida de la función usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{3}{x^2 - x} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{3}{x^2 - x} = \frac{3}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow 3 = A(x-1) + Bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 3 = -A \rightarrow A = -3 \\ x=1 \rightarrow 3 = B \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{x^2 - x} = \frac{-3}{x} + \frac{3}{x-1}$$

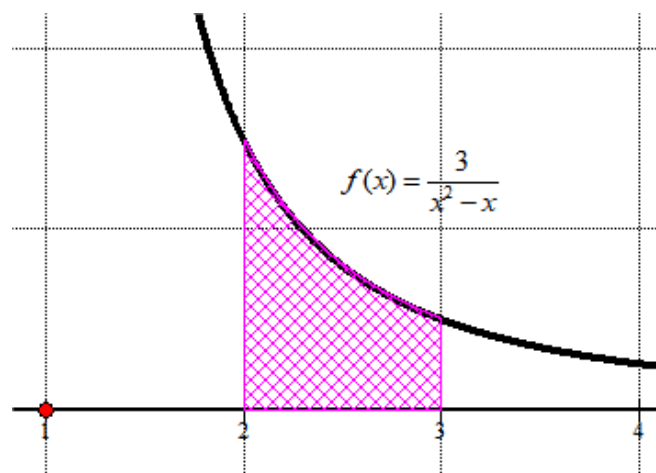
$$\dots = \int \frac{-3}{x} + \frac{3}{x-1} dx = -3 \ln|x| + 3 \ln|x-1| + C$$

(c) La función $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$ no corta el eje de abscisas, por lo que el área de la región pedida es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 2 y 3.

$$\int_2^3 \frac{3}{x^2 - x} dx = \left[-3 \ln|x| + 3 \ln|x-1| \right]_2^3 =$$

$$= \left[-3 \ln 3 + 3 \ln|3-1| \right] - \left[-3 \ln 2 + 3 \ln|2-1| \right] =$$

$$= -3 \ln 3 + 3 \ln 2 + 3 \ln 2 = \boxed{6 \ln 2 - 3 \ln 3 = 0.86 \text{ u}^2}$$



El área de la zona rayada no llega a ser un cuadradito (1 unidad cuadrada).

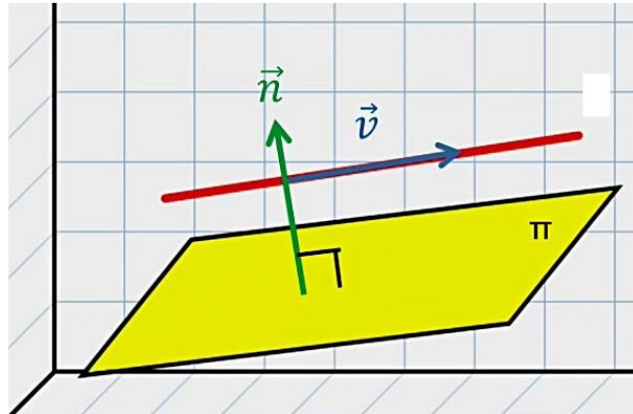
3. Dada la recta r y el plano π

$$(r) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad (\pi) \quad 3x - my + z = 1,$$

Busca si existe algún valor del parámetro m para el cual

- (a) el plano y la recta son paralelos. (4 puntos)
 (b) o bien, el plano contiene la recta. (3 puntos)
 (c) o bien, el plano y la recta se cortan exactamente en un punto. (3 puntos)
 En cada caso, si existe, calcúlalo.

- (a) Deseamos que plano y recta sean paralelos, por lo que el vector director de recta y el normal del plano deben ser ortogonales y su producto escalar debe ser cero.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (3, -m, 1) \\ \vec{v} = (2, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = (3, -m, 1)(2, 3, -1) = 0 \Rightarrow 6 - 3m - 1 = 0 \Rightarrow -3m = -5 \Rightarrow \boxed{m = \frac{5}{3}}$$

Comprobamos que la recta no está contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, -2) \in r \\ \text{¿} P_r \in \pi? \\ \pi \equiv 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 3 - \frac{5}{3}(-1) - 2 = 1? \Rightarrow \text{¿} 3 + \frac{5}{3} - 2 - 1 = 0? \Rightarrow \text{¿} \frac{5}{3} = 0?$$

Evidentemente el punto de la recta no está en el plano y por tanto no lo está ningún punto de la recta. Plano y recta son paralelos.

- (b) La recta nunca está contenida en el plano, pues para el único valor de m que hace que vector director de recta y normal del plano sean ortogonales incluye el hecho de que plano y recta son paralelos.

- (c) Plano y recta se cortan en un punto para cualquier valor de m distinto de $5/3$.

Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema para $m \neq \frac{5}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, -2) \\ \vec{v} = (2, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1 + 2\lambda) - m(-1 + 3\lambda) - 2 - \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$(\pi) \quad 3x - my + z = 1,$$

$$\Rightarrow 3 + 6\lambda + m - 3m\lambda - 2 - \lambda = 1 \Rightarrow 5\lambda - 3m\lambda = -m \Rightarrow (5 - 3m)\lambda = -m \Rightarrow$$

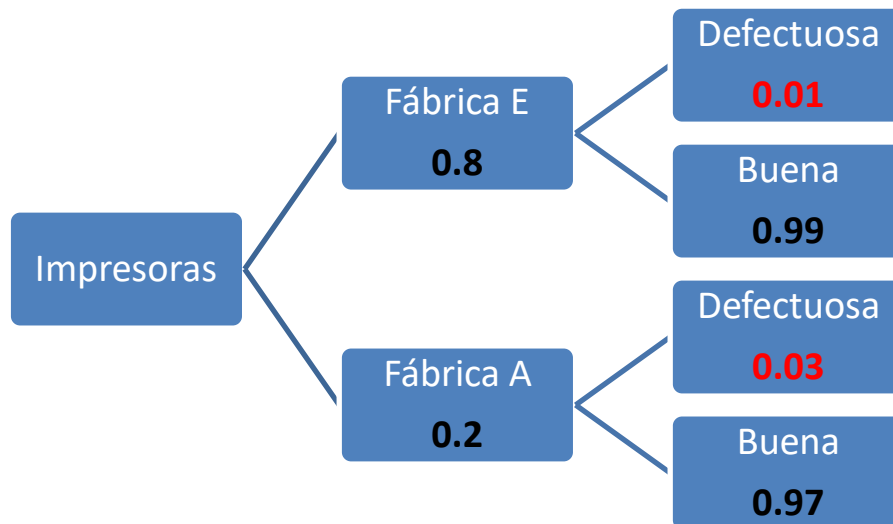
Como $5 - 3m \neq 0$, entonces puedo despejar $\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-m}{5 - 3m}$

sustituimos en las ecuaciones del principio.

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + 2 \frac{-m}{5 - 3m} = \frac{5 - 3m - 2m}{5 - 3m} = \frac{5 - 5m}{5 - 3m} \\ y &= -1 + 3 \frac{-m}{5 - 3m} = \frac{-5 + 3m - 3m}{5 - 3m} = \frac{-5}{5 - 3m} \\ z &= -2 - \frac{-m}{5 - 3m} = \frac{-10 + 6m + m}{5 - 3m} = \frac{-10 + 7m}{5 - 3m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P\left(\frac{5 - 5m}{5 - 3m}, \frac{-5}{5 - 3m}, \frac{-10 + 7m}{5 - 3m}\right)$$

4. Una empresa de fabricación de impresoras tiene dos centros de producción, la fábrica europea (E) y la fábrica asiática (A). El 1% de las impresoras de la fábrica E y el 3% de las impresoras de la fábrica A se producen con un defecto. El mercado de un determinado país se abastece de impresoras procedentes de la fábrica E en un 80%, mientras que el resto procede de la fábrica A.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora de este país tenga el defecto? (4 puntos)
- (b) Si el país tiene, aproximadamente, dos millones de impresoras fabricadas por esta empresa, ¿cuántas tendrán el defecto? (2 puntos)
- (c) Si se elige al azar una impresora de ese país y resulta ser una impresora defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica E? (4 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



- (a) Mirando en el diagrama de árbol superior y aplicando el teorema de probabilidad total.

$$P(\text{Una impresora sea defectuosa}) = 0.8 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.008 + 0.006 = \boxed{0.014}$$

- (b) $2000\ 000 \cdot 0.014 = 28\ 000$ impresoras serán defectuosas.

- (c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea de fábrica E} / \text{Es defectuosa}) = \frac{P(\text{Sea de fábrica E} \cap \text{Es defectuosa})}{P(\text{Sea defectuosa})} =$$

$$= \frac{0.8 \cdot 0.01}{0.014} = \frac{8}{14} = \boxed{\frac{4}{7} = 0.571}$$