



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2021

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

- (a) Estudia el rango de la matriz A según los valores de a . (6 puntos)
- (b) Determina para que valores de a la matriz A es invertible. (1 punto)
- (c) Para el valor de $a = -1$ calcula la solución, X , de la ecuación matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ puntos})$$

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula A^t , A^2 y A^{-1} , donde A^t es la matriz transpuesta y A^{-1} la inversa. (3 puntos)
- (b) Sea I la matriz identidad. Resuelve X de la ecuación

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ puntos})$$

- (c) Calcula todas las matrices B para las cuales se tiene que

$$A \cdot B = B \cdot A^t \quad (4 \text{ puntos})$$

3. Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

- (a) Representala gráficamente. (7 puntos)
- (b) Comprueba que $f(2) = f(-2)$. (1 punto)
- (c) Comprueba que no existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punto)
- (d) ¿Hay una contradicción con la conclusión del teorema de Rolle? (1 punto)

4. Dada la función

$$f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$$

- (a) Calcula una primitiva de $f(x)$. (5 puntos)
 (b) Calcula el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = \sqrt{5}$ i $x = \sqrt{6}$, y el eje X. (5 puntos)

5. Considera los puntos,

$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4)$$

- (a) Determina el valor del parámetro a para el cual los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo, con ángulo recto en el punto B. (3 puntos)
 (b) Para el valor de $a = -2$, calcula el área del triángulo de vértices A, B y C. (3 puntos)
 (c) Para el valor de $a = 5$, calcula el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)

6. Dadas las rectas

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}, \quad s: \begin{cases} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}.$$

- (a) Calcula el valor de m tal que se cortan en un punto. (7 puntos)
 (b) Calcula el punto de corte. (3 puntos)

7. Se dispone de dos urnas: U1 y U2.

En U1 hay: 4 bolas rojas y 5 bolas negras.

En U2 hay: 6 bolas rojas y 3 bolas negras.

Al azar se quita una bola de U1 y se introduce en U2, a continuación, se extrae al azar una bola de U2. Calcula la probabilidad de que:

- (a) salga una bola roja de U2. (3 puntos)
 (b) la bola extraída de U1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U2 también ha sido negra. (3 puntos)
 (c) salga al menos una bola roja. (4 puntos)

8. Una compañía aérea observó que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución normal de media 7,5 kg y desviación típica de 0,4 kg. Calcula la probabilidad de que, elegida una maleta al azar:

- (a) pese menos de 7,2 kg pero más de 7 kg. (4 puntos)
 (b) pese entre 7,8 kg y 8 kg. (3 puntos)
 (c) Si en un trayecto hay 90 maletas, ¿cuántas maletas es de esperar que pesen al menos 8,1 kg? (3 puntos)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0; 1)$

SOLUCIONES

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia el rango de la matriz A según los valores de a . (6 puntos)

(b) Determina para que valores de a la matriz A es invertible. (1 punto)

(c) Para el valor de $a = -1$ calcula la solución, X, de la ecuación matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ puntos})$$

(a) El rango de la matriz A es 3 o menos. Para que sea 3 su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^6 + a^2 + a^2 - a^4 - a^4 - a^2 = a^6 - 2a^4 + a^2 = a^2(a^4 - 2a^2 + 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2(a^4 - 2a^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \rightarrow \boxed{a = 0} \\ 0 \\ a^4 - 2a^2 + 1 = 0 \rightarrow a^2 = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \\ \rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1} \end{cases}$$

Tenemos 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $a = 0$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ su rango no es 3 pues tiene una columna con todo

ceros. Su rango es 2, pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila 1ª

tiene determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

El rango de A es 2.

CASO 3. $a = -1$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ su rango no es 3 pues su determinante es nulo.

Su rango es 1, pues la 2ª y 3ª fila son iguales y la 1ª y la 2ª son proporcionales.
El rango de A es 1.

CASO 4. $a = 1$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ su rango no es 3 pues su determinante es nulo. Su

rango es 1, pues las tres filas son iguales.
El rango de A es 1.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$ el rango de A es 3, si $a = 0$ el rango de A es 2 y si $a = \pm 1$ el rango de A es 1.

(b) A es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 \\ a = \pm 1 \end{cases}$$

La matriz tiene inversa cuando $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$

(c) Para $a = -1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esta matriz no tiene inversa. Resolvemos el sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2ª} = \text{Ecuación 3ª} \\ \text{Ecuación 1ª} = - \text{Ecuación 2ª} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{El sistema se reduce a una sola ecuación}\} \Rightarrow x - y - z = 0 \Rightarrow x = y + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula A^t , A^2 i A^{-1} , donde A^t es la matriz transpuesta y A^{-1} la inversa. (3 puntos)

(b) Sea I la matriz identidad. Resuelve X de la ecuación

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ puntos})$$

(c) Calcula todas las matrices B para las cuales se tiene que

$$A \cdot B = B \cdot A^t \quad (4 \text{ puntos})$$

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+1 \\ 2+2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Antes de calcular la inversa de A compruebo que su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Pasamos a calcular A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Despejamos la matriz X y luego realizamos las operaciones necesarias para obtener su expresión.

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow -2AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - I - A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX = -\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - I - A^2 \right] = -\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1+2 & -1+4 \\ 2-2 & 2-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

(c) Para poder realizar los productos de la ecuación $A \cdot B = B \cdot A^t$ la matriz B debe ser de

dimensión $2 \times 2 \rightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sustituimos en la ecuación matricial y la convertimos en un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= B \cdot A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = 2a+b \\ 2a+c = c+d \\ 2b+d = 2c+d \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} c = b \\ d = 2a \\ 2a = d \\ 2b = 2c \rightarrow b = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ d = 2a \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}}
 \end{aligned}$$

3. Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

- (a) Representala gráficamente. (7 puntos)
 (b) Comprueba que $f(2) = f(-2)$. (1 punto)
 (c) Comprueba que no existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punto)
 (d) ¿Hay una contradicción con la conclusión del teorema de Rolle? (1 punto)

(a) Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

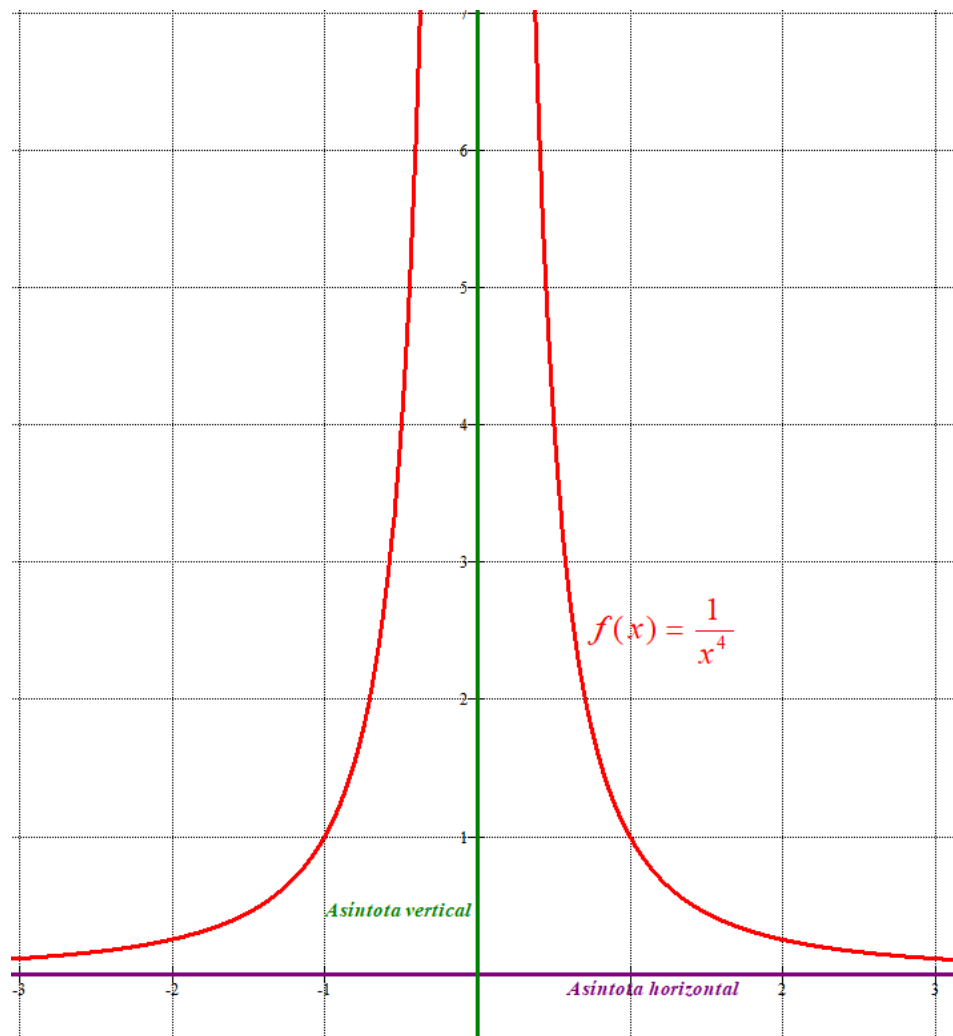
Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = \frac{1}{x^4}$
-2	0.0625
-1	1
-0.5	16
0.5	16
1	1
2	0.0625



(b)

$$f(x) = \frac{1}{x^4} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = \frac{1}{2^4} = 0.0625 \\ f(-2) = \frac{1}{(-2)^4} = 0.0625 \end{cases} \Rightarrow f(2) = f(-2) = 0.0625$$

(c) Observando la gráfica se comprueba que la función no tiene ningún $c \in [-2, 2]$ donde la derivada se anule, pues eso implicaría que en dicho valor la función ni crece ni decrece.

Si calculamos su derivada $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$. Esta expresión no se anula nunca, aunque si que cambia de signo en el intervalo $[-2, 2]$.

En la gráfica de la función se aprecia que es creciente ($f'(x) > 0$) en $(-2, 0)$ y decreciente ($f'(x) < 0$) en $(0, 2)$.

(d) El teorema de Rolle dice que si una función $f(x)$ es CONTINUA en $[a, b]$ y DERIVABLE en (a, b) y además es $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$.

Pero nuestra función $f(x) = \frac{1}{x^4}$ no es continua en $[-2, 2]$, pues es discontinua en $x = 0$, ni es derivable en $(-2, 2)$, pues no es derivable en $x = 0$. Por lo que no podemos aplicarle el teorema de Rolle y no existe ninguna contradicción.

4. Dada la función

$$f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$$

(a) Calcula una primitiva de $f(x)$. (5 puntos)

(b) Calcula el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = \sqrt{5}$ i $x = \sqrt{6}$, y el eje X.

(5 puntos)

$$(a) \quad F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{-x}{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |4-x^2| + K, \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

Estas es la expresión de todas las primitivas de $f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$.

Una de ellas resulta tomando $K = 0 \rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln |4-x^2|$

(b) Vemos si la función corta el eje X.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x}{4-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

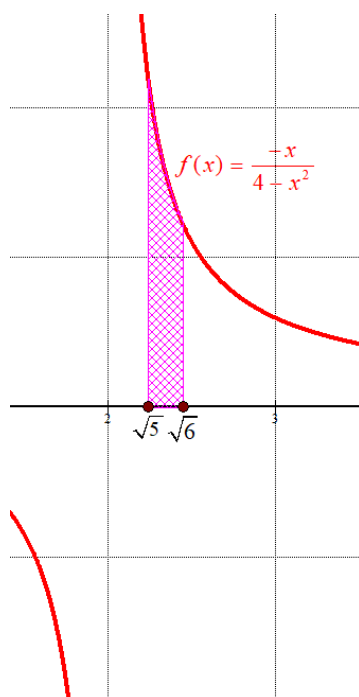
Pero $x = 0$ pertenece al intervalo $[\sqrt{5}, \sqrt{6}]$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre $x = \sqrt{5}$ y $x = \sqrt{6}$ de la función $f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$.

$$\text{Área} = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} f(x) dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{-x}{4-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |4-x^2| \right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln |4-(\sqrt{6})^2| \right] - \left[\frac{1}{2} \ln |4-(\sqrt{5})^2| \right] = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \boxed{\frac{\ln 2}{2} \approx 0.34 \text{ u}^2}$$

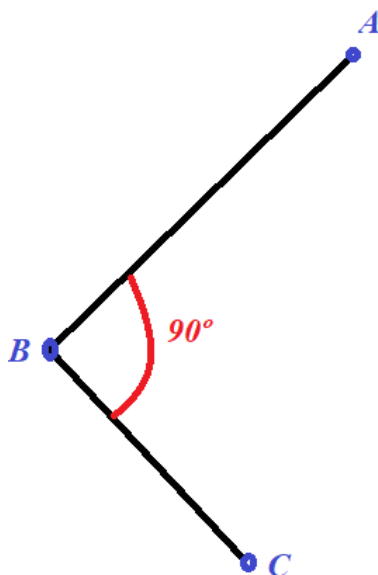
Lo comprobamos dibujando el recinto.



5. Considera los puntos,

$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4)$$

- (a) Determina el valor del parámetro a para el cual los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo, con ángulo recto en el punto B. (3 puntos)
- (b) Para el valor de $a = -2$, calcula el área del triángulo de vértices A, B y C. (3 puntos)
- (c) Para el valor de $a = 5$, calcula el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)



- (a) Debe cumplirse que los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean perpendiculares, es decir, su producto escalar sea cero.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= (5, a, 7) - (3, -1, 7) = (2, a+1, 0) \\ \overrightarrow{BC} &= (6, 5, 4) - (3, -1, 7) = (3, 6, -3) \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2, a+1, 0) \cdot (3, 6, -3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 6a + 6 = 0 \Rightarrow 6a = -12 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

- (b) Para $a = -2$ el punto A es $A = (5, -2, 7)$ y el triángulo es rectángulo en el vértice B.

El área del triángulo lo podemos hallar con el producto vectorial o hallando la longitud de la base y la de altura del triángulo.

Lo hacemos de esta última forma.

$$\overrightarrow{BA} = (2, -1, 0) \rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3, 6, -3) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{54}}{2} = \frac{\sqrt{270}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{30}}{2} \approx 8.21 u^2}$$

(c) Para $a = 5$ el punto A es $A = (5, 5, 7)$

Las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (3, -1, 7) - (5, 5, 7) = (-2, -6, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= (6, 5, 4) - (5, 5, 7) = (1, 0, -3) \end{aligned} \right\}$$

Aplicamos el producto escalar para determinar el ángulo entre ambos vectores.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow (-2, -6, 0)(1, 0, -3) = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 = \sqrt{40} \sqrt{10} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow -2 = 20 \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-2}{20} = -0.1 \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos(-0.1) \approx 95^\circ}$$

6. Dadas las rectas

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}, \quad s: \begin{cases} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$$

- (a) Calcula el valor de m tal que se cortan en un punto. (7 puntos)
 (b) Calcula el punto de corte. (3 puntos)

(a) Para que sean secantes las rectas deben tener distinta dirección y que el producto mixto de sus vectores directores y un vector que una un punto de una recta (r) con un punto de la otra recta (s) sea nulo.

Necesitamos un punto y el vector director de cada recta.

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(m, -10, -3) \\ \vec{v}_r = (-1, 4, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(1, 6, -1) \\ \vec{v}_s = (0, 4, 2) \end{cases}$$

¿Tienen r y s distinta dirección?

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 4, 1) \\ \vec{v}_s = (0, 4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{0} = \frac{4}{4} = \frac{1}{2} \text{? ¡No son ciertas!}$$

Al no tener coordenadas proporcionales los vectores directores no tienen la misma dirección y las rectas no son paralelas.

¿Son secantes o se cruzan?

$$\left. \begin{array}{l} P_r(m, -10, -3) \\ P_s(1, 6, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r P_s} = (1, 6, -1) - (m, -10, -3) = (1-m, 16, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 4, 1) \\ \vec{v}_s = (0, 4, 2) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (1-m, 16, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 8 - 8m - 4 + 4m + 32 = -4m + 28$$

Para que sean secantes debe cumplirse que $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = 0$

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = 0 \Rightarrow -4m + 28 = 0 \Rightarrow m = \frac{-28}{-4} = 7$$

- (b) El punto de corte se obtiene resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones con $m=7$.

$$r: \frac{x-7}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 7 - \alpha \\ y = -10 + 4\alpha \\ z = -3 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 - \alpha = 1 \\ -10 + 4\alpha = 6 + 4\lambda \\ -3 + \alpha = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 7 - 1 = 6} \\ -16 + 4\alpha = 4\lambda \\ -2 + \alpha = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 + 24 = 4\lambda \\ -2 + 6 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 4\lambda \\ 4 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 8 = 14 \\ z = -1 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1, 14, 3)}$$

El punto de corte de las rectas r y s es $A(1, 14, 3)$

7. Se dispone de dos urnas: U1 y U2.

En U1 hay: 4 bolas rojas y 5 bolas negras.

En U2 hay: 6 bolas rojas y 3 bolas negras.

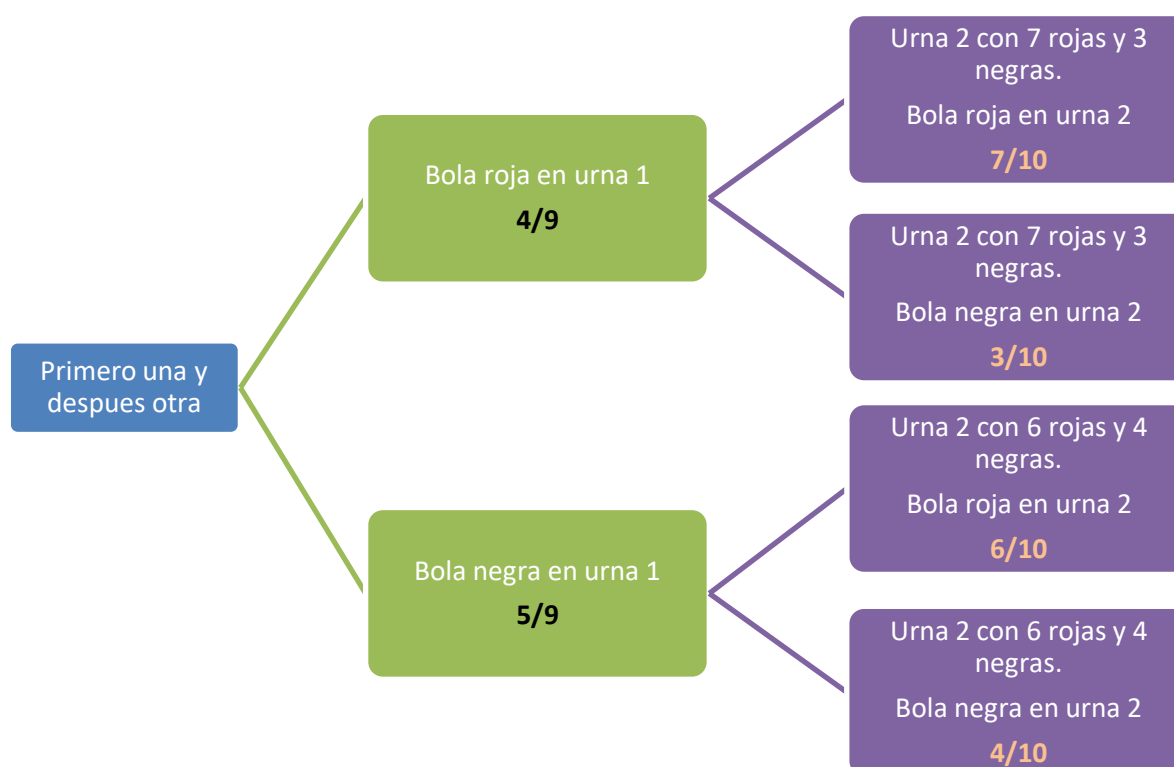
Al azar se quita una bola de U1 y se introduce en U2, a continuación, se extrae al azar una bola de U2. Calcula la probabilidad de que:

(a) salga una bola roja de U2. (3 puntos)

(b) la bola extraída de U1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U2 también ha sido negra. (3 puntos)

(c) salga al menos una bola roja. (4 puntos)

Tras sacar la bola de la urna 1 al introducirla en la urna 2 esta pasa a tener 10 bolas, pero dependiendo que haya salido roja o negra en la extracción en la urna 1 tendremos en la urna 2 o una bola roja más o una negra. Lo reflejamos en el diagrama de árbol siguiente.



Damos nombre a los distintos sucesos de este experimento.

$R1$ = "Sacar roja en urna 1", $N1$ = "Sacar negra en urna 1"

$R2$ = "Sacar roja en urna 2", $N2$ = "Sacar negra en urna 2"

(a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R2) = P(R1 \cap R2) + P(N1 \cap R2) = P(R1)P(R2/R1) + P(N1)P(R2/N1) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{58}{90} \approx 0.644$$

(b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/N2) = \frac{P(N1 \cap N2)}{P(N2)} = \frac{P(N1)P(N2/N1)}{1 - P(R2)} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10}}{1 - \frac{58}{90}} = \boxed{\frac{5}{8} = 0.625}$$

(c) El suceso “Sacar al menos una bola roja en las dos extracciones sucesivas” es el suceso contrario a “Sacar las dos bolas negras en las dos extracciones”.

$$P(N1 \cap N2) = P(N1)P(N2/N1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{9}$$

La probabilidad de sacar al menos una bola roja es $1 - \frac{2}{9} = \boxed{\frac{7}{9} \approx 0.78}$

8. Una compañía aérea observó que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución normal de media 7,5 kg y desviación típica de 0,4 kg. Calcula la probabilidad de que, elegida una maleta al azar:

(a) pese menos de 7,2 kg pero más de 7 kg. (4 puntos)

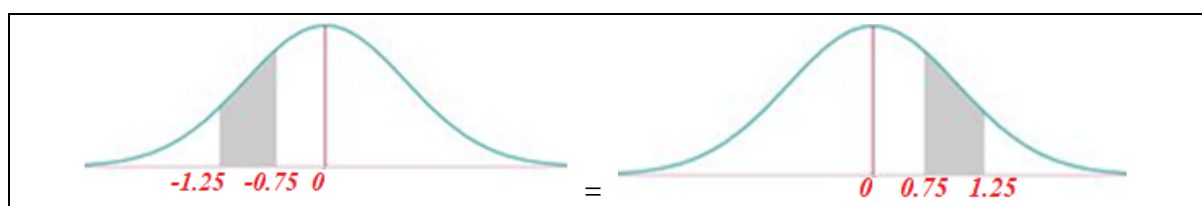
(b) pese entre 7,8 kg y 8 kg. (3 puntos)

(c) Si en un trayecto hay 90 maletas, ¿cuántas maletas es de esperar que pesen al menos 8,1 kg? (3 puntos)

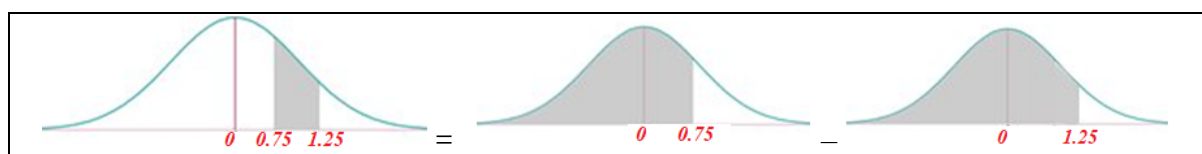
X = Peso en kg de una maleta. $X = N(7.5, 0.4)$

(a) Nos piden calcular $P(7 < X < 7.2)$.

$$P(7 < X < 7.2) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{7-7.5}{0.4} < Z < \frac{7.2-7.5}{0.4}\right) = \\ = P(-1.25 < Z < -0.75) = P(0.75 < Z < 1.25) = \dots$$



$$\dots = P(Z < 1.25) - P(Z < 0.75) = \dots$$



$$\dots = \{\text{Mirando en la tabla } N(0,1)\} = 0.8944 - 0.7734 = \boxed{0.121}$$

	0	1	2	3	4	5	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8840	0.8860	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9

(b)

$$P(7.8 < X < 8) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{7.8-7.5}{0.4} < Z < \frac{8-7.5}{0.4}\right) =$$

$$= P(0.75 < Z < 1.25) = \{\text{hecho en apartado a)}\} = \boxed{0.121}$$

(c)

$$P(X > 8.1) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{8.1 - 7.5}{0.4}\right) = P(Z > 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.5) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$



Si una maleta tiene una probabilidad de 0.0668 de pesar más de 8.1 kg en un total de 90 maletas habrán $90 \cdot 0.0668 = 6.012$ maletas que cumplen lo mismo.

De las 90 maletas aproximadamente unas 6 maletas superarán el peso de 8.1 kg.

	0	1
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869
1.3	0.9032	0.9049
1.4	0.9192	0.9207
1.5	0.9332	0.9345
1.6	0.9452	0.9463