

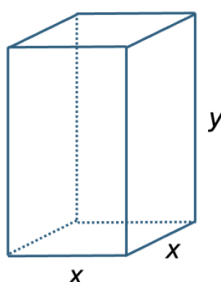
Evaluación para el Acceso a la Universidad Curso 2024/2025



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

EJERCICIO 1. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



- a) **[1 punto]** Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).
- b) **[1 punto]** Calcula, razonadamente, los valores de x e y , para que la superficie sea mínima.
- c) **[0,5 puntos]** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2 .

EJERCICIO 2. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2, -1, 3)$ y $B(-2, 4, 5)$.

a.1) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

a.2) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la longitud de la viga?

a.3) **[1 punto]** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A , B y $C(0, 0, 1)$. Determina el área de la placa triangular.

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

b.1) **[1,25 puntos]** Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ con $a \in \mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60° .

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1, 0, 0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

EJERCICIO 3. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} ax + 2y + z &= 1 \\ 2x + ay + z &= a \\ 5x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

a.1) **[1'5 puntos]** Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

b.1) [1,25 puntos] Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.

b.2) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

EJERCICIO 4. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Resuelve los problemas siguientes:

a.1) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,2$; $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,3$.

Calcula:

- [0,5 puntos] $P(B)$ y $P(A \cap \bar{B})$, con $\bar{B}$ el suceso complementario de B .
- [0,5 puntos] $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

a.2) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

- [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?
- [0,75 puntos] Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

b.1) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

- [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.
- [0,75 puntos] Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

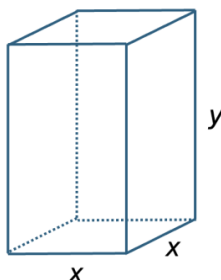
b.2) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

- [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?
- [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



- a) **[1 punto]** Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).
 b) **[1 punto]** Calcula, razonadamente, los valores de x e y , para que la superficie sea mínima.
 c) **[0,5 puntos]** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2 .

- a) El volumen debe ser 1 dm^3 , por lo que $x^2 y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$.

La superficie del envase es la suma de las dos bases y el lateral.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Base} \rightarrow x^2 \\ \text{Lateral} \rightarrow 4x \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 4xy \Rightarrow \left\{ y = \frac{1}{x^2} \right\} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 4x \frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

La superficie del prisma tiene la expresión $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$.

- b) Utilizamos la derivada de la función $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$ para encontrar sus puntos críticos.

$$S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x} \Rightarrow S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{4}{x^2} \Rightarrow 4x^3 = 4 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{1} = 1}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = 4x - 4x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 4 + 8x^{-3} = 4 + \frac{8}{x^3} \Rightarrow S''(1) = 4 + \frac{8}{1^3} = 12 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función superficie tiene un mínimo para $x = 1$.

La superficie es mínima para $x = 1 \text{ dm}$ e $y = \frac{1}{1^2} = 1 \text{ dm}$.

- c) La superficie mínima tiene un valor de $S(1) = 2 \cdot 1^2 + \frac{4}{1} = 6 \text{ dm}^2$. Como cuesta 5 euros el dm^2 el coste del envase será de $6 \cdot 5 = 30$ euros.

EJERCICIO 2. Apartado a) Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.

a.1) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

a.2) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la longitud de la viga?

a.3) **[1 punto]** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A , B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

a.1) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A(2,-1,3) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-2, 4, 5) - (2, -1, 3) = (-4, 5, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

a.2) La longitud de la viga es la distancia de A a B , es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 5, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{45} \simeq 6.7 \text{ unidades}$$

La longitud de la viga es de $\sqrt{45} \simeq 6.7 \text{ unidades}$

a.3) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-4, 5, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (2, -1, 3) = (-2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -10i - 4j - 4k + 10k - 8j - 2i = -12i - 12j + 6k = (-12, -12, 6)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-12)^2 + 6^2} = 18$$

El área de la placa triangular tiene un valor de 9 unidades cuadradas.

EJERCICIO 2. Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

- b.1) [1,25 puntos] Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ con $a \in \mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60° .
- b.2) [1,25 puntos] Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,0,0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

b.1) Utilizamos la fórmula del producto escalar para obtener el ángulo.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{(1, a, a) \cdot (-1, 0, 2)}{\sqrt{1^2 + a^2 + a^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{-1 + 2a}{\sqrt{1 + 2a^2} \sqrt{5}}$$

El ángulo debe ser de 60° .

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{-1 + 2a}{\sqrt{1 + 2a^2} \sqrt{5}} \\ \cos(60^\circ) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1 + 2a}{\sqrt{1 + 2a^2} \sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 + 4a = \sqrt{5} \sqrt{1 + 2a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 + 4a)^2 = 5(1 + 2a^2) \Rightarrow 4 + 16a^2 - 16a = 5 + 10a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a^2 - 16a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(6)(-1)}}{2(6)} = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(6)(-1)}}{12} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{70}}{6} = \begin{cases} \frac{8 + \sqrt{70}}{6} \approx 2.72 \rightarrow -1 + 2(2.72) > 0 \rightarrow \text{¡Es válido!} \\ \frac{8 - \sqrt{70}}{6} \approx -0.06 \rightarrow -1 + 2(-0.06) < 0 \rightarrow \text{coseno negativo ¡No es válido!} \end{cases}$$

El único valor que hace que $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$ es $a = \frac{8 + \sqrt{70}}{6} \approx 2.72$.

b.2) Si la recta r buscada es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ su vector director es el producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{v}_r = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = j - 2k = (0, 1, -2)$$

La recta r que cumple lo pedido es la recta que pasa por A y tiene como vector director $\vec{v}_r = (0, 1, -2)$. Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{aligned} A(1, 0, 0) \in r \\ \vec{v}_r = (0, 1, -2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 3. Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

a.1) [1'5 puntos] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [1 punto] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

a.1) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 10 + 4 - 5a - 4 - 2a = a^2 - 7a + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5=a} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2=a} \end{cases}$$

Distinguiamos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq 5$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = 2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \\ -10 \quad -10 \quad -5 \quad -5 \\ \hline 0 \quad -6 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{2 & 2 & 1 & 1}^{A/B} \\ 0 & -6 & -3 & -3 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 1}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

CASO 3. $a = 5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 5 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -5 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 25 \quad 5 \quad 25 \\ -10 \quad -4 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 21 \quad 3 \quad 23 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{5 \quad 2 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 21 \quad 3 \quad 23 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El **sistema es compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $a \neq 2$ y $a \neq 5$ el sistema es compatible determinado, si $a = 2$ el sistema es incompatible y si $a = 5$ el sistema es compatible indeterminado.

a.2) Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5x \quad +2y \quad +z \quad = 1 \\ -5x \quad -10y \quad -5z \quad = -5 \\ \hline -8y \quad -4z \quad = -4 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x \quad -y \quad +z \quad = 1 \\ -2x \quad -4y \quad -2z \quad = -2 \\ \hline -5y \quad -z \quad = -1 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ -8y - 4z = -4 \Rightarrow \\ -5y - z = -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2y+z=1 \\ -5y-z=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 5 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ -10y - 2z = -2 \\ 10y + 5z = 5 \\ \hline 3z = 3 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2y+z=1 \\ 3z=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2y+z=1 \\ \boxed{z=\frac{3}{3}=1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y+1=1 \\ 2y+1=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y=0 \\ 2y=0 \rightarrow \boxed{y=0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+0=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La solución del sistema es $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

EJERCICIO 3. Apartado b)

b.1) [1,25 puntos] Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.

La matriz A es de dimensiones 3×4 . Su rango es 1, 2 o 3.

Consideramos el menor que resulta de quitar la primera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0.$$

El rango de A es 3 para cualquier valor de a .

EJERCICIO 3. Apartado b)

b.2) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

Si la matriz y su inversa son iguales debe cumplirse que $A \cdot A = I$.

$$A \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+1=1 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

Para que la matriz A y su inversa sean iguales debe ser $a = 0$.

EJERCICIO 4. Apartado a)

a.1) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,2$; $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,3$. Calcula:

- [0,5 puntos] $P(B)$ y $P(A \cap \bar{B})$, con $\bar{B}$ el suceso complementario de B .
- [0,5 puntos] $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

i) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,3 = 0,2 + P(B) - 0,1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,3 - 0,2 + 0,1 = P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = 0,2}$$

Calculamos $P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0,2 = 0,1 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \boxed{P(A \cap \bar{B}) = 0,1}$$

ii) Calculamos $P(A/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,2} = \boxed{0,5}$$

Calculamos $P(B/A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,2} = \boxed{0,5}$$

EJERCICIO 4. Apartado a)

a.2) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

- **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?
- **[0,75 puntos]** Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo

Llamamos V a “sacar carta con punto verde” y R a “sacar carta con punto rojo”.
Realizamos una tabla de contingencia.

	Cartas con punto rojo (R)	Cartas sin punto rojo ($\bar{R}$)	
Cartas con punto verde (V)	7	4	
Cartas sin punto verde ($\bar{V}$)	5		
			40

Completamos la tabla.

	Cartas con punto rojo (R)	Cartas sin punto rojo ($\bar{R}$)	
Cartas con punto verde (V)	7	4	11
Cartas sin punto verde ($\bar{V}$)	5	24	29
	12	28	40

- i) En la primera extracción de la carta tenemos 40 cartas y 11 con punto verde, por lo que la probabilidad de que en la primera extracción la carta tenga un punto verde es $\frac{11}{40}$. En la segunda extracción solo quedan 39 cartas y 10 con punto verde la probabilidad de que en la segunda extracción (sin reemplazamiento) la carta tenga un punto verde es $\frac{10}{39}$.

La probabilidad de que al sacar dos cartas sin reemplazamiento ambas tengan un punto verde es $\frac{11}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{11}{156} \approx 0.0705$.

- ii) Si la carta extraída tiene un punto verde significa que es una de las 11 cartas con punto verde. Como de estas solo hay 7 con punto rojo tenemos que la probabilidad de que si la carta extraída tiene punto verde tenga también un punto rojo es de $\frac{7}{11} \approx 0.6364$.

EJERCICIO 4. Apartado b)

b.1) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

- **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.
- **[0,75 puntos]** Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

Llamamos T a “el socio juega al tenis”, N a “el socio practica natación”, G a “el socio practica golf” y A a “el socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales”.

Sabemos que $P(T) = 0.6$, $P(N) = 0.25$, $P(G) = 0.15$, $P(A/T) = 0.21$, $P(A/N) = 0.3$ y $P(A/G) = 0.12$.

i) Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(T)P(A/T) + P(N)P(A/N) + P(G)P(A/G) = \\ &= 0.6 \cdot 0.21 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.15 \cdot 0.12 = \boxed{0.219} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el socio elegido al azar haya obtenido algún premio es de 0.219.

ii) Nos piden calcular $P(N/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N/A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{P(N)P(A/N)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.3}{0.219} = \boxed{\frac{25}{73} \approx 0.3425}$$

La probabilidad de que elegido al azar un socio que ha obtenido premio esté sea de natación es de $\frac{25}{73} \approx 0.3425$.

EJERCICIO 4. Apartado b)

b.2) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

- **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?
- **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

X = El tiempo (en minutos) que una persona sana invierte en recorrer 5 km. $X = N(60, 8)$.

i) Nos piden calcular $P(X < 50)$.

$$P(X < 50) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{50-60}{8}\right) = P(Z < -1.25) = P(Z > 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8944
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115

La probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos en recorrer 5 km es de 0.1056.

ii) Nos piden calcular $P(50 \leq X \leq 66)$.

$$P(50 \leq X \leq 66) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{50-60}{8} \leq Z \leq \frac{66-60}{8}\right) = P(-1.25 \leq Z \leq 0.75) =$$

$$= P(Z \leq 0.75) - P(Z \leq -1.25) = P(Z \leq 0.75) - [1 - P(Z \leq 1.25)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7734 - (1 - 0.8944) = \boxed{0.6678}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8

La probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos en recorrer 5 km es de 0.6678.