



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2018**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^T .

Estudia, según los valores de λ , el rango de $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Calcula las matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula a , b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{si } x < 1 \\ bx + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo } [0, 2] \text{ y}$$

calcula el punto que cumple el teorema.

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$.
(para el dibujo de la parábola, indica puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice y concavidad o convexidad)

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es perpendicular a r .

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1,0,6)$ y $Q(3,-2,4)$ y es paralelo a la recta r

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $x + y + z - 5 = 0$.

4. En un bombo tenemos 10 bolas iguales numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la pelota al bombo

a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que salga el 7 menos de dos veces.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que salga el 7 menos de nueve veces.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.
2. a) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\operatorname{sen}(x^2)} = 3$.
- b) Calcula los valores de a , b , c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 5)$ y la tangente a su gráfica en el punto $(1, 1)$ sea paralela al eje X .
- c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$ (Nota: $\ln$ = logaritmo neperiano)
3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(9, 4, 1)$ y $Q(1, 1, 1)$. Dada la recta
$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$$
- a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s . Calcula, si se cortan, el punto de corte.
- b) Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano que contiene a las rectas r y s .
- c) Calcula la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ a la recta s .
4. En una fábrica hay tres máquinas A , B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2% de piezas defectuosas, B un 4% y C un 5%.
- a) Calcule la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.
- b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que fuera producida por la máquina A ?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^T .

b) Estudia, según los valores de λ , el rango de $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Calcula las matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculamos la matriz traspuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - 0 - 0 - 0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que $A^T = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Obtenemos la expresión de $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz $A - \lambda I$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 0 - 1 - 0 - 0 - 0 = -1 - \lambda^3$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow -1 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt[3]{-1} = -1}$$

Estudiamos dos situaciones distintas.

- Si $\lambda \neq -1$ el determinante de $A - \lambda I$ es no nulo y el rango de $A - \lambda I$ es 3.
- Si $\lambda = -1$ el determinante de $A - \lambda I$ es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

¿El rango de $A - \lambda I$ es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primera y su

determinante vale $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Al ser no nulo el rango de $A - \lambda I$ es 2 para $\lambda = -1$.

Resumiendo: Si $\lambda \neq -1$ el rango de $A - \lambda I$ es 3 y si $\lambda = -1$ el rango de $A - \lambda I$ es 2.

Resolvemos la ecuación matricial $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - z \\ -x + y \\ -y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = z} \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = z} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las matrices solución de $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ son $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$.

2. a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{si } x < 1 \\ bx + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo } [0, 2] \text{ y}$$

calcula el punto que cumple el teorema.

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$. (para el dibujo de la parábola, indica puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice y concavidad o convexidad)

a) Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y con $f(a) = f(b)$ entonces existe $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = 0$.

Obligamos a que la función sea continua en $[0, 2]$, para ello basta que sea continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= b + c \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} bx + c = b + c \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 + ax = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + c = 2 + a \Rightarrow \boxed{b = 2 + a - c}$$

Obligamos a que la función sea derivable en $(0, 2)$, para ello basta que sea derivable en $x = 1$. Deben coincidir las derivadas laterales.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & \text{si } x < 1 \\ bx + c & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si } x < 1 \\ b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b = b \\ f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x + a = 4 + a \\ f'(1^+) &= f'(1^-) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 4 + a}$$

La última condición es que $f(0) = f(2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= f(2) \\ f(0) &= 2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 = 0 \\ f(2) &= 2b + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{2b + c = 0}$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y obtenemos el valor de los parámetros.

$$\left. \begin{aligned} b &= 2 + a - c \\ b &= 4 + a \\ 2b + c &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 + a - c &= 4 + a \\ 2(4 + a) + c &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -c &= 2 \rightarrow \boxed{c = -2} \\ 8 + 2a + c &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 + 2a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-6}{2} = -3} \Rightarrow \boxed{b = 4 - 3 = 1}$$

Los valores buscados son $a = -3$, $b = 1$ y $c = -2$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x & \text{si } x < 1 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en el intervalo

$[0, 2]$, por lo que existe $d \in (0, 2)$ tal que $f'(d) = 0$.

Buscamos ese valor “d” averiguando cuando se anula la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3 = 0 \rightarrow 4x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{4} \in (-\infty, 1) \\ 1 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

El valor que cumple lo que afirma el teorema de Rolle es $d = \frac{3}{4} = 0.75 \in (-\infty, 1)$.

b) Hallamos los puntos de corte de parábola y recta.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Puntos de corte con los ejes de coordenadas de la parábola.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0, 0) \\ x = 2 \rightarrow B(2, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son A(0, 0) y B(2, 0).

Hallamos el vértice de la parábola.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \Rightarrow C(1, -1)$$

El vértice de la parábola es C(1, -1).

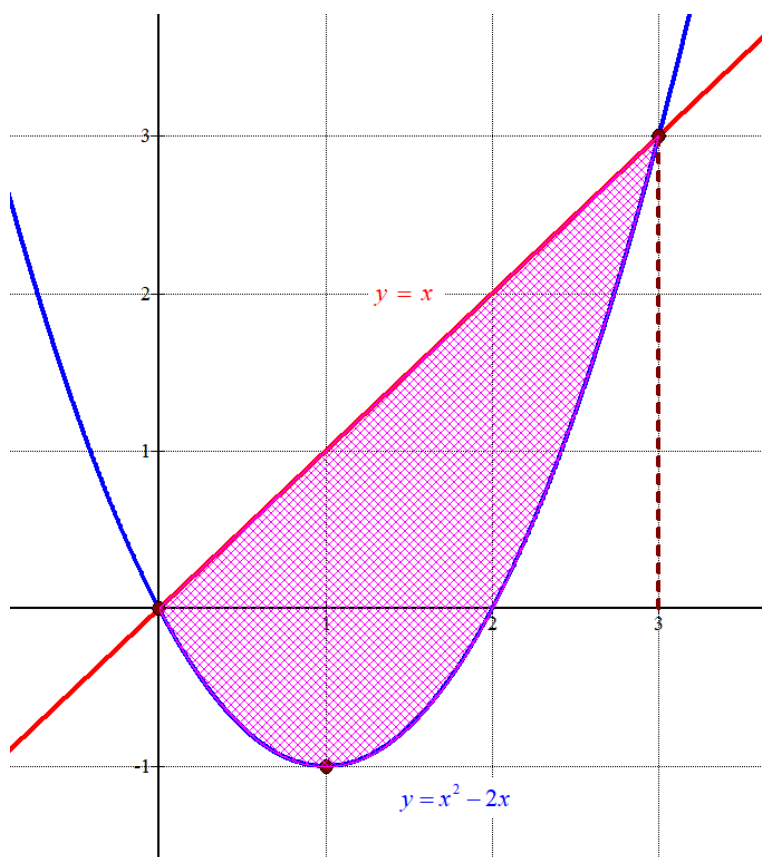
Estudiamos la concavidad o convexidad de la parábola: $y' = 2x - 2 \Rightarrow y'' = 2$.

Como la derivada segunda siempre es positiva la función es convexa (U)

Hacemos una tabla de valores y dibujamos ambas gráficas y la región encerrada entre ellas.

x	$y = x^2 - 2x$
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

x	$y = x$
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada el área tendrá un valor entre 4 y 5 unidades cuadradas. Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\text{Área} = \int_0^3 x - (x^2 - 2x) dx = \int_0^3 x - x^2 + 2x dx = \int_0^3 -x^2 + 3x dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} \right] = -9 + \frac{27}{2} = \boxed{4.5 \text{ u}^2}$$

El área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$ vale 4.5 unidades cuadradas.

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

- a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es perpendicular a r .
 b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1,0,6)$ y $Q(3,-2,4)$ y es paralelo a la recta r .
 c) Calcula la distancia de la recta r al plano $x+y+z-5=0$.

- a) Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta y un vector director de la misma.

$$r: \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z+2 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \Rightarrow -y-z+2-y+z-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=2-z} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r=(-1,0,1)}$$

El plano π perpendicular a la recta r tiene como vector normal el vector director de la recta $\vec{v}_r=(-1,0,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}=\vec{v}_r=(-1,0,1) \\ A(1,1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: -x+z+D=0 \\ A(1,1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -1+1+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi: -x+z=0}$$

La ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es perpendicular a r es $\pi: -x+z=0$.

- b) El plano π' paralelo a r tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}_r=(-1,0,1)$. El otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}=\vec{v}_r=(-1,0,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(3,-2,4)-(-1,0,6)=(4,-2,-2) \\ P(-1,0,6) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y & z-6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y+2(z-6)-2y+2(x+1)=0 \Rightarrow 4y+2z-12-2y+2x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2y+2z-10=0 \Rightarrow \boxed{\pi': x+y+z-5=0}$$

La ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1,0,6)$ y $Q(3,-2,4)$ y es paralelo a la recta r es $\pi': x+y+z-5=0$.

- c) Comprobamos que la recta r es paralela al plano $x + y + z - 5 = 0$ viendo que el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta es nulo (vectores perpendiculares $\rightarrow$ plano y recta paralelos).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 0, 1) \\ x + y + z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, 1, 1)(-1, 0, 1) = -1 + 1 = 0$$

Recta y plano son paralelos por lo que la distancia de la recta r al plano es la distancia de uno cualquiera de sus puntos al plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow P_r(2, 0, 0) \in r \\ \pi': x + y + z - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi') = d(P_r, \pi') = \frac{|2 + 0 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3} \text{ unidades}}$$

La distancia de r al plano $x + y + z - 5 = 0$ es de $\sqrt{3}$ unidades.

4. En un bombo tenemos 10 bolas iguales numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la pelota al bombo.

- a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que salga el 7 menos de dos veces.
 b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que salga el 7 menos de nueve veces.

Los resultados de las extracciones sucesivas son independientes entre sí, pues tras cada extracción se devuelve la bola al bombo.

La probabilidad de sacar 7 al extraer una bola es $1/10 = 0.1$.

- a) Llamamos X = Número de veces que sacamos 7 en 5 extracciones. $X = B(5, 0.1)$.

Nos piden calcular $P(X < 2)$.

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^5 + \binom{5}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^4 = \\ &= 0.9^5 + 5 \cdot 0.1 \cdot 0.9^4 = \boxed{0.91854} \end{aligned}$$

La probabilidad de que en 5 extracciones salga el 7 menos de dos veces es 0.91854.

- b) Llamamos X = Número de veces que sacamos 7 en 100 extracciones. $X = B(100, 0.1)$.

Nos piden calcular $P(X < 9)$. Como el número de repeticiones es muy alto usamos la aproximación a la normal Y de media $np = 100 \cdot 0.1 = 10$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 3.$$

$Y = N(10, 3)$. Esta aproximación es buena pues $np = 10 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0.9 = 90 > 5$.

Calculamos la probabilidad pedida.

$$\begin{aligned} P(X < 9) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 8.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{8.5 - 10}{3}\right) = \\ &= P(Z \leq -0.5) = P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085} \end{aligned}$$

La probabilidad de que en 100 extracciones salga el 7 menos de nueve veces es de 0.3085.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada en función del valor de m . Triangulamos la matriz ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad m \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 0 \quad m-1 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & m-1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad -m+1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1-m \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad -1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad m-1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \underbrace{1-m}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B depende del valor de m . Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$

En este caso el rango de A/B es 3, distinto del rango de A (2). El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 2. $m = 1$

En este caso la matriz queda
$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 2 & -1 & 1}^{A/B} \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{array} \right).$$

El rango de la matriz A y el de la matriz A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 1$ el sistema es **incompatible** y para $m = 1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

a) Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 2 & -1 & 1}^{A/B} \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ -2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ y = \frac{0}{-2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x - z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 + z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema son $x = 1 + \lambda$; $y = 0$; $z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. a) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\operatorname{sen}(x^2)} = 3$.

b) Calcula los valores de a , b , c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 5)$ y la tangente a su gráfica en el punto $(1, 1)$ sea paralela al eje X .

c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$ (Nota: $\ln$ = logaritmo neperiano)

a) Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + mx^2 - 1}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{\cos 2 \cdot 0 + m \cdot 0^2 - 1}{\operatorname{sen}(0^2)} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(-\operatorname{sen} 2x) + 2mx}{2x \cdot \cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} 2x + mx}{x \cdot \cos(x^2)} = \frac{-\operatorname{sen} 2 \cdot 0 + m \cdot 0}{0 \cdot \cos(0^2)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x + m}{\cos(x^2) + x \cdot 2x(-\operatorname{sen}(x^2))} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos 2x + m}{\cos(x^2) - 2x^2 \operatorname{sen}(x^2)} = \frac{-2 \cos 2 \cdot 0 + m}{\cos(0^2) - 2 \cdot 0^2 \operatorname{sen}(0^2)} = \frac{m - 2}{1} = m - 2$$

Igualemos este resultado a 3 y determinamos el valor de m .

$$m - 2 = 3 \Rightarrow \boxed{m = 5}$$

Para que el límite valga 3 debe ser $m = 5$.

b) La función tiene un punto de inflexión en $(0, 5)$, por lo que la derivada segunda es nula para $x = 0$ y la función pasa por $(0, 5)$, es decir, $f(0) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(0) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 5 \Rightarrow \boxed{d = 5}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La función queda $f(x) = ax^3 + cx + 5$.

La tangente a la gráfica de la función en el punto (1, 1) es paralela al eje X, por lo que la pendiente de la recta tangente es 0 $\rightarrow f'(1) = 0$. La función pasa por el punto (1, 1), lo que significa que $f(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + cx + 5 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot 1^3 + c \cdot 1 + 5 = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1 \Rightarrow \boxed{c = -a - 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + c \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + c = 0 \Rightarrow 3a + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -3a}$$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} c = -a - 4 \\ c = -3a \end{array} \right\} \Rightarrow -3a = -a - 4 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{-2} = 2} \Rightarrow \boxed{c = -3(2) = -6}$$

Los valores buscados son $a = 2$, $b = 0$, $c = -6$ y $d = 5$.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \sqrt{x} dx \rightarrow v = \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2x^{3/2}}{3} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{2x^{3/2}}{3} \ln x - \int \frac{2x^{3/2}}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{3}{2}-1} dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x^{3/2}}{3} = \boxed{\frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} + K} \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx &= \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} \right]_1^e = \left[\frac{2\sqrt{e^3}}{3} \ln e - \frac{4\sqrt{e^3}}{9} \right] - \left[\frac{2\sqrt{1^3}}{3} \ln 1 - \frac{4\sqrt{1^3}}{9} \right] = \\ &= \frac{6\sqrt{e^3}}{9} - \frac{4\sqrt{e^3}}{9} + \frac{4}{9} = \boxed{\frac{2\sqrt{e^3}}{9} + \frac{4}{9}} \end{aligned}$$

Hemos comprobado que $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2\sqrt{e^3}}{9} + \frac{4}{9}$.

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(9,4,1)$ y $Q(1,1,1)$. Dada la recta

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$$

- a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s . Calcula, si se cortan, el punto de corte.
 b) Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano que contiene a las rectas r y s .
 c) Calcula la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ a la recta s .

a) Hallamos la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} P(9,4,1) \in r \\ Q(1,1,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q(1,1,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1,1,1) - (9,4,1) = (-8,-3,0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 8\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow \vec{u}_s = (2,1,-1) \\ \vec{v}_r = (-8,-3,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-8} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{-1}{0}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{PR}]$, siendo R un punto de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_s = (2,1,-1) \\ R(1,0,5) \end{array} \right. \\ r: \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-8,-3,0) \\ P(9,4,1) \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PR} = (1,0,5) - (9,4,1) = (-8,-4,4)$$

$$[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{PR}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & 0 \\ -8 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -24 + 0 - 32 + 24 + 32 - 0 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan (coinciden en un punto y pertenecen al mismo plano). Calculamos el punto C de corte de ambas rectas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 - 8\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1-8\lambda-1}{2} = \frac{1-3\lambda}{1} = \frac{1-5}{-1} \Rightarrow -4\lambda = 1-3\lambda = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{4}{-4} = -1 \\ 1 - 3\lambda = 4 \rightarrow -3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 8(-1) = 9 \\ y = 1 - 3(-1) = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(9, 4, 1)}$$

El punto C de corte de las rectas r y s tiene coordenadas $C(9, 4, 1)$.

- b) El plano que contiene a las rectas r y s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $Q(1, 1, 1)$ de la recta r .

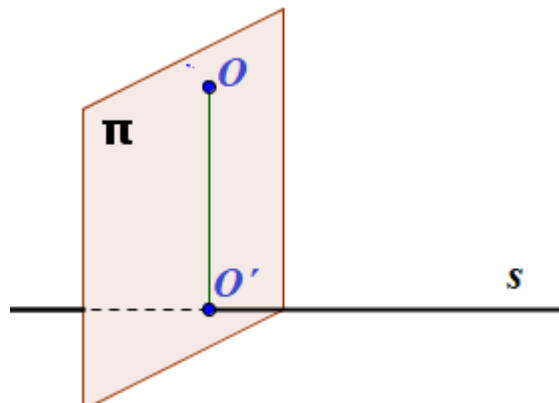
$$\left. \begin{array}{l} Q(1, 1, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-8, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(y-1) - 6(z-1) + 8(z-1) - 3(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y - 8 - 6z + 6 + 8z - 8 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -3x + 8y + 2z - 7 = 0}$$

El plano π que contiene ambas rectas tiene ecuación $\pi: -3x + 8y + 2z - 7 = 0$.

- c) Para hallar la distancia del punto O a la recta s hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por O. En un segundo paso hallamos el punto O' de corte de recta y plano. Y por último la distancia de O a r es la distancia entre los puntos O y O' (el módulo del vector $\overrightarrow{OO'}$).



Primer paso:

$$\left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{u}_s = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \in \pi \\ 2x + y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y - z = 0}$$

Segundo paso:

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow s: \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, -1) \\ R(1, 0, 5) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 5 - \alpha \end{cases}$$

$$\pi: 2x + y - z = 0$$

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 5 - \alpha \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2\alpha) + \alpha - (5 - \alpha) = 0 \Rightarrow 2 + 4\alpha + \alpha - 5 + \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{O'\left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)}$$

Tercer paso:

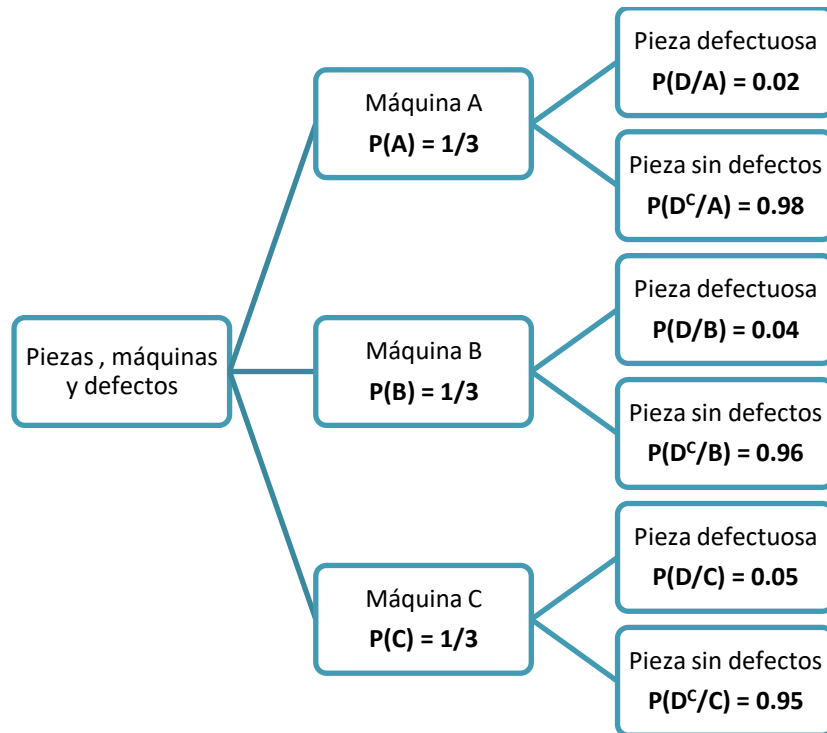
$$\begin{matrix} O\left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \\ O(0, 0, 0) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) - (0, 0, 0) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$d(O, s) = d(O, O') = |\overrightarrow{OO'}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4.94 \text{ unidades}}$$

La distancia del punto $O(0, 0, 0)$ a la recta s vale $\frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4.94$ unidades.

4. En una fábrica hay tres máquinas A, B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2% de piezas defectuosas, B un 4% y C un 5%.
- a) Calcule la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.
- b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no está defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que fuera producido por la máquina A

Si las máquinas producen la misma cantidad de piezas la probabilidad de que una pieza sea fabricada por A, B o C es de $1/3$. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0.02 + \frac{1}{3} \cdot 0.04 + \frac{1}{3} \cdot 0.05 = \boxed{\frac{11}{300} \approx 0.03667}$$

La probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa es $\frac{11}{300} \approx 0.03667$.

- b) Nos piden calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.98}{1 - \frac{11}{300}} = \boxed{\frac{98}{289} \approx 0.3391}$$

La probabilidad de que una pieza no defectuosa fuera producida por la máquina A tiene un valor de $\frac{98}{289} \approx 0.3391$.