



Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula los determinantes: $\det(A)$, $\det(B)$. (2 puntos)
- (b) Calcula la matriz producto $B \cdot A$, la matriz traspuesta $(B \cdot A)^t$. (3 puntos)
- (c) Para que se cumpla la relación $A \cdot X = B \cdot A$, ¿cuántas filas y columnas ha de tener la matriz X ? (2 puntos)
- (d) Calcula la matriz X que satisface la relación (3 puntos)

$$A \cdot X = B \cdot A$$

2. Una empresa fabrica tres tipos de bombilla: A, B y C. La bombilla tipo A tiene 10 puntos LED, la tipo B tiene 20 puntos LED y la tipo C tiene 50 puntos LED. El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas a diario es veces el número de bombillas de 50 puntos LED. A la empresa le interesa saber cuántas bombillas de cada tipo puede fabricar a diario.

- (a) Si $= 2$, y esta empresa usa, diariamente, 30000 puntos LED con los que fabrica 1300 bombillas:
 - (i) plantea el sistema de ecuaciones lineales de este problema. (3 puntos)
 - (ii) clasifica el sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, determina cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar. (4 puntos)
 - (b) Si $= 3$, y la empresa fabrica a diario 1000 bombillas; clasifica el sistema de ecuaciones lineales y determina el número de puntos LED necesarios. (2 puntos)
- En este caso, ¿cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar? (1 punto)

3. Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- (a) Estudia la continuidad de la función en los puntos $x_0 \neq 0$. (3 puntos)
- (b) Calcula la relación que ha de haber entre a y b para que f sea una función continua en el punto $x_0 = 0$. (5 puntos)
- (c) Si para los valores de $a = 2$ y $b = 1$, f es una función derivable en el punto $x = 0$, calcula $f'(0)$. (2 puntos)

4. El número de individuos de una población en un determinado instante de tiempo, t , expresado en millones de individuos, viene dado por la función

$$P(t) = \frac{15+t^2}{(t+1)^2}$$

donde la variable real $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000.

- (a) Calcula la población que había el 1 de enero del año 2000. (2 puntos)
- (b) Prueba de que el número de individuos de la población alcanza un mínimo. ¿Qué año se alcanza ese mínimo? ¿Cuántos individuos habrá el año del mínimo? (4 puntos)
- (c) Calcula el tamaño de la población, esto es el número de individuos, que habrá a largo plazo. (4 puntos)

5. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} y = x + 3, \\ z = 2x + 2, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} y = -\frac{1}{2}, \\ x = 2z + 3, \end{cases}$$

- (a) Calcula la ecuación vectorial de cada una de las rectas (I) y (II). (1 punto)
- (b) Si es posible, calcula el plano paralelo a la recta (II) que contiene a la recta (I). (3 puntos)
- (c) Calcula el plano perpendicular a la recta (II) que pasa por el punto $(-1, 0, 2)$. (3 puntos)
- (d) Calcula la recta de dirección perpendicular a las de las rectas (I) y (II) que pasa por el origen. (3 puntos)

6. Dados los puntos

$$P = (1, 0, 1), \quad Q = (1, 1, 0) \quad \text{y} \quad R = (0, 1, 1).$$

- (a) Comprueba que P, Q y R no están alineados. (2 puntos)
- (b) Calcula la ecuación vectorial del plano que determinan P, Q y R. (3 puntos)
- (c) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices P, Q y R. (3 puntos)
- (d) Calcula, de forma razonada, la condición que han de cumplir a, b y c para que los puntos P, Q, R y S = (a, b, c) pertenecen a un mismo plano. (2 puntos)

7. En una urna hay 12 bolas rojas, 8 bolas blancas y 5 bolas azules. Se realiza el experimento aleatorio de extraer dos bolas, consecutivamente y sin devolución en la urna. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (a) A = "las dos bolas son rojas" (2 puntos)
- (b) B = "las dos bolas son del mismo color" (3 puntos)
- (c) C = "al menos una bola es roja" (3 puntos)
- (d) D = "ninguna de las dos bolas es roja" (2 puntos)

8. La altura de las personas de una clase se distribuye según una normal de promedio 160 cm y desviación típica 10 cm. Calcula la probabilidad de que, elegida al azar una persona de la clase, su altura:

- (a) sobrepase los 170 cm. (3 puntos)
- (b) sea menor que 155 cm. (3 puntos)
- (c) esté comprendida entre 155 cm y 170 cm (4 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$

SOLUCIONES

1. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula los determinantes: $\det(A)$, $\det(B)$. (2 puntos)
 (b) Calcula la matriz producto $B \cdot A$, la matriz traspuesta $(B \cdot A)^t$. (3 puntos)
 (c) Para que se cumpla la relación $A \cdot X = B \cdot A$, ¿cuántas filas y columnas ha de tener la matriz X? (2 puntos)
 (d) Calcula la matriz X que satisface la relación (3 puntos)

$$A \cdot X = B \cdot A$$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = \boxed{-2}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 2 = \boxed{-17}$$

b)

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 6+0 \\ 2-5 & 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Si la matriz X tiene “m” filas y “n” columnas, tenemos que:

$$A \cdot X = B \cdot A$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

Para poder realizar el producto $A \cdot X$ debe ser $2 = m$, la matriz X debe tener 2 filas.

El resultado del producto de $A \cdot X$ es una matriz de orden $2 \times n$, como la matriz $B \cdot A$ es de dimensiones 2×2 , tenemos que $n = 2$. La matriz X debe tener 2 columnas.

La matriz X debe ser una matriz cuadrada de orden 2.

d) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B \cdot A \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot A$$

Hallamos la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial.

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7/2 & 1 \end{pmatrix}} = X$$

2. Una empresa fabrica tres tipos de bombilla: A, B y C. La bombilla tipo A tiene 10 puntos LED, la tipo B tiene 20 puntos LED y la tipo C tiene 50 puntos LED. El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas a diario es veces el número de bombillas de 50 puntos LED. A la empresa le interesa saber cuántas bombillas de cada tipo puede fabricar a diario.

(a) Si $\lambda = 2$, y esta empresa usa, diariamente, 30000 puntos LED con los que fabrica 1300 bombillas:

(i) plantea el sistema de ecuaciones lineales de este problema. (3 puntos)

(ii) clasifica el sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, determina cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar. (4 puntos)

(b) Si $\lambda = 3$, y la empresa fabrica a diario 1000 bombillas; clasifica el sistema de ecuaciones lineales y determina el número de puntos LED necesarios. (2 puntos)

En este caso, ¿cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar? (1 punto)

(a) Llamamos “x” al número de bombillas tipo A, “y” al número de bombillas tipo B y “z” al número de bombillas tipo C.

Extraemos de la información las ecuaciones.

“La bombeta tipus A té 10 punts LED, la tipus B té 20 punts LED, i la tipus C té 50 punts LED. Aquesta empresa usa, diàriament, 30000 punts LED” $\rightarrow$
 $10x + 20y + 50z = 30000$

“Aquesta empresa fabrica 1300 bombetes” $\rightarrow x + y + z = 1300$

“El nombre de bombetes de 10 punts LED fabricades diàriament és λ vegades el nombre de bombetes de 50 punts LED” $\rightarrow x = \lambda z$. Como $\lambda = 2$, entonces $x = 2z$

(i)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ 10x + 20y + 50z = 30000 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x = 2z \end{array} \right\}$$

(ii)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 5 + 0 - 2 + 2 + 0 = 1 \neq 0$$

Como su determinante es no nulo, el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado, tiene una única solución.

Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 1300 \\ 2z + 2y + 5z = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 1300 \\ 2y + 7z = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 1300 - 3z \\ 2y + 7z = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1300 - 3z) + 7z = 3000 \Rightarrow 2600 - 6z + 7z = 3000 \Rightarrow \boxed{z = 400} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2 \cdot 400 = 800} \\ \boxed{y = 1300 - 1200 = 100} \end{cases}$$

Se fabrican 800 bombillas tipo A, 100 de tipo B y 400 de tipo C.

(b) Si $\lambda = 3$, el número de bombillas es 1000 y el número de puntos LED es “n” el nuevo sistema de ecuaciones queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ 10x + 20y + 50z = n \\ x = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ x + 2y + 5z = \frac{n}{10} \\ x - 3z = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5 + 0 - 2 + 3 + 0 = 0$$

Como su determinante es nulo el rango de A no es 3.

El rango de A es 2 pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª tiene

$$\text{determinante no nulo} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 1 & 2 & 5 & n/10 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 3 que se

obtiene al quitar la columna primera y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 5 & n/10 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 6000 - 0 - 0 + \frac{3n}{10} = \frac{-60000 + 3n}{10}$$

$$\frac{-60000 + 3n}{10} = 0 \Rightarrow -60000 + 3n = 0 \Rightarrow n = 20000$$

Nos planteamos dos posibilidades:

Opción 1. Si $n = 20000$.

En este caso el menor de orden 3 de A/B tiene determinante nulo y el rango de A/B es 2, al igual que el rango de A, pero menor que el número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

Opción 2. Si $n \neq 20000$

En este caso el determinante del menor de orden 3 de la matriz ampliada es no nulo y el rango de la matriz ampliada es 3, como el rango de la matriz de coeficientes es 2, tenemos que los rangos son distintos, por lo que el sistema es incompatible y no tiene solución.

Lo resolvemos para $n = 20000$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ 10x + 20y + 50z = 20000 \\ x = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ x + 2y + 5z = 2000 \\ \boxed{x = 3z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3z + y + z = 1000 \\ 3z + 2y + 5z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 4z = 1000 \\ 2y + 8z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 4z = 1000 \\ y + 4z = 1000 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 4z = 1000 \Rightarrow \boxed{y = 1000 - 4z}$$

La solución es $x = 3z$; $y = 1000 - 4z$; $z = z$.

Tomando como partida el número de bombillas del tipo C (z) el número de bombillas de tipo A son el triple ($3z$) y las de tipo B son $1000 - 4z$.

Como el número de bombillas debe ser positivo tenemos que z no puede ser superior a 250 pues haría que el número de bombillas de tipo B fuese negativo.

El número de bombillas de tipo C no puede ser mayor de 250.

3. Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- (a) Estudia la continuidad de la función en los puntos $x_0 \neq 0$. (3 puntos)
- (b) Calcula la relación que ha de haber entre a y b para que f sea una función continua en el punto $x_0 = 0$. (5 puntos)
- (c) Si para los valores de $a = 2$ y $b = 1$, f es una función derivable en el punto $x = 0$, calcula $f'(0)$. (2 puntos)

(a) La función para $x \neq 0$ es $f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{2x}$ que es cociente de una función exponencial (continua) y de una polinómica (continua), como el denominador no se anula este cociente es continuo si $x \neq 0$.

(b) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{2x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax}}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{a}{2} \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = b \Rightarrow \boxed{a = 2b}$$

Para que la función sea continua en $x = 0$ el valor de “a” debe ser el doble del valor de “b”.

(c) Para $a = 2$ y $b = 1$ se cumple que $a = 2b$ por lo que la función es continua en $x = 0$.

$$\text{La función es } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{La derivada en } x \neq 0 \text{ es } f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot 2x - 2(e^{2x} - 1)}{(2x)^2} = \frac{4xe^{2x} - 2e^{2x} + 2}{4x^2} = \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{2x^2}$$

Calculamos el límite de esta derivada cuando x se acerca a 0 como el valor de $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{2x^2} = \frac{0-1+1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2e^{2x}} + 4xe^{2x} - \cancel{2e^{2x}}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xe^{2x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} = e^0 = \boxed{1} \end{aligned}$$

Se obtiene que $f'(0) = 1$.

4. El número de individuos de una población en un determinado instante de tiempo, t , expresado en millones de individuos, viene dado por la función

$$P(t) = \frac{15+t^2}{(t+1)^2}$$

donde la variable real $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000.

- (a) Calcula la población que había el 1 de enero del año 2000. (2 puntos)
 (b) Prueba de que el número de individuos de la población alcanza un mínimo. ¿Qué año se alcanza ese mínimo? ¿Cuántos individuos habrá el año del mínimo? (4 puntos)
 (c) Calcula el tamaño de la población, esto es el número de individuos, que habrá a largo plazo. (4 puntos)

(a) $P(0) = \frac{15+0^2}{(0+1)^2} = 15$. Había una población de 15 millones de personas.

(b) Derivamos e igualamos a cero.

$$P'(t) = \frac{2t(t+1)^2 - 2(t+1)(15+t^2)}{(t+1)^4} = \frac{(t+1)[2t(t+1) - 2(15+t^2)]}{(t+1)^4}$$

$$P'(t) = \frac{2t(t+1) - 2(15+t^2)}{(t+1)^3} = \frac{\cancel{2t^2} + 2t - 30 - \cancel{2t^2}}{(t+1)^3} = \frac{2t-30}{(t+1)^3}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2t-30}{(t+1)^3} = 0 \Rightarrow 2t-30 = 0 \Rightarrow \boxed{t=15}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de los 15 años.

- En $(0,15)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = \frac{2-30}{(1+1)^3} = -\frac{15}{8} < 0$. La función decrece en $(0,15)$.
- En $(15,+\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale $P'(20) = \frac{40-30}{(20+1)^3} = \frac{10}{9261} > 0$. La función crece en $(15,+\infty)$.

En $t = 15$ existe un mínimo de $P(t)$. $P(15) = \frac{15+15^2}{(15+1)^2} = 0.937500$.

A los 15 años hay un mínimo de población siendo esta de 937500 habitantes.

(c) Calculamos el límite de $P(t)$ cuando t se acerca a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15+t^2}{t^2+2t+1} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{2t}{t^2} + \frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15}{t^2} + 1}{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{\frac{15}{\infty} + 1}{1 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{0 + 1}{1 + 0 + 0} = \boxed{1}$$

La población tiende a ser 1 millón de personas.

5. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} y = x + 3, \\ z = 2x + 2, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} y = -\frac{1}{2}, \\ x = 2z + 3, \end{cases}$$

- (a) Calcula la ecuación vectorial de cada una de las rectas (I) y (II). (1 punto)
 (b) Si es posible, calcula el plano paralelo a la recta (II) que contiene a la recta (I). (3 puntos)
 (c) Calcula el plano perpendicular a la recta (II) que pasa por el punto $(-1, 0, 2)$. (3 puntos)
 (d) Calcula la recta de dirección perpendicular a las de las rectas (I) y (II) que pasa por el origen. (3 puntos)

(a)

$$(I) \begin{cases} y = x + 3, \\ z = 2x + 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \\ P_1(0, 3, 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I) \equiv (x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 2); \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(II) \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 2z + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\beta \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ Q_2\left(3, -\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (II) \equiv (x, y, z) = \left(3, -\frac{1}{2}, 0\right) + \beta(2, 0, 1); \beta \in \mathbb{R}$$

(b) Estudiamos la posición relativa de las rectas.

Como los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales entonces no son ni paralelas ni coincidentes.

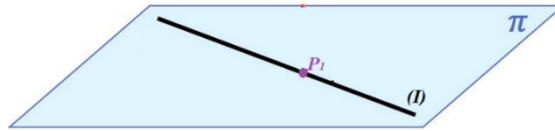
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \\ \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{2}{1}$$

Calculamos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{u}_2$ y $\overrightarrow{P_1Q_2}$.

$$\overrightarrow{P_1Q_2} = \left(3, -\frac{1}{2}, 0\right) - (0, 3, 2) = \left(3, -\frac{7}{2}, -2\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = \left(3, -\frac{7}{2}, -2\right) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -\frac{7}{2} & -2 \end{vmatrix} = 3 - 14 + 4 + \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan y es posible hallar el plano pedido.



Si el plano π es paralelo a la recta (II) entonces tiene como uno de sus vectores directores el director de la recta $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ y al contener a la recta (I) otro de sus vectores directores es el director de la recta (I) $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$ y pasa por el punto $P_1(0, 3, 2)$ de la recta (I).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \\ P_1(0, 3, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$y - 3 + 2z - 4 - 4y + 12 - x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0}$$

(c) Si el plano π' es perpendicular a la recta (II) entonces su vector normal es el director de la recta (II) $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ y pasa por $(-1, 0, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ (-1, 0, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + z + D = 0 \\ (-1, 0, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-1) + 2 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x + z = 0}$$

(d) Si la recta (III) es perpendicular a ambas rectas tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_3 = \vec{u}_2 \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -3, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_3 = (-1, -3, 2) \\ (0, 0, 0) \in (III) \end{array} \right\} \Rightarrow (III) \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -3\alpha, \text{ siendo } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

6. Dados los puntos

$$P = (1, 0, 1), \quad Q = (1, 1, 0) \quad \text{y} \quad R = (0, 1, 1).$$

- (a) Comprueba que P, Q y R no están alineados. (2 puntos)
 (b) Calcula la ecuación vectorial del plano que determinan P, Q y R. (3 puntos)
 (c) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices P, Q y R. (3 puntos)
 (d) Calcula, de forma razonada, la condición que han de cumplir a, b y c para que los puntos P, Q, R y S = (a, b, c) pertenecen a un mismo plano. (2 puntos)

(a) Hallamos los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. Comprobamos que no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (0, 1, -1) \\ \overrightarrow{PR} = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

Por lo tanto, los puntos no están alineados.

(b) El plano π tendrá como vectores directores a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, pasando por $P = (1, 0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (0, 1, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-1, 1, 0) \\ P(1, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 1 & -\beta \\ y = & \alpha + \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

(c) El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (0, 1, -1) \\ \overrightarrow{PR} = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

$$\text{Área } PQR = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

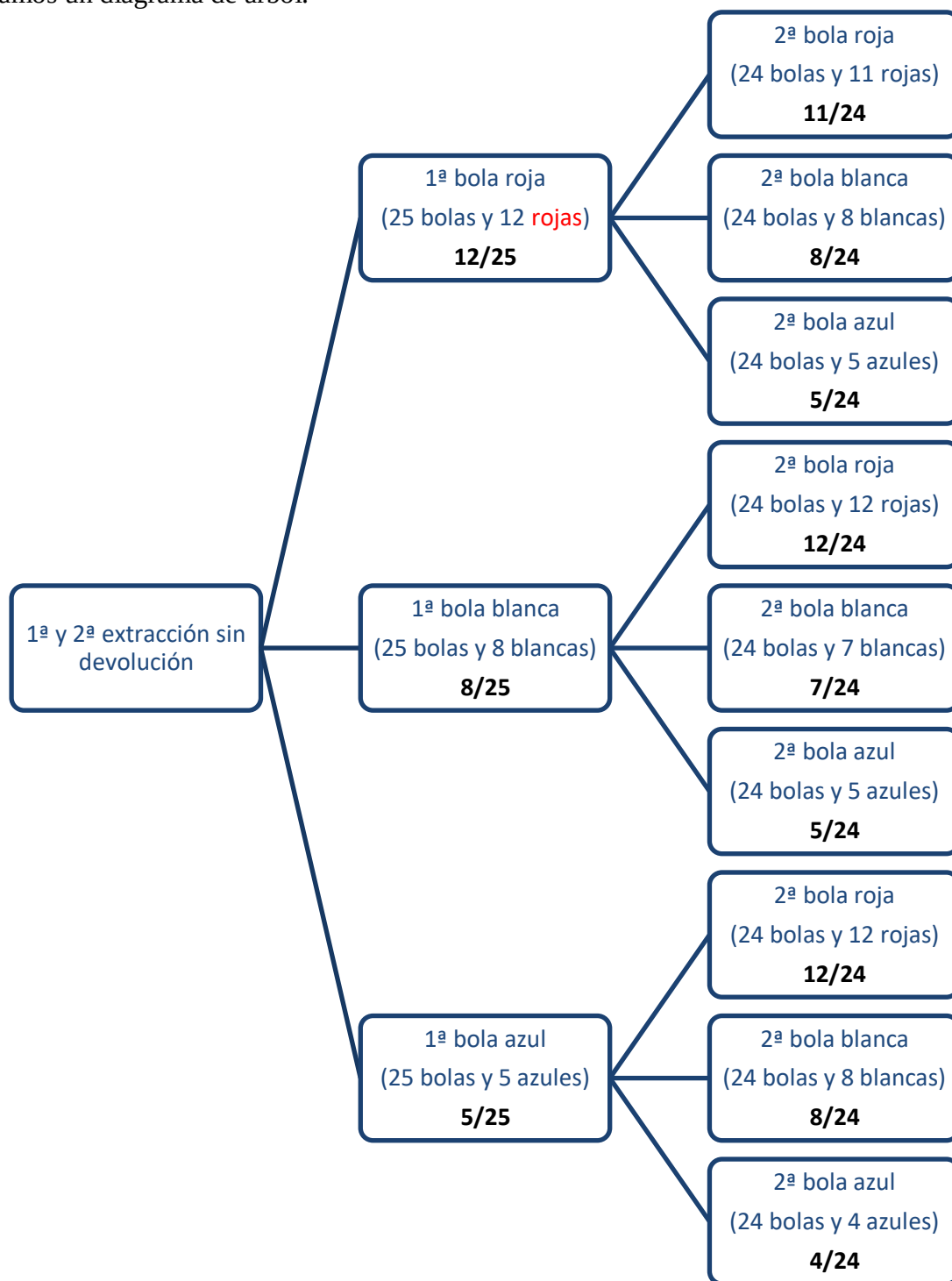
(d) Tenemos la ecuación $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$ del plano que contiene a los puntos P, Q y R, por lo que el punto S = (a, b, c) está en el mismo plano que los otros puntos cuando el punto S esta en el plano π y por lo tanto cumple su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z - 2 = 0 \\ S(a, b, c) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a + b + c - 2 = 0}$$

7. En una urna hay 12 bolas rojas, 8 bolas blancas y 5 bolas azules. Se realiza el experimento aleatorio de extraer dos bolas, consecutivamente y sin devolución en la urna. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (a) $A =$ "las dos bolas son rojas" (2 puntos)
 (b) $B =$ "las dos bolas son del mismo color" (3 puntos)
 (c) $C =$ "al menos una bola es roja" (3 puntos)
 (d) $D =$ "ninguna de las dos bolas es roja" (2 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos $R1$ y $R2$ a sacar una bola roja en 1ª y 2ª extracción respectivamente. Análogamente llamamos $B1$ y $B2$ a sacar blanca en 1ª y 2ª extracción. Y, por último, $A1$ y $A2$ a sacar azul en 1ª y 2ª extracción.

(a)

$$P(A) = P(R1 \cap R2) = P(R1)P(R2/R1) = \{\text{Miramos el diagrama de árbol}\} =$$

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \boxed{\frac{11}{50} = 0.22}$$

(b)

$$P(B) = P((R1 \cap R2) \cup (B1 \cap B2) \cup (A1 \cap A2)) =$$

$$= P(R1 \cap R2) + P(B1 \cap B2) + P(A1 \cap A2) =$$

$$= P(R1)P(R2/R1) + P(B1)P(B2/B1) + P(A1)P(A2/A1) =$$

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \boxed{\frac{26}{75} \approx 0.347}$$

(c)

$$P(C) = P((R1 \cap R2) \cup (R1 \cap B2) \cup (R1 \cap A2) \cup (B1 \cap R2) \cup (A1 \cap R2)) =$$

$$= P(R1 \cap R2) + P(R1 \cap B2) + P(R1 \cap A2) + P(B1 \cap R2) + P(A1 \cap R2) =$$

$$= P(R1)P(R2/R1) + P(R1)P(B2/R1) + P(R1)P(A2/R1) +$$

$$+ P(B1)P(R2/B1) + P(A1)P(R2/A1) =$$

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{8}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{12}{24} = \boxed{\frac{37}{50} = 0.74}$$

(d) Que ninguna de las dos bolas sea roja contempla muchos casos favorables, calculamos su probabilidad usando el suceso complementario que es “Al menos una bola es roja” que ya tenemos calculada su probabilidad en el apartado c).

$$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{37}{50} = \boxed{\frac{13}{50} = 0.26}$$

8. La altura de las personas de una clase se distribuye según una normal de promedio 160 cm y desviación típica 10 cm. Calcula la probabilidad de que, elegida al azar una persona de la clase, su altura:

- (a) sobrepase los 170 cm. (3 puntos)
 (b) sea menor que 155 cm. (3 puntos)
 (c) esté comprendida entre 155 cm y 170 cm (4 puntos)

X = Altura en cm de una persona. $X = N(160, 10)$

(a) Nos piden calcular $P(X > 170)$.

$$P(X > 170) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{170-160}{10}\right) = P(Z > 1) = \dots$$

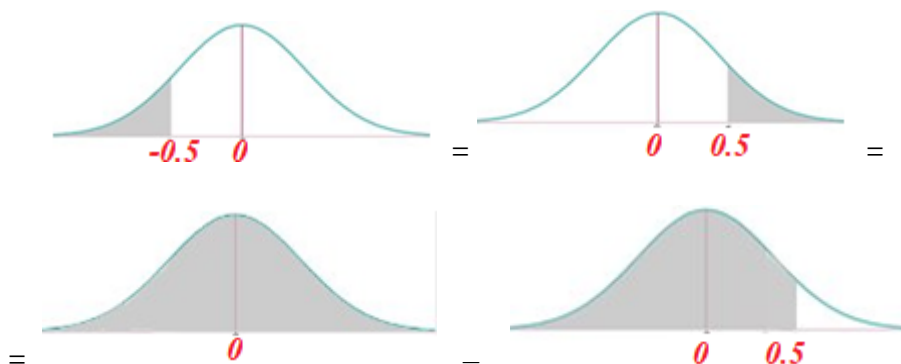


$$\dots = 1 - P(Z \leq 1) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

		0	
0.0	0.5000	0.	
0.1	0.5398	0.	
0.2	0.5793	0.	
0.3	0.6179	0.	
0.4	0.6554	0.	
0.5	0.6915	0.	
0.6	0.7257	0.	
0.7	0.7580	0.	
0.8	0.7881	0.	
0.9	0.8159	0.	
1.0	0.8413	0.	
1.1	0.8643	0.	
1.2	0.8849	0.	

(b) Nos piden calcular $P(X < 155)$.

$$P(X < 155) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{155-160}{10}\right) = P(Z < -0.5) = \dots$$



$$\dots = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

	0	
0.0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7

(c) Nos piden calcular $P(155 < X < 170)$.

$$P(155 < X < 170) = P(X < 170) - P(X < 155) = 1 - P(X \geq 170) - P(X < 155) =$$

$$= \{\text{calculado en los apartados a) y b)}\} = 1 - 0.1587 - 0.3085 = \boxed{0.5328}$$